

TOUT EN FICHES

Sous la direction de
Laurent Gautron
Professeur à l'Université
Gustave Eiffel (Marne-la-Vallée)

LE COURS DE PHYSIQUE LICENCE, CAPES, PRÉPAS

2^e
ÉDITION

Christophe Balland
Professeur à Sorbonne Université
(SU, Paris)

Laurent Cirio
Professeur à l'Université Gustave Eiffel
(Marne-la-Vallée)

Richard Mauduit
Professeur en BTS au lycée Schuman-Perret
(Le Havre)

Odile Picon
Professeur émérite à l'Université Gustave Eiffel
(Marne-la-Vallée)

Eric Wenner
Professeur en BTS au lycée Schuman-Perret
(Le Havre)

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Mise en pages : Nord Compo

Illustration de couverture : Metallic glowing colorful soap bubble
in the air in front of a blurry abstract background. © Frank. Adobe Stock

© Dunod, Paris, 2015, 2021

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083154-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	IX
Remerciements	X

Partie 1 – Mécanique et physique moderne

Chapitre 1	La cinématique du point	1
Fiche 1	Le repérage dans l'espace et le temps	2
Fiche 2	Les coordonnées cartésiennes et cylindriques	4
Fiche 3	Le repère de Frenet	6
Fiche 4	La vitesse et l'accélération	8
Fiche 5	La vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques	10
Fiche 6	L'accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques	12
Fiche 7	La vitesse et l'accélération dans le repère de Frenet	14
Focus	<i>La mesure de la circonférence de la Terre par Ératosthène (vers 230 av. J.-C.)</i>	16
QCM		17
Exercices		19
Chapitre 2	La dynamique du point et des systèmes de points	21
Fiche 8	Le principe d'inertie et les référentiels galiléens	22
Fiche 9	Le principe fondamental de la dynamique	24
Fiche 10	Le principe de l'action et de la réaction	26
Fiche 11	La force d'attraction gravitationnelle	28
Fiche 12	Les forces de frottement	30
Fiche 13	Le travail d'une force	32
Fiche 14	Les forces conservatives	34
Fiche 15	L'énergie potentielle	36
Fiche 16	Les puits et les barrières de potentiel	38
Fiche 17	Le théorème de l'énergie cinétique	40
Fiche 18	La conservation de l'énergie mécanique	42
Fiche 19	Les oscillations harmoniques	44
Fiche 20	Les oscillations amorties	46
Fiche 21	Les oscillations forcées et le phénomène de résonance	48
Fiche 22	La description d'un système de points	50
Fiche 23	Les grandeurs dynamiques d'un système de points	52
Fiche 24	Les grandeurs énergétiques d'un système de points	54
Fiche 25	Les théorèmes généraux de la mécanique d'un système de points	56
Fiche 26	Les collisions de particules matérielles	58
Focus	<i>La loi de chute des corps découverte par Galilée</i>	60
QCM		61
Exercices		63

Chapitre 3	La mécanique terrestre et céleste	67
Fiche 27	Le changement de référentiel	68
Fiche 28	La composition des vitesses	70
Fiche 29	La composition des accélérations	72
Fiche 30	Les référentiels en translation	74
Fiche 31	Les référentiels en rotation autour d'un axe fixe : définitions	76
Fiche 32	Les référentiels en rotation autour d'un axe fixe : vitesses et accélérations	78
Fiche 33	Les forces d'inertie	80
Fiche 34	L'accélération gravitationnelle et la latitude	82
Fiche 35	Deux phénomènes terrestres	84
Fiche 36	Le théorème du moment cinétique	86
Fiche 37	Le mouvement dû à des forces centrales	88
Fiche 38	Les lois de Kepler	90
Focus	<i>Les systèmes de navigation par satellites</i>	92
Focus	<i>Des hommes sur Mars !</i>	93
QCM		95
Exercices		97
Chapitre 4	La physique « moderne »	101
Fiche 39	La relativité restreinte	102
Fiche 40	La dynamique relativiste	104
Fiche 41	Le photon	106
Fiche 42	Les ondes et les particules	108
Fiche 43	Les atomes	110
Fiche 44	La classification périodique	112
Fiche 45	Le noyau atomique	114
Fiche 46	La radioactivité	116
Fiche 47	Le modèle standard	118
Fiche 48	Les particules élémentaires	120
Fiche 49	La structure des solides	122
Fiche 50	Les propriétés des solides	124
Focus	<i>La vitesse de la lumière</i>	126
Focus	<i>Les grands instruments utilisant le rayonnement synchrotron</i>	128
QCM		129
Exercices		131
Chapitre 5	Les systèmes thermodynamiques	137
Fiche 51	Les systèmes et les variables d'état	138
Fiche 52	L'équation d'état d'un système	140
Fiche 53	Les gaz parfaits	142
Fiche 54	Les mélanges de gaz parfaits	144
Fiche 55	Les gaz réels	146
Fiche 56	La théorie cinétique des gaz parfaits	148
Fiche 57	La température	150
Fiche 58	La thermométrie	152
Fiche 59	L'étude microscopique du gaz parfait	154
Fiche 60	La pression en un point d'un fluide	156

Fiche 61	La statique des fluides	158
Fiche 62	La poussée d'Archimède	160
Fiche 63	Les coefficients thermoélastiques	162
<i>Focus</i>	Le pouvoir des forces de pression	164
<i>QCM</i>		165
Exercices		167

Chapitre 6 Les principes de la thermodynamique 173

Fiche 64	Les transformations thermodynamiques	174
Fiche 65	L'énergie interne et l'énergie totale	176
Fiche 66	Les transferts thermiques	178
Fiche 67	Les coefficients calorimétriques	180
Fiche 68	Le travail des forces de pression	182
Fiche 69	Le premier principe de la thermodynamique (système fermé)	184
Fiche 70	Les lois de Joule	186
Fiche 71	Les transformations du gaz parfait (1)	188
Fiche 72	Les transformations du gaz parfait (2)	190
Fiche 73	Le premier principe de la thermodynamique (système ouvert)	192
Fiche 74	L'entropie et le deuxième principe	194
Fiche 75	L'interprétation statistique de l'entropie	196
Fiche 76	Le deuxième principe et son utilisation	198
Fiche 77	Le diagramme entropique (T, S)	200
Fiche 78	L'énergie libre – L'enthalpie libre	202
Fiche 79	Les propriétés des fonctions F et G	204
<i>Focus</i>	<i>De l'énergie à l'exergie : la démarche qualité</i>	206
<i>QCM</i>		207
Exercices		209

Chapitre 7 Les transferts de masse et de chaleur 213

Fiche 80	Les phénomènes de transport	214
Fiche 81	La résolution de l'équation de diffusion	216
Fiche 82	La diffusion particulière	218
Fiche 83	La diffusion thermique par conduction	220
Fiche 84	La diffusion thermique par convection	222
Fiche 85	Les transferts thermiques radiatifs	224
Fiche 86	Les caractéristiques énergétiques du rayonnement thermique	226
Fiche 87	Les résistances thermiques de systèmes	228
Fiche 88	Les échangeurs thermiques	230
<i>Focus</i>	<i>Question de sensibilité...</i>	232
<i>QCM</i>		233
Exercices		235

Chapitre 8 Les cycles thermodynamiques avec ou sans changements d'états 239

Fiche 89	Les changements d'état d'un corps pur	240
Fiche 90	La relation de Clapeyron	242
Fiche 91	L'équilibre liquide-vapeur	244
Fiche 92	La courbe de saturation	246
Fiche 93	Les fonctions d'état du corps pur diphasique liquide-vapeur	248

Fiche 94	Les cycles thermodynamiques	250
Fiche 95	Le cycle moteur de Carnot	252
Fiche 96	Les moteurs à combustion interne	254
Fiche 97	Les cycles moteurs à changement d'état	256
Fiche 98	Les cycles récepteurs et leurs efficacités	258
Fiche 99	Les cycles récepteurs réels	260
Focus	<i>La cogénération : principe et intérêt</i>	262
QCM		263
Exercices		265

Chapitre 9 Les ondes 269

Fiche 100	Qu'est-ce qu'une onde ?	270
Fiche 101	La propagation suivant une direction x	272
Fiche 102	La propagation à trois dimensions	274
Fiche 103	Les ondes sinusoïdales à une dimension	276
Fiche 104	Les ondes sinusoïdales à trois dimensions	278
Fiche 105	La puissance transportée par une onde progressive	280
Fiche 106	Le changement de milieu	282
Fiche 107	Réflexion à l'interface de deux cordes	284
Fiche 108	Les ondes acoustiques	286
Fiche 109	Les ondes stationnaires	288
Fiche 110	Les modes propres, la résonance	290
Focus	<i>Les instruments de musique et les gammes</i>	292
QCM		293
Exercices		295

Chapitre 10 Nature et propagation de la lumière 297

Fiche 111	La nature de la lumière	298
Fiche 112	De l'onde au rayon lumineux	300
Fiche 113	Le principe de Fermat	302
Fiche 114	Les lois de Snell-Descartes	304
Fiche 115	L'interprétation de la loi de la réfraction	306
Fiche 116	L'indice de réfraction	308
Fiche 117	Les fibres optiques	310
Fiche 118	Le prisme	312
Fiche 119	Les coefficients de réflexion et de transmission	314
Focus	<i>Le phénomène de mirage</i>	316
QCM		317
Exercices		319

Chapitre 11 La formation des images en optique 321

Fiche 120	Qu'est-ce qu'une image optique ?	322
Fiche 121	Le stigmatisme et les conditions de Gauss	324
Fiche 122	Les foyers et les plans focaux d'un système centré	326
Fiche 123	Les plans principaux et les distances focales d'un système centré	328
Fiche 124	La relation de conjugaison d'un système mince	330
Fiche 125	Les miroirs	332
Fiche 126	Les lentilles minces	334

Fiche 127	La construction de l'image géométrique d'un objet par un système mince	336
Fiche 128	Les rayons particuliers pour la construction d'une image géométrique	338
Fiche 129	La formation d'une image par un miroir	340
Fiche 130	La formation d'une image par une lentille	342
Fiche 131	La mesure de distances focales de lentilles	344
Fiche 132	Les instruments optiques	346
Focus	<i>La physiologie de l'œil humain</i>	348
QCM		349
Exercices		351

Chapitre 12 Interférences et diffraction des ondes lumineuses 353

Fiche 133	Les interférences et la diffraction	354
Fiche 134	Les interférences à deux ondes : source ponctuelle monochromatique (1)	356
Fiche 135	Les interférences à deux ondes : source ponctuelle monochromatique (2)	358
Fiche 136	Le dispositif des trous d'Young	360
Fiche 137	Les interférences à deux ondes : le cas d'un doublet	362
Fiche 138	Les interférences à deux ondes : le cas d'un continuum de longueurs d'onde	364
Fiche 139	La diffraction des ondes lumineuses	366
Fiche 140	La diffraction par une ouverture circulaire	368
Fiche 141	La diffraction par une ouverture rectangulaire	370
Fiche 142	La diffraction par deux fentes minces	372
Fiche 143	La diffraction par N fentes : le réseau (1)	374
Fiche 144	La diffraction par N fentes : le réseau (2)	376
Focus	<i>L'interféromètre de Michelson</i>	378
QCM		379
Exercices		381

Chapitre 13 L'électrostatique et la magnétostatique 383

Fiche 145	Les charges électriques	384
Fiche 146	La force et le champ électrostatiques créés par des charges ponctuelles	386
Fiche 147	Le champ électrostatique créé par une distribution continue de charges	388
Fiche 148	La circulation du champ électrostatique et le potentiel électrostatique	390
Fiche 149	Le calcul des potentiels électrostatiques	392
Fiche 150	Le calcul d'un champ électrique à partir du potentiel	394
Fiche 151	Le dipôle électrostatique	396
Fiche 152	Le théorème de Gauss	398
Fiche 153	Les applications du théorème de Gauss	400
Fiche 154	L'énergie potentielle électrostatique	402
Fiche 155	La force de Lorentz	404
Fiche 156	L'induction magnétique créée par un courant filiforme	406
Fiche 157	Les propriétés de l'induction magnétique	408
Fiche 158	Exemples de calculs d'inductions magnétiques	410
Fiche 159	La force de Laplace sur un conducteur parcouru par un courant	412
Fiche 160	Les interactions magnétiques	414
Focus	<i>La détermination de la charge élémentaire de l'électron</i>	416
QCM		417
Exercices		419

Chapitre 14	L'électrocinétique	421
Fiche 161	Les grandeurs électriques fondamentales	422
Fiche 162	Les conventions et la caractéristique courant-tension	424
Fiche 163	Les différents types de dipôles	426
Fiche 164	La loi d'Ohm	428
Fiche 165	Les circuits en régime continu	430
Fiche 166	Les théorèmes d'électrocinétique	432
Fiche 167	L'établissement du régime continu pour un circuit inductif	434
Fiche 168	L'établissement du régime continu pour un circuit capacitif	436
Fiche 169	L'étude du circuit <i>RLC</i>	438
Fiche 170	Le régime sinusoïdal et les notations complexes	440
Fiche 171	Les impédances complexes	442
Fiche 172	La puissance électrique	444
Fiche 173	Le circuit résonant	446
<i>Focus</i>	<i>Différents types de conceptions électriques</i>	448
<i>QCM</i>		449
Exercices		451
Chapitre 15	L'électromagnétisme	453
Fiche 174	L'induction magnétique	454
Fiche 175	L'inductance propre d'un circuit et l'inductance mutuelle	456
Fiche 176	Les opérateurs vectoriels	458
Fiche 177	Les équations de Maxwell dans le vide	460
Fiche 178	L'interprétation intégrale des équations de Maxwell	462
Fiche 179	La solution des équations de Maxwell sous forme d'ondes planes	464
Fiche 180	Les propriétés des ondes planes progressives monochromatiques	466
Fiche 181	L'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting	468
<i>Focus</i>	<i>Le four à micro-ondes</i>	470
<i>QCM</i>		471
Exercices		473
Chapitre 16	L'électronique	475
Fiche 182	La jonction PN	476
Fiche 183	La diode à jonction PN polarisée	478
Fiche 184	Les modèles électriques	480
Fiche 185	L'étude statique et dynamique	482
Fiche 186	Le transistor bipolaire	484
Fiche 187	Les réseaux de caractéristiques Le régime statique	486
Fiche 188	Les analyses statique et dynamique	488
Fiche 189	Le schéma équivalent petit signal Les paramètres hybrides	490
Fiche 190	L'amplificateur à transistor	492
Fiche 191	L'amplificateur opérationnel	494
Fiche 192	Les modes de fonctionnement de l'AOP	496
Fiche 193	Les limitations statiques et dynamiques de l'AOP	498
<i>Focus</i>	<i>Les LED dans l'éclairage et les écrans de télévision</i>	500
<i>QCM</i>		501
Exercices		503
Corrigés des exercices		507
Références bibliographiques		592
Index		593

Avant-propos

La physique est la science qui permet de décrire et de comprendre la nature ; c'est pour cette raison que, pendant longtemps, on parlait plutôt de *philosophie naturelle* pour expliquer l'origine de phénomènes naturels.

Les premiers « physiciens » ont été de brillants astronomes, et comme leurs questions tournaient autour de l'Univers, de la Terre, de l'Homme dans l'Univers, ils étaient aussi souvent de grands penseurs et de grands philosophes.

Copernic, en plaçant le Soleil au centre de l'Univers, a bouleversé notre vision du monde. Galilée et Newton peuvent être considérés comme les pères fondateurs de la physique, en mettant l'expérimentation et le formalisme mathématique en avant pour le premier, et en posant les principes de la physique pour le second. À partir du xvi^{e} siècle, des avancées considérables sont réalisées par de nombreux scientifiques dans tous les domaines de la physique, du fait notamment des progrès techniques et des instruments d'observation. Ces outils ont permis la réalisation d'expériences essentielles pour la découverte des lois de la physique toujours enseignées de nos jours. Ce sont surtout les bases de cette physique dite classique qui sont traitées dans cet ouvrage.

Les progrès techniques de la deuxième partie du xix^{e} siècle permettent la réalisation d'expériences plus fiables et beaucoup plus précises : les portes s'ouvrent vers le monde de l'infiniment petit, à l'échelle microscopique (échelle du micromètre). Cette période de transition entre les deux siècles constitue un bouleversement pour la physique, avec notamment les découvertes majeures de l'électron, de l'atome, de la radioactivité et des rayons X. La physique atomique et nucléaire était née, amenant alors la révolution des quanta.

Parallèlement à la physique quantique, Einstein a élaboré au début du xx^{e} siècle la théorie de la relativité restreinte en premier lieu puis celle de la relativité générale, qui s'applique à l'infiniment grand (planètes, trous noirs, gravité...).

Cet ouvrage est composé de quatre grandes parties : la **mécanique** avec une ouverture sur la physique moderne, la **thermodynamique** qui présente les bases puis les applications aux différentes machines thermiques, l'**optique** qui considère le caractère ondulatoire de la lumière et l'**électricité** qui présente aussi l'électrostatique et l'électromagnétisme avec un prolongement vers des applications électroniques. Chacune de ces parties est elle-même découpée en chapitres présentant les notions de base jusqu'aux applications importantes. Le découpage en fiches permet au lecteur de trouver rapidement l'information recherchée. La lecture est rendue facile par une présentation simple illustrée de nombreux schémas, avec des QCM corrigés pour s'auto-évaluer, des exercices d'application avec corrigés et des bonus web téléchargeables sur la page associée à l'ouvrage sur le site dunod.com.

L'ouvrage s'adresse aux étudiants en Licences (L1 et L2) de Sciences de la Matière, de Sciences Physique, de Physique-Chimie, de Sciences de l'Ingénieur, aux étudiants abordant les études de santé (PASS, concours paramédicaux), aux élèves des classes préparatoires et des grandes écoles, ainsi qu'aux candidats aux concours de l'enseignement.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier très sincèrement les personnes suivantes pour leurs relectures et conseils tout au long de la rédaction de cet ouvrage :

- Florence Rouyer, maître de conférences, Université Gustave Eiffel, Marne-la-Vallée.
- Lidija Andric, maître de conférences, Université Gustave Eiffel, Marne-la-Vallée
- Jean-Louis Izbicki, professeur des universités, Le Havre.
- Martine Mouchet, maître de conférences, Université de Paris.
- Sébastien Payan, professeur des universités, Sorbonne Université (SU, Paris).

Chapitre 1

La cinématique du point



Objectifs

La cinématique, tout comme le cinéma, a pour origine le mot grec « *kínêma* » qui signifie « mouvement ». La cinématique est en effet la partie de la mécanique qui étudie et décrit le mouvement des corps en fonction du temps, en faisant abstraction des forces à l'origine de ces mouvements.

La première étape de la cinématique est de donner les bases du repérage d'un point dans l'espace et le temps (Fiche 1), et de définir les différents systèmes de coordonnées (Fiches 2 et 3) dans lesquels peut être décrit le mouvement d'un corps.

Il est ensuite essentiel de définir trois vecteurs fondamentaux de la cinématique : les vecteurs position, vitesse et accélération (Fiche 4), et de les projeter dans différents repères (Fiches 5, 6 et 7).

Ces bases doivent permettre de maîtriser l'étude et la description de mouvements simples.



Les bonus web sur dunod.com

Le pictogramme  signale la présence d'un contenu spécifique sur le web.

Le repérage dans l'espace et le temps

1. Le point matériel comme représentation

Pour décrire plus simplement les mouvements d'un corps, on assimile souvent ce dernier à un point appelé point matériel.

Un corps matériel peut être assimilé à un point s'il ne roule pas sur lui-même et si ses dimensions caractéristiques sont petites par rapport aux distances qu'il parcourt.

Un point matériel est un point géométrique dont la position peut être parfaitement définie par trois coordonnées seulement.

En mécanique, il est essentiel de définir le système avant toute étude ou calcul. Ensuite en mécanique du point, pour simplifier, on assimile ce système à un point matériel.

2. Le choix d'un repère et d'un référentiel

Pour décrire la position d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'une référence. Par exemple, un homme assis dans un train est immobile par rapport au wagon, mais en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi, pour déterminer le mouvement d'un point, on se rapporte à un solide S supposé indéformable qui doit être défini clairement. Ce solide constitue le référentiel d'étude (R).

Ensuite, on repère les points de l'espace dans ce référentiel à l'aide d'un repère ortho-normé direct, soit un point origine particulier au solide S (souvent on prend le centre de gravité de S) et trois axes orthogonaux formant un trièdre direct. Plusieurs repères ou systèmes de coordonnées peuvent alors être choisis en fonction notamment de la géométrie du problème.



L'importance des schémas

Un bon schéma est la clef de la résolution de tout problème de mécanique. Comme l'objectif est de décrire ici des mouvements dans l'espace, il est particulièrement important de savoir faire des dessins en perspective, et de savoir réaliser les projections adéquates selon des plans bien choisis. Ce point sera détaillé lors de la présentation des systèmes de coordonnées.



Fiche 2

3. Le repérage dans le temps

La géométrie dans l'espace ne suffit pas à décrire les mouvements en mécanique. Il est nécessaire d'introduire la notion d'événement décrivant un phénomène instantané. On dit qu'on établit une chronologie lorsqu'on sait classer une succession d'événements. Un phénomène physique se décrit donc par le lieu où il se produit mais aussi par l'instant où il se produit.

La mécanique classique repose sur une hypothèse essentielle : le temps est considéré comme **absolu** et **universel**. Cela signifie que la notion de temps est indépendante du référentiel et du mouvement. Ainsi, un intervalle de temps entre deux événements est le même quel que soit l'observateur et quel que soit le mouvement de l'observateur. Cette

hypothèse a été remise en cause par les théories d'Einstein, notamment en ce qui concerne les mouvements se produisant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière : ces théories ont ouvert la voie à une nouvelle forme de mécanique, la mécanique quantique. Celle-ci sera introduite et développée dans le chapitre 4. Par ailleurs, le temps est aussi considéré comme **irréversible**, monotone et croissant : cette hypothèse implicite repose sur le principe de causalité qui postule qu'un effet ne peut être antérieur à sa cause.

Au fil des siècles, la notion de temps et sa mesure ont beaucoup évolué en fonction des avancées technologiques et des progrès scientifiques. Basée d'abord sur la période de rotation de la Terre, puis sur celle de la rotation de la Terre autour du Soleil, la notion de temps repose maintenant sur des mesures réalisées avec des horloges atomiques.

Pour décrire le mouvement dans l'espace, on a défini un repère avec une origine : cette origine peut correspondre à un observateur fixe ou mobile, le repère étant considéré comme fixe ou local se déplaçant avec le point M respectivement. De même, pour décrire un mouvement dans le temps, il est nécessaire de définir une origine des temps : un temps t_0 ou $t = 0$, à partir duquel on pourra définir une chronologie d'événements liés au mouvement du point M. On a indiqué plus haut que l'observateur à partir duquel on repère le mouvement du point matériel M, était considéré comme le référentiel (R). Il faut noter que dans certains cas, il est d'usage de considérer ce référentiel d'étude du mouvement comme étant l'association du repère géométrique dans l'espace et du repère chronologique dans le temps. Ce type de définition « élargie » du référentiel sera utilisé dans la suite de ce cours de mécanique.

 Focus
chapitre 1



Les unités

La Conférence Générale des Poids et des Mesures (CGPM) qui s'est tenue en novembre 2018 à Versailles, a adopté par un vote unanime la nouvelle définition des unités du système international. Le dernier étalon matériel, celui du kilogramme, a ainsi été remplacé et le nouveau système d'unités s'appuie désormais sur les constantes fondamentales de la nature : ce système est plus cohérent à la fois avec la physique quantique et relativiste et aussi avec les techniques de mesures les plus récentes.

La **seconde** est ainsi définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 exprimée en Hz, unité égale à s^{-1} .

Le **mètre** est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c , égale à 299 792 458 exprimée en m/s.



Remarque

Un nouveau système de contrôle des vitesses sur les routes s'appelle le LIDAR (*Light Detection And Ranging*), et il n'utilise pas l'effet doppler (mesure de la variation de fréquence entre l'onde radio envoyée et celle reçue en écho). Il utilise des lasers infrarouges pour effectuer une multitude de calculs de distances dans des intervalles de temps très courts, et il en déduit la vitesse à partir des changements de distance détectés en un temps donné.

Cette technique est appliquée dans les nouveaux radars de la police (les jumelles laser par exemple) mais aussi dans les nouveaux radars automatiques.



1. Les coordonnées cartésiennes

On considère un repère constitué de trois axes rattachés à un point origine O , caractéristique du solide de référence (R) .

À ce repère on associe une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont alors les vecteurs unitaires des axes OX , OY et OZ respectivement.

La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est orthonormée directe si :

- $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$;
- les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux ;
- $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$.

À un instant donné, on repère la position du point M par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ appelé **vecteur position**. On note x , y et z les coordonnées cartésiennes du point M définies par la relation suivante :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées x , y et z sont des grandeurs algébriques, positives ou négatives.

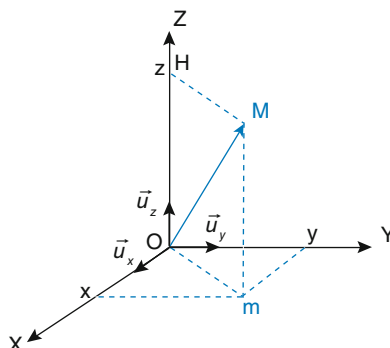


Figure 2.1 Le système de coordonnées cartésiennes.

Représentation du système de coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: cas du point M de coordonnées (x, y, z) , et du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

2. Les coordonnées cylindriques

La position du point M est définie dans un repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On introduit la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ orthonormée directe, associée aux coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . Les vecteurs de cette base sont définis comme suit :

- $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{Om}}{\rho}$ dans le plan (OX, OY) . $\vec{u}_\rho$ est appelé vecteur radial ;
- $\vec{u}_\theta$ est obtenu par rotation de $+\pi/2$ dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$, dans le plan (OX, OY) . $\vec{u}_\theta$ est appelé vecteur orthoradial ;

- $\vec{u}_z$ est le vecteur directeur de l'axe OZ, identique à celui du repère associé aux coordonnées cartésiennes.

À noter que ce repère n'est pas lié au point O, donc n'est pas lié au référentiel (R). Le repère cylindrique est associé au point M, c'est donc un repère local **mobile**. Dans ce repère, le vecteur position du point M s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées cylindriques sont définies comme suit : ρ est une distance donc toujours positive ; la cote z est une valeur algébrique (positive ou négative) ; l'angle θ est orienté dans le sens (+) défini en imaginant une rotation de l'axe OX vers l'axe OY.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées cylindriques décrivent les intervalles suivants :

$$\rho \in [0, +\infty[; \theta \in [0, 2\pi] ; z \in]-\infty, +\infty[$$

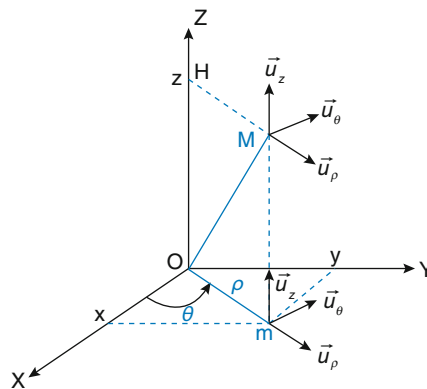


Figure 2.2 Le système de coordonnées cylindriques.

Représentation du système de coordonnées cylindriques dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$: cas du point M de coordonnées (ρ, θ, z) , et du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.



Remarque

- 1) Si le mouvement du point a lieu dans le plan (OX, OY) , il n'est pas nécessaire d'utiliser la cote z . On utilise alors les **coordonnées polaires** (ρ , angle polaire θ). Ainsi les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires auxquelles on ajoute la cote z . On parle parfois de coordonnées cylindro-polaires.
- 2) Les relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont les suivantes :

$$x = \rho \cdot \cos \theta, y = \rho \cdot \sin \theta, z = z, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. La base de Frenet

Un autre repère local, appelé repère de Frenet, peut être utilisé pour décrire la position d'un point M. Il est représenté sur une courbe qui, par définition, correspond à l'ensemble des positions prises par le point M au cours d'un mouvement quelconque.

Sur cette courbe on fixe une origine A et un sens pris en général positif dans le sens du mouvement. La position du point M sur la courbe est alors repérée par la donnée de son abscisse dite curviligne et notée $s(M)$: cette abscisse correspond en fait à la longueur de l'arc orienté AM.

On fait l'hypothèse que lorsque l'arc de cercle AM est infiniment petit, la courbe peut être considérée comme inscrite dans un plan, appelé alors plan **osculateur**. Dans ce cas, on définit un repère local dit de Frenet avec une base orthonormée directe $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$, où :

- $\vec{T}$ est le vecteur tangent à la courbe au point M (pour simplifier le formalisme, le sens de $\vec{T}$ est en général pris dans le sens du mouvement) ;
- le vecteur $\vec{N}$ est perpendiculaire à $\vec{T}$ et dirigé vers la concavité de la courbe ($\vec{N}$ définit alors la normale principale à la courbe) ;
- le vecteur $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{N}$ et $\vec{T}$ est tel que le trièdre $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ soit direct ($\vec{B}$ définit alors la binormale à la courbe). Soit $\vec{T} \wedge \vec{N} = \vec{B}$

À noter que $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont inscrits dans le plan osculateur de la courbe lorsque M est très proche de A. La base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est mobile et suit le mouvement de M sur la courbe.

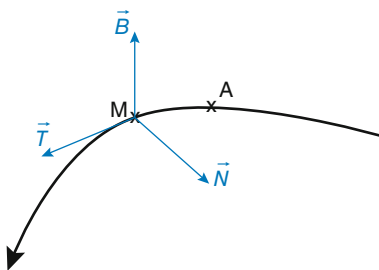


Figure 3.1 Le système de représentation de Frenet.

Représentation du repère local de Frenet avec la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ orthonormée directe associée. La position de M sur la courbe orientée est donnée par son abscisse curviligne $s(M)$ comptée à partir de l'origine A.

2. Les relations entre les vecteurs de la base de Frenet

On considère deux points M et M' très proches l'un de l'autre de telle manière qu'ils forment un arc de cercle $MM' = ds$ infiniment petit. L'angle interceptant cet arc de cercle est noté $d\alpha$. On considère alors que M et M' sont dans un même plan, le plan osculateur. On peut représenter les vecteurs tangents $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ ainsi que les vecteurs normaux $\vec{N}$ et $\vec{N}'$, respectivement aux points M et M'.

L'intersection des deux droites définies par les vecteurs normaux $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ correspond au point C appelé centre de courbure. La distance de C au point M définit alors ce que l'on appelle le rayon de courbure noté R_c .

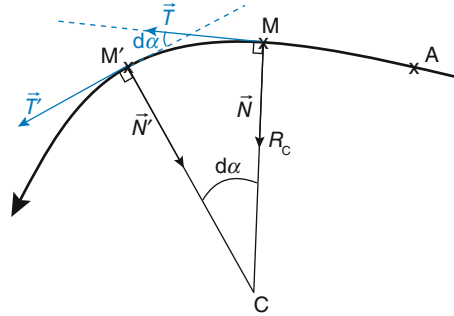


Figure 3.2 Les relations entre les vecteurs de la base de Frenet.

Représentation du déplacement du repère local de Frenet avec la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ orthonormée directe associée.

On retrouve l'angle $d\alpha$ entre les vecteurs tangents $\vec{T}$ et $\vec{T}'$, comme indiqué sur la figure 3.2. L'angle $d\alpha$ correspond à un angle polaire pour le vecteur $\vec{T}$. Or on sait que lorsqu'on dérive un vecteur par rapport à son angle polaire, on obtient un vecteur directement perpendiculaire. Dans le cas présenté ici, c'est le vecteur $\vec{N}$ qui est directement perpendiculaire à $\vec{T}$. On peut donc écrire :

$$\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$$

On sait aussi qu'une dérivée correspond à un rapport de deux infinitésimaux (lorsque la dérivée est définie sur un domaine continu). On peut donc multiplier et diviser simultanément ce rapport par une même quantité. Ainsi on peut écrire une relation qui sera utile dans la suite du cours :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds}$$

On connaît la relation entre un arc de cercle, le rayon du cercle et l'angle qui intercepte l'arc de cercle : $ds = R_c \cdot d\alpha$. Ainsi, on trouve : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R_c}$.

1. La définition de la vitesse

Dans le référentiel d'étude (R), la position d'un point M est repérée à tout instant par son vecteur position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.

■ La vitesse moyenne

À l'instant t_1 , le vecteur position de M est noté $\vec{r}_1$, à l'instant t_2 (postérieur à t_1), ce vecteur est noté $\vec{r}_2$. On appelle vecteur déplacement le vecteur $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Entre les deux instants successifs t_1 et t_2 , la vitesse moyenne (notée $\vec{v}_m$) est définie par le rapport de son vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ par l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$.

Ainsi on écrit :

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_2 - t_1}$$

■ La vitesse instantanée

La vitesse instantanée de M à l'instant t correspond à la limite de ce rapport lorsque Δt tend vers zéro : par définition, la vitesse instantanée est la dérivée du vecteur position par rapport au temps ; ainsi on écrit la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ du point matériel M :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une vitesse est le rapport d'une longueur par un temps, elle s'exprime donc en mètres par seconde ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Il est important de préciser par rapport à quel référentiel la vitesse est définie. On écrit alors par exemple :

$$\vec{v} = \vec{v}_R(M) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_R$$

Le référentiel (R) est indiqué en indice : on a donc ici l'expression de la vitesse du point M dans le référentiel (R). Dans ce référentiel, les axes sont considérés comme fixes, donc ne dépendant pas du temps.



Remarques

La définition d'un vecteur donne en fait trois informations en une : elle indique la direction, le sens et la norme du vecteur.

À noter aussi que le vecteur vitesse d'un point M est toujours tangent (au point M) à la courbe décrite par le point M au cours de son mouvement.



Notations

On utilise en cinématique la notation de Newton qui consiste à marquer toute dérivation d'un vecteur ou d'une grandeur par rapport au temps, avec un point au-dessus de ce vecteur ou grandeur. Ainsi, on note :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

2. La définition de l'accélération

Dans la plupart des mouvements, la vitesse varie au cours du temps, soit en norme, soit en direction, soit en sens, soit les trois à la fois. On caractérise cette variation par l'accélération $\vec{a}$ du point.

■ L'accélération moyenne

On imagine un point M passant d'un point A (atteint à l'instant t_1 , avec une vitesse $\vec{v}_1$) à un point B (atteint à l'instant t_2 , avec une vitesse $\vec{v}_2$). On peut alors définir l'accélération moyenne (notée $\vec{a}_m$) du point M entre ces deux positions A et B :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_2)}{t_2 - t_1}$$

■ L'accélération instantanée

L'accélération instantanée de M à l'instant t correspond à la limite de ce rapport lorsque $\Delta t = t_2 - t_1$ tend vers zéro : par définition, l'accélération instantanée est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps et donc la dérivée seconde du vecteur position $\vec{OM}$ par rapport au temps ; ainsi on écrit la vitesse instantanée $\vec{a}(t)$ du point matériel M :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \ddot{\vec{OM}}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une accélération est le rapport d'une vitesse par un temps, elle s'exprime donc en mètres par seconde au carré ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Tout comme la vitesse, l'accélération est définie par rapport à un référentiel donné que l'on indique par une lettre en indice. L'accélération du point M dans le référentiel (R) s'écrit donc :

$$\vec{a} = \vec{a}_R(M) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R$$



Fiche 2

1. La vitesse en coordonnées cartésiennes

Le vecteur position du point M dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au référentiel (R) s'écrit : $\vec{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$.

On rappelle une règle élémentaire de dérivation d'une somme de produits, en marquant les dérivées avec la notation « primée » :

$$(fg + hk)' = f'g + fg' + h'k + hk'$$

On applique cette même règle en dérivant le vecteur position $\vec{OM}$ par rapport au temps (avec la notation de Newton, « pointée ») :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + x \cdot \dot{\vec{u}}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + y \cdot \dot{\vec{u}}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z + z \cdot \dot{\vec{u}}_z.$$

Or les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ dans le repère cartésien lié au référentiel (R) sont invariants avec le temps, donc $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$; on écrit alors :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées de $\vec{v}_R(M)$ sont donc $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

2. La vitesse en coordonnées cylindriques

L'objectif ici est d'exprimer le vecteur vitesse du point M en fonction des vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de la base du repère cylindrique (local, mobile, associé au point M) associé au référentiel (R) qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur position a été écrit précédemment : $\vec{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$.

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur vitesse instantanée du point M dans (R) et dans la base du repère cylindrique :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z} \cdot \vec{u}_z + z \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Notons d'abord que dans le référentiel d'étude (R), le vecteur $\vec{u}_z$ est fixe alors que $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ évoluent avec le temps.

Ainsi on peut déjà écrire que $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$.

Pour exprimer $\dot{\vec{u}}_\rho$ dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on utilise la méthode mathématique suivante, basée sur le fait qu'on peut diviser et multiplier un rapport par la même quantité :

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$

Or, on a vu que lorsqu'on dérive un vecteur (ici $\vec{u}_\rho$) par son angle polaire (ici θ), on obtient un vecteur directement perpendiculaire (ici $\vec{u}_\theta$).

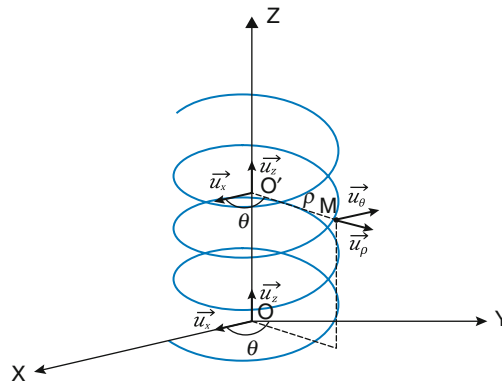
Ainsi on a : $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$.

On obtient alors l'expression de la vitesse instantanée du point M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Exemple

Mouvement hélicoïdal



Les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ sont orthogonaux et dans un plan horizontal. La coordonnée ρ correspond à la distance du point M par rapport à l'axe de l'hélice, la coordonnée θ correspond à l'angle que forme $\vec{u}_\rho$ avec $\vec{u}_x$.

1. L'accélération en coordonnées cartésiennes

L'expression de la vitesse instantanée du point M dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au référentiel (R) est :

 Fiche 5

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme de produits, on trouve l'expression de l'accélération instantanée du point M :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{OM}} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{x} \cdot \dot{\vec{u}}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{y} \cdot \dot{\vec{u}}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z + \dot{z} \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Or les vecteurs dans le repère cartésien lié au référentiel (R) sont invariants avec le temps, donc $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$; on écrit alors :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{OM}} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées de $\vec{a}_R(M)$ sont donc $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$.

2. L'accélération en coordonnées cylindriques

On exprime ici le vecteur accélération du point M en fonction des vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de la base du repère cylindrique (local au point M) associé au référentiel (R) qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur vitesse a été écrit précédemment :

 Fiche 5

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur accélération instantanée du point M dans R et dans la base du repère cylindrique :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{OM}} = \ddot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z + \dot{z} \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Dans le référentiel d'étude (R), le vecteur $\vec{u}_z$ est fixe alors que $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ évoluent avec le temps. Ainsi on peut déjà écrire que $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$.

Pour exprimer $\dot{\vec{u}}_\rho$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$ dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on utilise la même méthode que dans le cas de la vitesse en coordonnées cylindriques. On trouve donc que :

 Fiche 5

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho$$

En effet lorsqu'on dérive $\vec{u}_\theta$ par rapport à θ , cela revient à dériver une seconde fois $\vec{u}_\rho$ par rapport à son angle polaire, donc à effectuer deux rotations successives de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique : on obtient alors $-\vec{u}_\rho$.

L'accélération instantanée du point M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ s'écrit donc :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{OM}} = \ddot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{\rho} \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \left(-\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho \right) + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

d'où :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{OM}} = \left(\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 \right) \cdot \vec{u}_\rho + \left(2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} \right) \cdot \vec{u}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Exemple

Pour un mouvement hélicoïdal de vitesse angulaire ω constante, on peut écrire l'accélération du point M en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(M) = -\rho \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_\rho + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Si le déplacement selon l'axe OZ se fait à vitesse constante ($\dot{z} = \text{cste}$, donc $\ddot{z} = 0$) l'accélération est seulement centripète, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et dirigée vers l'axe du cylindre :

$$\vec{a}(M) = -\rho \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_\rho$$

1. La vitesse dans le repère de Frenet

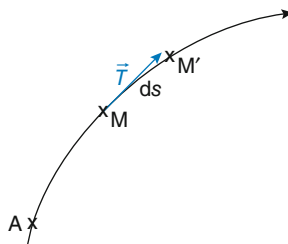


Figure 7.1 Trajectoire curviligne suivie par un point M.

Sur la figure 7.1 est représentée la courbe suivie par un point M. La distance entre les points M et M' sur la courbe est notée ds . Si M et M' sont infiniment proches, on peut faire l'hypothèse que M et M' sont à la fois sur la courbe et sur la tangente à la courbe au point M (tangente de vecteur directeur unitaire $\vec{T}$).

Ainsi le vecteur déplacement peut s'écrire : $\overline{MM'} = ds \cdot \vec{T}$.

La vitesse instantanée du point M peut donc s'écrire comme suit, en soulignant que sur la tangente à la courbe au point M le vecteur $\vec{T}$ est fixe :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overline{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

2. L'accélération dans le repère de Frenet

La vitesse du point M dans la base mobile de Frenet a pour expression :

$$\vec{v}(M) = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

On trouve l'accélération du point M dans cette même base en dérivant par rapport au temps la vitesse instantanée. On écrit donc :

$$\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \dot{s} \cdot \dot{\vec{T}}$$

On peut écrire la dérivée de $\vec{T}$ par rapport au temps, sous la forme suivante :

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Nous connaissons les termes de ce produit :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R_c} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$$

avec R_c le rayon de courbure et $\vec{N}$ le vecteur normal (tourné vers la concavité de la courbe).



Fiche 3

Ainsi, on trouve :

$$\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_c} \cdot \vec{N}$$

Il y a donc deux composantes de l'accélération : une composante tangentielle (notée $a_T(M)$) et une composante normale (notée $a_N(M)$). Leurs expressions sont :

$$a_T(M) = \ddot{s} \quad \text{et} \quad a_N(M) = \frac{\dot{s}^2}{R_c}.$$



Remarques

- On utilise parfois la notation suivante : $v = \dot{s}$, où v est une mesure algébrique, positive si le point M se déplace dans le sens des abscisses curvilignes croissantes et négative si le point M se déplace dans le sens des abscisses curvilignes décroissantes. On écrit donc l'expression de l'accélération comme suit : $\vec{a}(M) = v \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R_c} \cdot \vec{N}$.
- En cinématique du point, la courbe dont le comportement est étudié avec le repère de Frenet, correspond à la trajectoire parcourue par le point. Le vecteur vitesse est toujours porté par la tangente à la courbe. Le vecteur accélération présente une composante normale qui décrit le changement de direction de la trajectoire (courbure) et une composante tangentielle qui donne la variation de la norme du vecteur vitesse.

Jean Frédéric Frenet (1816-1900) est un mathématicien, connu pour avoir découvert six des neuf formules dites de Serret-Frenet. Ces formules sont essentielles en géométrie différentielle, dans la théorie des courbes dans l'espace. Elles permettent notamment de décrire la cinématique d'un objet se déplaçant sur une courbe continue et différentiable dans un espace euclidien tridimensionnel. Plus précisément, ces formules correspondent aux dérivées des vecteurs unitaires (tangent, normal, binormal) les uns par rapport aux autres.

Frenet a présenté ces formules dans sa thèse soutenue en 1847 et les a publiées en 1852 dans le Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Il les a découvertes indépendamment de Joseph-Alfred Serret (1819-1885), autre mathématicien de cette époque.



La mesure de la circonférence de la Terre par Ératosthène (vers 230 av. J.-C.)

Contexte historique

La ville d'Alexandrie, à l'embouchure du Nil en Égypte, est une cité grecque fondée par Alexandre le Grand en 322 av. J.-C.

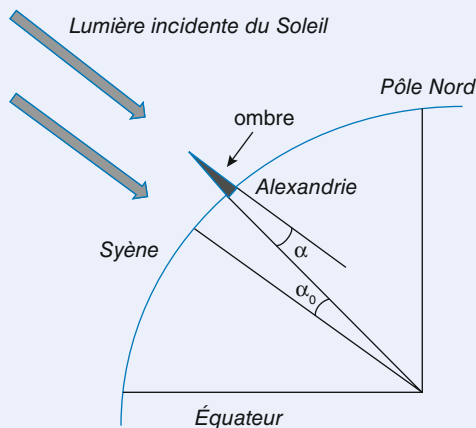
Au III^e siècle av. J.-C., Alexandrie devint un des centres du savoir du monde grec, avec notamment une bibliothèque riche de nombreux ouvrages. Ératosthène en devint le directeur en 240 av. J.-C. Ératosthène était mathématicien, il est à l'origine d'une méthode permettant la détermination des nombres premiers. Mais il était aussi géographe, peut-être l'un des tous meilleurs de l'antiquité. Les grecs savaient depuis longtemps que la Terre était une sphère et Ératosthène voulut en déterminer la circonférence.

La mesure et le calcul

Ératosthène utilisa une méthode purement géométrique. Il compara les ombres en deux lieux situés sur un même méridien à une même date, le solstice d'été le 21 juin : il observa l'absence d'ombre dans un puits à Syène (aujourd'hui Assouan), et il mesura l'angle entre un bâton planté verticalement à Alexandrie et la pointe de son ombre. Il trouva cet angle égal à 7,2 degrés, soit un cinquantième d'un tour complet à 360 degrés.



Fiche 1



Cet angle noté α sur le schéma ci-dessus est identique à l'angle α_0 qui est l'angle au centre de la Terre entre Alexandrie et Syène : en effet ces deux angles se situent de part et d'autre d'une diagonale entre des lignes parallèles.

Ératosthène fit mesurer précisément la distance entre les deux villes, et il est arrivé à la valeur de 5 000 stades, mesure de l'époque correspondant à 157,5 mètres. Ainsi il calcula la circonférence de la Terre comme étant égale à 39 375 km. Ce résultat est remarquable quand on le compare à la circonférence aujourd'hui connue, qui est de 40 075,02 km à l'équateur et de 40 007,864 km le long d'un méridien passant par les pôles.

- 1.1** Une grandeur scalaire est une grandeur sans unité.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.2** Dans une formule, on peut multiplier des grandeurs physiques qui ne présentent pas les mêmes dimensions.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.3** On mesure une masse m , et on trouve qu'elle est comprise entre 12,2 g et 12,8 g. L'erreur absolue correspond à l'écart entre les deux valeurs et vaut donc 0,6 g.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.4** L'incertitude relative est un nombre sans dimension.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.5** Cocher la proposition vraie pour l'expression de l'accélération dans le repère de Frenet avec s étant l'abscisse curviligne :
☐ a. $\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \dot{s} \cdot \ddot{\vec{T}}$ ☐ b. $\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \dot{s} \cdot \dot{\vec{T}}$
- 1.6** Une flèche est tirée depuis un arc verticalement vers le haut. Au sommet de sa trajectoire son accélération est nulle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.7** En chute libre, un corps tombe en un temps ne dépendant pas de sa masse mais seulement de la distance à parcourir.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.8** Une voiture est en mouvement sur une route horizontale lorsqu'un objet (non polluant et non dangereux !) est jeté par la fenêtre : cet objet met plus de temps pour arriver au sol que s'il avait été jeté de la voiture à l'arrêt.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.9** La Lune sur son orbite supposée circulaire, présente une accélération constamment dirigée vers la Terre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.10** Un drone lâche un objet alors que sa vitesse est multipliée par deux. La distance parcourue horizontalement par l'objet est donc doublée.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Réponses

- 1.1** b.
- 1.2** a.
- 1.3** b. Car l'erreur absolue n'est pas l'écart entier mais sa moitié soit 0,3 g.
- 1.4** a.
- 1.5** b.
- 1.6** b. C'est la vitesse qui s'annule au sommet de la trajectoire.
- 1.7** a.
- 1.8** b. Le temps de chute ne dépend que du mouvement vertical qui est indépendant du mouvement horizontal de la voiture.
- 1.9** a.
- 1.10** a. La distance parcourue horizontalement est directement proportionnelle à la vitesse initiale du drone.

Exercices

1.1 Un cylindre creux présente un diamètre intérieur D_1 et un diamètre extérieur D_2 . Les mesures de ces diamètres donnent : $D_1 = 18,2 \pm 0,1$ mm ; $D_2 = 25,4 \pm 0,1$ mm.

Donner le résultat de la mesure de l'épaisseur du cylindre et sa précision.

1.2 On donne les trois vecteurs suivants dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{U}_1 = 4 \cdot \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} ; \vec{U}_2 = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - 5 \cdot \vec{k} ; \vec{U}_3 = 3 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$$

1. Déterminer le vecteur $\vec{V}$ correspondant à la somme de ces trois vecteurs.
2. Calculer le module de ce vecteur $\vec{V}$.
3. Déterminer les angles que forme ce vecteur $\vec{V}$ avec les axes portant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1.3 Deux vecteurs ont les coordonnées suivantes dans un repère orthonormé direct :

$$\vec{U}(a, 1, b) \quad \text{et} \quad \vec{V}(-3, 2, 5)$$

1. Trouver a et b pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient parallèles.
2. Déterminer le vecteur unitaire pour chacun de ces deux vecteurs.

1.4 Deux points ont les coordonnées cylindriques suivantes :

$$A(r_A, \theta_A, z_A) \quad \text{et} \quad B(r_B, \theta_B, z_B)$$

1. Déterminer la distance entre les points A et B en exprimant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en coordonnées cartésiennes.
2. Retrouver cette distance entre les points A et B par le calcul direct en coordonnées cylindriques.

1.5 Un point matériel M décrit un mouvement rectiligne défini par l'équation horaire :

$$x(t) = 2 \cdot t^3 - 8 \cdot t^2 + 8 \cdot t + 2$$

1. Déterminer les expressions de la vitesse et l'accélération du point M à l'instant t .
2. Étudier le mouvement de M lorsque t croît de 0 à $+\infty$. Préciser notamment le sens de déplacement du point M et si le mouvement est accéléré ou retardé.

1.6 Un mobile M se déplace dans le plan (Ox, Oy) auquel est associé un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À l'instant t , les coordonnées de M sont les suivantes :

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad y(t) = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

1. Expliquer quelle trajectoire est suivie par M .
2. Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération du point M à l'instant t .
3. Quelle relation y a-t-il entre l'accélération et le vecteur position du point M ?
4. Déterminer le temps nécessaire pour que le mobile M repasse par une même position.

1.7 Depuis le sommet d'un immeuble, une personne lance une balle verticalement vers le haut avec une vitesse de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La balle atteint le sol 4 secondes plus tard. On note $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.

2. Déterminer la hauteur de l'immeuble.

3. Déterminer la vitesse à laquelle la balle atteint le sol.

1.8 Un point matériel M se déplace dans un plan suivant les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 2 \cdot t$ et $y(t) = 2 \cdot t^2 - 2 \cdot t$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire. Quel type de trajectoire est suivie par le point M ?

2. Déterminer les composantes de la vitesse en fonction du temps. En déduire l'expression de la vitesse en fonction du temps.

3. Déterminer les composantes de l'accélération en fonction du temps. Montrer que l'accélération est constante.

4. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération en fonction du temps, dans le repère de Frenet.

5. En déduire le rayon de courbure en fonction du temps.

1.9 On étudie le mouvement des électrons dans un tube cathodique (repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$). Les électrons arrivent en un point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{i}$. Ils passent ensuite entre deux plaques de déviation horizontales D_1 et D_2 de longueur d , où ils subissent une accélération uniforme $\vec{a}_0 = a_0 \cdot \vec{j}$. Ils sont déviés et sortent des plaques en un point A avec une vitesse $\vec{v}_A$ faisant un angle α avec $\vec{i}$. Ils arrivent sur un écran situé à une distance $D = 4 \cdot d$ en un point B situé à une distance L de l'axe $(O, \vec{i})$. À noter que l'accélération des électrons entre A et B est nulle.

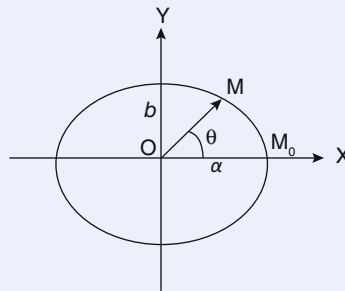
1. Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ entre les plaques. En déduire l'équation de la trajectoire.

2. Calculer la vitesse au point A en fonction de v_0 , a_0 et d . En déduire l'angle α .

3. Quelle est la nature de la trajectoire entre les points A et B ? Donner alors les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ sur ce parcours AB.

4. Déterminer l'expression de la déviation L en fonction de v_0 , a_0 et d .

1.10 Un point matériel M se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, selon la figure ci-dessous :



La position du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est repérée par l'angle θ par rapport à l'axe OX. À l'instant $t = 0$, M se trouve en M_0 de coordonnées x_0 et y_0 .

Les équations horaires du mouvement peuvent être mises sous la forme suivante : $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$ et $y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta)$, en supposant que ω est une constante.

1. Déterminer les valeurs de x_0 , α et β . En déduire la valeur de y_0 .

2. Déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération du point M dans la base cartésienne.

3. Montrer que l'accélération peut s'écrire comme suit : $\vec{a} = -k \cdot \overrightarrow{OM}$. Déterminer l'expression de k .