BCPST1

Colles de physique-chimie

Damien Tocqueville Alexandra D'Arco Chloé Galibert
Jean-Xavier Bardaud Léa Dubois

283 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices d'application du cours
- Exercices d'entraînement
- Exercices d'approfondissement

ellipses

BCPST1

Colles de **physique-chimie**

BCPST1

Colles de **physique-chimie**

Damien Tocqueville
Ancien étudiant de l'ENS Paris-Saclay
Professeur agrégé de chimie en PC au lycée Turgot (Paris)

Jean-Xavier Bardaud
Ancien étudiant de l'ENS Paris-Saclay
Agrégé de chimie
Post-doctorant à l'Institut de Chimie Physique (Orsay)

Alexandra D'Arco
Professeure agrégée de physique dans l'académie de Nantes

Léa Dubois
Ancienne élève de l'ENS Paris-Saclay
Professeure agrégée de physique en PCSI au lycée Jacques Decour (Paris)

Chloé Galibert
Professeure agrégée de physique en PCSI au lycée Lakanal (Sceaux)

Préface de Rachel Méallet

ellipses

Collection Colles de Prépas
dirigée par François Pantigny

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur
www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-106093
Dépôt légal : septembre 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Préface

Être élève de classes préparatoires ou étudiant.e en licence scientifique, ce n'est pas seulement accumuler des connaissances, c'est aussi apprendre à raisonner, à argumenter et à transmettre, c'est acquérir des compétences. Que l'on soit chercheur.e, ingénieur.e, vétérinaire ou enseignant.e, ces compétences sont essentielles. Elles prennent racine très tôt dans le parcours de formation et trouvent un terrain d'entraînement privilégié dans les classes préparatoires mais aussi à l'université.

Parmi les exercices qui jalonnent la formation en classes préparatoires, les khôlles occupent une place centrale. Elles ne sont pas de simples évaluations : elles constituent une école de la rigueur, du raisonnement mais aussi de la communication et de l'interaction. Un espace limité dans le temps de débat et de joute autour de la résolution d'un exercice ou d'une question scientifique. Face à un examinateur ou une examinatrice, l'étudiant.e apprend à structurer sa pensée en temps réel, à s'appuyer sur des concepts fondamentaux tout en développant une réflexion personnelle et en s'adaptant aux pistes et questions de l'interrogateur ou de l'interrogatrice. Cette capacité à articuler un raisonnement scientifique de manière claire et précise est une compétence partagée bien au-delà des classes préparatoires, que ce soit dans la recherche académique, l'innovation ou les métiers de l'expertise scientifique. En amont de l'oral, il faut alors bien se préparer. Cet ouvrage est donc un « must have », un essentiel. Il est le fruit du travail d'un collectif de jeunes femmes et jeunes hommes engagé.e.s dans la transmission du savoir, dans l'accompagnement des jeunes non seulement pour les préparer à un concours mais également pour les aider à grandir (et pas uniquement scientifiquement). Il me semble que ce recueil d'exercices illustre l'exigence intellectuelle et la rigueur d'Alexandra D'Arco, Jean-Xavier Bardaud, Léa Dubois, Chloé Galibert et Damien Tocqueville. L'ouvrage propose un ensemble d'exercices de khôlles soigneusement sélectionnés et corrigés.

Parmi ce collectif se trouvent d'anciens élèves que j'ai eu le plaisir de former et dont je suis la trajectoire avec plaisir.

Que ce recueil soit pour ses lectrices et lecteurs un guide et un compagnon dans leur cheminement, leur permettant de développer une expertise qui, j'en suis sûre, leur servira bien au-delà des concours.

Au travail !

Rachel Méallet
Professeure des Universités
Faculté des sciences – Université Paris-Saclay
Institut des sciences moléculaires d'Orsay (ISMO)

Nous remercions François Pantigny, directeur de la collection *Colles de prépa* aux éditions Ellipses pour ses relectures et ses précieux conseils.

Nous avons eu la chance de bénéficier des relectures attentives et constructives de nos collègues, amis et amies de l'Université. Nous remercions donc Céline Blaess (lycée Joliot-Curie, Nanterre), Rosemonde Chahbazian (doctorante au laboratoire ismo, Orsay), Marie-Charlotte Emperauger (lycée Lavoisier, Paris), Jules Fillette (ats, Lycée Newton - Clichy) et Hugo Roussille (AgPr, ens de Lyon).

Nous tenons à remercier les collègues enseignantes de cpge Marion Bonnier (pc, lycée Baimbridge - Pointe-à-Pitre) et Lucile Olive (bcpst1, lycée Baimbridge - Pointe-à-Pitre) pour leurs conseils, relectures et les discussions scientifiques que nous avons pu avoir lors de la rédaction de cet ouvrage.

Merci à nos proches pour leur patience lors de l'écriture de ce livre et leurs relectures des fautes d'orthographe.

Enfin, en achevant la rédaction de cet ouvrage, nous avons une pensée pour toutes les enseignantes et les enseignants, en particulier de classes préparatoires ainsi que des préparations à l'agrégation, qui nous ont transmis cette passion pour les sciences et en particulier pour la physique-chimie. Ils et elles se reconnaîtront et peuvent être fiers de nous avoir aidé à parcourir notre chemin vers l'enseignement et/ou la recherche.

Alexandra D'Arco, Jean-Xavier Bardaud, Léa Dubois, Chloé Galibert et Damien Tocqueville

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants et étudiantes des classes préparatoires filière BCPST1, que les auteurs et autrices tiennent à féliciter pour leur admission dans cette formation.
La spécificité d'une classe préparatoire repose en grande partie sur l'existence des interrogations orales (aussi appelées « colles » ou encore « khôlles »). Ces interrogations peuvent créer une certaine appréhension puisqu'il s'agit d'un exercice pouvant paraître impressionnant. Cet ouvrage comporte une douzaine d'exercices par chapitre qui permettent d'aborder avec calme et confiance chaque interrogation.
Les exercices sont classés selon les trois catégories suivantes :

- Les **exercices d'application du cours** : ils ont pour but de vérifier que les bases du cours (en adéquation avec les capacités exigibles du programme officiel) sont connues pour aborder sereinement les interrogations orales.
- Les **exercices d'entraînement** : ils demandent davantage de réflexion et permettent d'apprendre à utiliser le cours pour résoudre des problèmes souvent rencontrés aux écrits ou aux oraux des concours.
- Les **exercices d'approfondissement** : ils sont issus pour la plupart de sujets rencontrés récemment dans les annales des concours. Ils permettent non seulement de perfectionner sa capacité à résoudre des problèmes se rapprochant du niveau ambitieux des concours mais également de s'entraîner à mener rigoureusement un raisonnement à l'oral comme à l'écrit. Dans la plupart des chapitres, cette catégorie contient une question ouverte, format régulièrement utilisé aux épreuves orales des concours.

Chaque exercice proposé dans cet ouvrage est corrigé de manière détaillée. Certaines questions sont accompagnées d'une *méthode*, d'une *remarque* ou d'une *erreur classique* à ne pas commettre.
Les corrigés des exercices issus d'annales de concours sont souvent complétés d'extraits de rapport de jury afin de se faire une idée la plus précise possible des exigences des concours de CPGE.
Ce livre a été conçu par des professeurs, pour certains en CPGE, tous anciens étudiants de CPGE qui connaissent les difficultés mais aussi les grandes satisfactions de ces classes. Ils tiennent à souhaiter une excellente réussite à toutes les étudiantes et tous les étudiants qui parcourront cet ouvrage et les invitent à prendre plaisir dans leurs études : la prépa est un plat indigeste, mais excellent pour la santé !

Sommaire

Énergie : conversions et transferts 1

1 Descriptions microscopique et macroscopique d'un système 3

2 Bilans d'énergie pour un système thermodynamique 15

3 Machines thermiques 39

4 Statique des fluides 63

Ondes et signaux 85

5 Propagation d'un signal physique 87

6 Réflexion, réfraction 105

7 Signaux électriques en régime stationnaire 131

8 Circuits électriques du premier ordre 149

Constitution et transformation de la matière 177

9 Modélisation quantique de l'atome 179

10 Modèle de la liaison chimique 193

11 Caractérisations spectroscopiques d'entités chimiques 221

12 Isomérie en chimie organique 265

13 Évolution d'un système chimique vers un état final 295

14 Réactions acide-base 329

15 Transformations modélisées par des réactions rédox 363

16 Relation entre structure et propriétés des espèces chimiques 397

17 Évolution temporelle d'une transformation chimique 421

18 Mécanismes réactionnels et catalyse 473

19 Additions électrophiles sur les liaisons C = C 495

20 Substitutions nucléophiles aliphatiques 515

21 Additions nucléophiles 537

22 Additions nucléophiles suivies d'élimination 567

Mouvements et interactions **589**

23 Mécanique d'un point matériel 591

24 Dynamique d'un point matériel 611

Phénomènes de transport **651**

25 Transport de matière diffusif 653

Tables de spectroscopie infrarouge 679

Tables de spectroscopie de résonance magnétique du proton 681

Tableau périodique des éléments 683

Énergie : conversions et transferts

Descriptions microscopique et macroscopique d'un système

1

Énoncés des exercices

Données pour l'ensemble des exercices

- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Conversion de pressions : $1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$
- Conversion de température $T(\text{K}) = \theta(^\circ\text{C}) + 273{,}15$

Exercices d'application du cours

Exercice 1 *Équation d'état du gaz parfait*

1) Calculer le nombre de moles contenues dans une bouteille de 1,5 L remplie d'argon à 25 °C sous pression atmosphérique.
2) Calculer le volume occupé par une mole de gaz sous pression atmosphérique à 100 °C.

Données : $p_{\text{atm}} = 1{,}013\ \text{bar}$

Exercice 2 *Gaz parfait*

Un récipient aux parois rigides contient un gaz dont la pression initiale est $p_1 = 1{,}1 \cdot 10^5\ \text{Pa}$ et la température initiale est $\theta_1 = 50\ ^\circ\text{C}$. Le gaz est refroidi à volume constant jusqu'à atteindre la température $\theta_2 = 10\ ^\circ\text{C}$.

1) Calculer la nouvelle pression du gaz après refroidissement.
2) Calculer la quantité de matière de gaz si le volume du récipient est de 2 L.

Exercice 3 *Bombe aérosol*

Une bombe aérosol de volume $V_b = 300$ mL contient 100 mL de laque et le reste est occupé par du diazote ($M_{N_2} = 14\ g \cdot mol^{-1}$) qui joue le rôle de gaz propulseur. Sa température est de 20 °C et sa pression vaut $p = 4{,}0$ bar.

Le diazote est supposé se comporter comme un gaz parfait.

1) Calculer la quantité de matière de diazote, notée n_{N_2}, contenue dans cette bombe aérosol. Préciser alors sa masse m_{N_2}.
2) La température passe de 20 à 50 °C. Calculer la pression p' du diazote dans cette même bombe aérosol.

Exercice 4 *Ballon de baudruche*

Un ballon de baudruche est rempli d'air, supposé suivre le modèle du gaz parfait. À température ambiante ($\theta_{amb} = 25$ °C), le volume du ballon est $V_1 = 2{,}0$ L. La température augmente à pression constante et atteint $\theta_2 = 35$ °C.

1) Rappeler les hypothèses du modèle du gaz parfait.
2) Exprimer puis calculer le volume V_2 du ballon suite à l'augmentation de température.
3) Dans quelle mesure ce modèle est-il réaliste ? Indiquer les phénomènes qui pourraient l'altérer dans la réalité.

Exercices d'entraînement

Exercice 5 *Pression des pneumatiques*

En hiver, par une température extérieure de $T_1 = 0$ °C, la pression des pneumatiques d'une voiture est réglée à $p_1 = 2{,}0$ atm. Il s'agit de la pression indiquée par le constructeur. Cette valeur est affichée sur un manomètre qui mesure l'écart entre la pression des pneumatiques et la pression atmosphérique. Dans tout l'exercice, l'air est supposé suivre le modèle du gaz parfait.

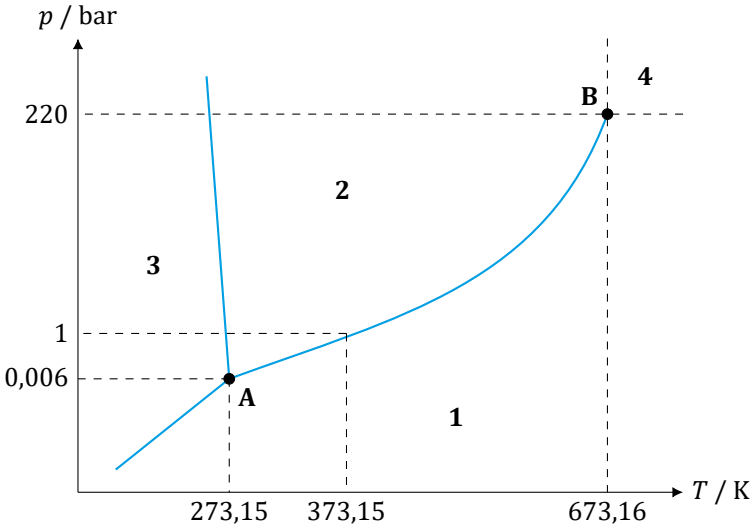
1) Calculer quelle serait la pression des pneumatiques en été sous une température de 30 °C. Le volume des pneus est supposé constant et aucune fuite n'est observée.
2) Calculer la variation relative due au changement de température. Commenter, sachant que cet écart ne doit dépasser 10 %.

Exercice 6 *Présence d'eau liquide*

La présence d'eau liquide et d'une atmosphère, permettant le processus de la photosynthèse, ainsi que l'existence d'un champ magnétique servant de bouclier aux rayonnements cosmiques, sont nécessaire à l'apparition de la vie.
Le tableau ci-dessous regroupe des données permettant de comparer quelques caractéristiques de la Terre à celles de Mars.

planète	**distance au soleil**	**température moyenne en surface**	**pression atmosphérique**	**composition de l'atmosphère**
Terre	1 ua	−93,2 °C à 56,7 °C	$1{,}013 \cdot 10^5$ Pa	80 % de diazote et 20 % de dioxygène
Mars	1,4 à 1,7 ua	−100 °C à 0 °C	600 Pa	peu épaisse, principalement du dioxyde de carbone

Le diagramme pression-température (p,T) de l'eau est donné ci-après.



Si l'eau n'existe pas sous forme liquide sur Mars, elle a dû néanmoins être présente sous cette forme dans le passé. Les volcans martiens ont dû éjecter de l'hydrogène et de l'oxygène qui ont donné naissance à de l'eau dont les canaux conservent la trace de l'écoulement. Lors d'un refroidissement ultérieur de la planète, l'eau a dû disparaître sous forme de glace dans

le sol. Un élément qui vient confirmer cette hypothèse est la présence de dépôts de sel au creux de dépressions vers lesquelles serpentent des canaux.

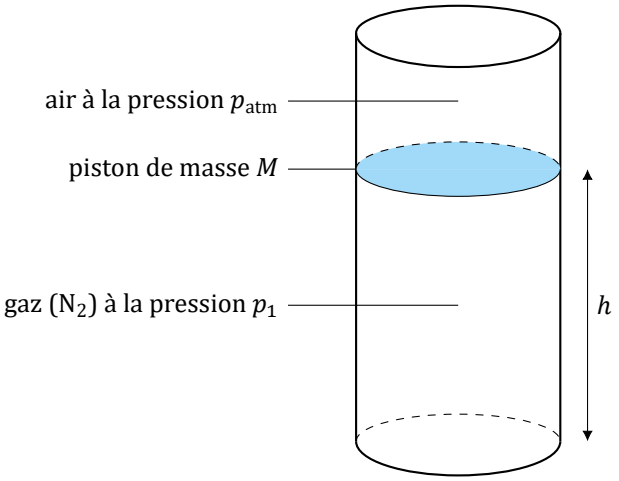
1) Associer à chaque domaine numéroté de **1** à **4** l'état physique dans lequel se trouve l'eau.
2) Donner le nom des points A et B.
3) En s'aidant du texte, indiquer sous quel état physique se trouve essentiellement l'eau sur Mars aujourd'hui.
4) Valider cette hypothèse en s'aidant du tableau et du diagramme (p,T) de l'eau.

D'après écrits CCINP TSI

Exercice 7 *Piston*

Un cylindre vertical de section $S = 100\ \text{cm}^2$ contient une masse m de diazote sous un piston mobile de masse $M = 10{,}0\ \text{kg}$ pouvant se déplacer sans frottements à une température initiale $T_1 = 300\ \text{K}$.

La hauteur du gaz dans le cylindre est notée h et le gaz est supposé parfait.



Données : $M_{N_2} = 28{,}0\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $p_{atm} = 1{,}013\ \text{bar}$.

1) Exprimer la pression p_1 du gaz en fonction de la pression atmosphérique p_{atm}, de la masse M du piston, de la surface S de la section du cylindre et de l'accélération de la pesanteur g. Effectuer l'application numérique.
2) Exprimer la masse volumique ρ_1 du gaz en fonction de p_1, T_1 et R puis la calculer.
3) Déterminer le nombre de moles de diazote contenues dans le cylindre si la hauteur initiale est de 20 cm.

Le gaz est chauffé jusqu'à atteindre la température $T_2 = 400\ \text{K}$. La pression est maintenue constante et le piston monte alors jusqu'à la hauteur h'.

4) Exprimer et calculer la valeur de h' du gaz après l'expansion.

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 *Gaz réel*

On considère un système constitué d'une quantité de matière $n = 1{,}00$ mol de dioxyde de carbone $CO_{2(g)}$ confiné dans un cylindre de volume $V = 2{,}00$ L et maintenu à une température constante $T = 300$ K.

1) Rappeler l'équation d'état du gaz parfait. En déduire la pression p_{GP} du gaz en supposant qu'il se comporte comme un gaz parfait.
2) Expliquer pourquoi l'équation des gaz parfaits peut être insuffisante pour décrire ce système.
3) L'équation d'état de VAN DER WAALS pour un nombre de moles de gaz n s'écrit :

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT$$

avec $a = 3{,}59\ \text{L}^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$ et $b = 0{,}0427\ \text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour le dioxyde de carbone.

Calculer la pression p_{VdW} du dioxyde de carbone à l'aide de cette équation.

4) Comparer les valeurs de pression obtenues à l'aide des deux modèles. Commenter alors le rôle des paramètres a et b.

Exercice 9 *Question ouverte*

Estimer le nombre de molécules de diazote et de dioxygène dans une salle de classe.

Corrections

Exercices d'application du cours

Exercice 1 *Équation d'état du gaz parfait*

Méthode

L'**équation d'état du gaz parfait** (aussi appelée « loi des gaz parfaits ») s'écrit :

$$pV = nRT$$

avec :

- p la pression en Pa ;
- V le volume en m^3 ;
- n la quantité de matière en mol ;
- $R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits ;
- T la température en K.

1) Par application de l'équation d'état du gaz parfait :

$$\boxed{n = \frac{p_{\text{atm}} V}{RT}}$$

Application numérique : $n = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \times 1{,}5 \cdot 10^{-3}}{8{,}314 \times (25 + 273{,}15)} = 6{,}1 \cdot 10^{-2}$ mol

2) Par application de l'équation d'état du gaz parfait :

$$\boxed{V = \frac{nRT}{p_{\text{atm}}}}$$

Application numérique : $V = \frac{1{,}0 \times 8{,}314 \times (100 + 273{,}15)}{1{,}013 \times 10^5} = 3{,}1 \cdot 10^{-2}$ m^3 = 31 L

Exercice 2 *Gaz parfait*

1) L'équation d'état du gaz parfait s'écrit :

$$pV = nRT$$

Appliquée aux deux situations, elle s'écrit :

situation n° 1	**situation n° 2**
$p_1 V = nRT_1$	$p_2 V = nRT_2$

Remarque

Les parois étant rigides, le volume est supposé inchangé entre les deux situations.

Ainsi :

$$p_2 = \frac{nR}{V} T_2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}}$$

Application numérique : $p_2 = 1{,}1 \cdot 10^5 \times \frac{10 + 273{,}15}{50 + 273{,}15} = 9{,}6 \cdot 10^4$ Pa

2) D'après l'équation d'état du gaz parfait dans la première situation :

$$\boxed{n = \frac{p_1 V}{RT_1}}$$

Application numérique : $n = \frac{1{,}1 \cdot 10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{8{,}314 \times (50 + 273{,}15)} = 8{,}2 \cdot 10^{-2}$ mol

Erreur classique

Il faut faire attention aux unités dans l'équation d'état du gaz parfait. V s'exprime en m^3, p en Pa et T en K.

Exercice 3 *Bombe aérosol*

1) La quantité de matière de diazote se calcule grâce à l'équation d'état du gaz parfait :

$$\boxed{n_{N_2} = \frac{pV}{RT}}$$

Application numérique : $n_{N_2} = \frac{4 \cdot 10^5 \times (300-100) \cdot 10^{-6}}{8{,}314 \times (20+273{,}15)} = 3{,}3 \cdot 10^{-2}$ mol

Pour obtenir la masse, il faut utiliser la masse molaire moléculaire du diazote N_2 :

$$\boxed{m_{N_2} = n_{N_2} M_{N_2}}$$

Application numérique : $m_{N_2} = 3{,}3 \cdot 10^{-2} \times 2 \times 14 = 0{,}92$ g

2) À 50 °C, l'équation d'état du gaz parfait permet de calculer la pression qui est telle que :

$$\boxed{p' = \frac{n_{N_2} R T'}{V}}$$

Application numérique : $p' = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-2} \times 8{,}314 \times (50+273{,}15)}{(300-200) \cdot 10^{-6}} = 4{,}4 \cdot 10^5$ Pa $= 4{,}4$ bar

Exercice 4 *Ballon de baudruche*

1) Dans le modèle du gaz parfait, les molécules sont considérées comme des particules ponctuelles et n'ont **aucune interaction** les unes avec les autres.

2) D'après l'équation d'état du gaz parfait à température ambiante :

$$pV_1 = nR\theta_1$$

D'après l'équation d'état du gaz parfait à la température θ_2 :

$$pV_2 = nR\theta_2$$

Ainsi, en combinant les deux équations, il vient :

$$\boxed{V_2 = V_1 \frac{\theta_2}{\theta_1}}$$

Application numérique : $V_2 = 2{,}0 \times \frac{35+273{,}15}{25+273{,}15} = 2{,}1$ L

3) Le modèle utilisé est largement critiquable. D'une part, la pression peut évoluer entre le début et la fin de l'expérience. D'autre part, le ballon ne peut s'étirer indéfiniment. La paroi du ballon exerce une force qui va mener à l'éclatement du ballon.

Exercices d'entraînement

Exercice 5 *Pression des pneumatiques*

1) L'équation d'état du gaz parfait donne, en hiver :

$$p_1 V = nRT_1$$

L'équation d'état du gaz parfait donne, en été :

$$p_2 V = nRT_2$$

Ainsi, en supposant que le volume des pneus est constant :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{donc} \quad \boxed{p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}}$$

Application numérique : $p_2 = 2{,}0 \times \frac{30+273{,}15}{0+273{,}15} = 2{,}2$ atm

2) La variation relative due au changement de température est donc de 10 %. Le pneu ne risque pas d'exploser mais une trop forte augmentation de température au delà de 30 °C pourrait être dangereuse.

Exercice 6 *Présence d'eau liquide*

1) L'attribution de chaque domaine est résumée dans le tableau suivant :

domaine	attribution
1	gaz
2	liquide
3	solide
4	fluide supercritique

2) **A** est le point triple. **B** est le point critique.

3) L'eau se trouve essentiellement sous forme **solide**.

4) Le tableau indique à la surface de Mars une pression de 600 hPa (donc 0,6 bar) et une température de −100 °C à 0 °C (soit entre 173,15 et 273,15 K). Sur le diagramme (p,T), cela correspond au domaine solide de l'eau.

Exercice 7 *Piston*

1) Le piston est soumis à trois forces :
   - son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -Mg\vec{e_z}$
   - la pression du gaz $\overrightarrow{F_{\text{p,gaz}}} = p_1 S\vec{e_z}$
   - la pression de l'air $\overrightarrow{F_{\text{p,air}}} = -p_{\text{atm}} S\vec{e_z}$

   À l'équilibre mécanique, la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système s'annule :

$$\vec{P} + \overrightarrow{F_{\text{p,gaz}}} + \overrightarrow{F_{\text{p,air}}} = \vec{0}$$

$$-Mg\vec{e_z} + p_1 S\vec{e_z} - p_{\text{atm}} S\vec{e_z} = \vec{0}$$

   En projetant selon l'axe Oz, il vient :

$$\boxed{p_1 = p_{\text{atm}} + \frac{Mg}{S}}$$

   Application numérique : $p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5 + \frac{10{,}0 \times 9{,}81}{100 \cdot 10^{-4}} = 1{,}11 \cdot 10^5$ Pa $= 1{,}11$ bar

2) Par définition, la masse volumique du gaz s'écrit :

$$\rho_1 = \frac{m_{\text{gaz}}}{V_{\text{gaz}}} = \frac{n_{\text{gaz}} M_{N_2}}{V_{\text{gaz}}}$$

   Or, l'équation d'état du gaz parfait donne :

$$p_1 V_{\text{gaz}} = n_{\text{gaz}} R T_1$$

   D'où finalement :

$$\boxed{\rho_1 = \frac{p_1 M_{N_2}}{R T_1}}$$

   Application numérique : $\rho_1 = \frac{1{,}11 \cdot 10^5 \times 28 \cdot 10^{-3}}{8{,}314 \times 300} = 1{,}25$ kg $\cdot$ m^{-3}

3) Le volume de la portion de cylindre remplie de diazote s'écrit :

$$V_{\text{cylindre}} = V_{\text{gaz}} = S \times h$$

   L'équation d'état du gaz parfait donne :

$$p_1 V_{\text{gaz}} = n R T_1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{n = \frac{p_1 S h}{R T_1}}$$

   Application numérique : $n = \frac{1{,}11 \cdot 10^5 \times 100 \cdot 10^{-4} \times 20 \cdot 10^{-2}}{8{,}314 \times 300} = 8{,}9 \cdot 10^{-2}$ mol

4) Après l'extension, l'équation d'état du gaz parfait s'écrit :

$$p_1 V'_{\text{gaz}} = nRT_1$$

La quantité de matière n n'a pas changé pendant l'expérience car le système est fermé. Le volume du cylindre est devenu $V'_{\text{cylindre}} = V'_{\text{gaz}} = Sh'$. Il vient :

$$\boxed{h'' = \frac{nRT_2}{p_1 S}}$$

Application numérique : $h'' = \frac{8{,}9\cdot10^{-2}\times8{,}314\times400}{1{,}11\cdot10^{5}\times100^{-4}} = 0{,}266\ \text{m} = 26{,}7\ \text{cm}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 *Gaz réel*

1) L'équation d'état du gaz parfait s'écrit :

$$p_{\text{GP}} V = nRT \qquad \text{donc} \qquad \boxed{p_{\text{GP}} = \frac{nRT}{V}}$$

Application numérique : $p_{\text{GP}} = \frac{1{,}00\times8{,}314\times300}{2{,}00\cdot10^{-3}} = 1{,}25\cdot10^{6}\ \text{Pa} = 12{,}5\ \text{bar}$

2) Le modèle du gaz parfait ne prend pas en compte les interactions entre les molécules de gaz. Ce modèle ne peut être appliqué lorsque les pressions deviennent trop importantes (ici, 12 bar est une pression très importante).

3) En utilisant l'équation de VAN DER WAALS :

$$\boxed{p = \frac{RT}{\frac{V}{n} - b} - \frac{an^2}{V^2}}$$

Application numérique : $p = \frac{8{,}314\times300}{\frac{2{,}0\cdot10^{-3}}{1{,}0} - 0{,}0427\cdot10^{-3}} - \frac{3{,}59\cdot10^{-1}\times1{,}0^2}{(2{,}0\cdot10^{-3})^2} = 1{,}18\cdot10^{6}\ \text{Pa} = 11{,}8\ \text{bar}$

4) L'équation de VAN DER WAALS donne une pression plus faible que celle du modèle du gaz parfait. Cela peut s'expliquer par l'effet du paramètre a qui représente les forces d'attraction intermoléculaires (les forces attirent les molécules les unes vers les autres ce qui diminue la pression exercée par les parois par rapport au gaz parfait) et le paramètre b qui représente le volume propre des molécules de gaz (ayant ici un effet inverse).

Exercice 9 *Question ouverte*

• *Hypothèses :*

L'air est supposé suivre le modèle du gaz parfait. Il est composé à 20 % de dioxygène et à 80 % de diazote. Les autres gaz sont négligés.

• *Volume d'une salle de classe :*

En prenant une salle de classe haute de 2,5 m, large de 6 m et longue de 10 m, son volume vaut :

$$V \approx 2{,}5 \times 6 \times 10 \approx 150 \text{ m}^3$$

• *Calcul du nombre de moles d'air :*

L'équation d'état du gaz parfait donne :

$$\boxed{n_{\text{air}} = \frac{pV}{RT}}$$

En prenant une température de 25 °C et la pression atmosphérique (1,013 bar) :

$$n_{\text{air}} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \times 150}{8{,}314 \times (25 + 273{,}15)} \approx 6000 \text{ mol}$$

Cela donne :

$$n_{\text{N}_2} = 0{,}8 \times n_{\text{air}} \approx 4800 \text{ mol} \qquad \text{et} \qquad n_{\text{O}_2} = 0{,}2 \times n_{\text{air}} \approx 1200 \text{ mol}$$

• *Conversion en molécules :*

Le nombre de molécule est donc :

$$\mathcal{N}_{\text{N}_2} = n_{\text{N}_2}\mathcal{N}_{\text{A}} = 4800{\cdot}6 \cdot 10^{23} \approx 3 \cdot 10^{27} \text{ molécules}$$

$$\mathcal{N}_{\text{O}_2} = n_{\text{O}_2}\mathcal{N}_{\text{A}} = 1200{\cdot}6 \cdot 10^{23} \approx 7 \cdot 10^{26} \text{ molécules}$$

Bilans d'énergie pour un système thermodynamique

2

Données pour l'ensemble des exercices

- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
- Les travaux autres que ceux des forces de pression sont supposés nuls : $W_{\text{pression}} = 0$

Exercices d'application du cours

Exercice 1 *Équation de la température d'un système*

Soit un système incompressible et indilatable à la température T en contact sur une surface S avec un thermostat de température T_{Th}. Ce thermostat est un fluide de capacité thermique à volume constant notée C et de coefficient de convection thermique h. L'ensemble est isolé.

1) Énoncer le premier principe de la thermodynamique de façon générale. Le simplifier pour ce système.

2) Exprimer le transfert thermique Q reçu par le système à l'aide de la loi de Newton en fonction de h, T, T_{th} et S.

3) Exprimer la variation infinitésimale d'énergie interne $\mathrm{d}U$ en fonction de la capacité thermique C.

4) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température T. La mettre sous forme canonique et identifier τ.

5) Résoudre l'équation sachant qu'initialement la température est notée T_0. Représenter graphiquement l'évolution de la température au cours du temps.

Exercice 2 *Travail reçu lors d'une évolution adiabatique*

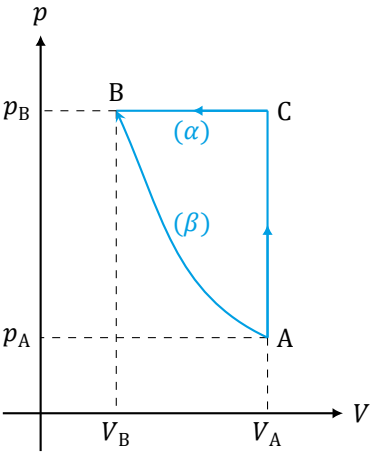
Une masse $m_0 = 1$ kg d'air, de masse molaire $M = 29{,}0\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, assimilé à un gaz parfait diatomique, subit une compression adiabatique qui fait évoluer sa température de $T_\text{i} = 293$ K à $T_\text{f} = 333$ K.

1) Rappeler ce qu'est une compression adiabatique.
2) Exprimer puis calculer le travail nécessaire à la compression en fonction notamment de m, M, T_i et T_f.

Exercice 3 *Transformations d'un gaz parfait*

Une quantité de matière n d'un gaz parfait passe d'un état d'équilibre $\text{A}(p_\text{A}, V_\text{A}, T_\text{A})$ à un autre état d'équilibre $B(p_\text{B} = 3p_\text{A}, V_\text{B}, T_\text{B})$ par deux transformations de chemins distincts :

- *transformation α :* isochore AC puis isobare CB ;
- *transformation β :* isotherme réversible AB.



1) Exprimer T_B en fonction de T_A, V_B et V_A.
2) Exprimer W_α, W_β, Q_α et Q_β les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz respectivement au cours des transformations α et β. Les comparer et interpréter.

Exercice 4 *Moteur thermique*

Cet exercice propose l'étude d'un moteur thermique qui fonctionne en régime permanent et dont le fluide caloporteur ne change pas d'état. Ce moteur est constitué d'une chaudière, d'une turbine et d'un condenseur. Le fluide est chauffé sans échange à pression constante dans la chaudière à 400 °C. Ensuite, il subit une transformation dans la turbine, puis est refroidi à pression constante dans le condenseur jusqu'à revenir à une température de 30 °C.

1) Exprimer le transfert thermique reçu par le fluide dans la chaudière, en fonction des enthalpies d'entrée et de sortie de la chaudière ainsi que de la masse m de fluide transporté.
2) Exprimer puis calculer le travail effectivement fourni par la turbine.
3) Établir le bilan énergétique en prenant en compte l'énergie reçue et l'énergie rejetée.

Données :
- Pression dans la chaudière : 10 MPa
- Température du fluide après la turbine : 30 °C
- Les enthalpies massiques de vaporisation et de condensation peuvent être négligées pour simplifier le problème.
- Le rendement de la turbine est de 90 %.

Exercices d'entraînement

Exercice 5 *Contact thermique entre deux solides*

Une masse $m_1 = 320$ g de fer à la température initiale $T_1 = 380$ K et une masse $m_2 = 250$ g d'aluminium à la température initiale $T_2 = 280$ K sont placées en contact dans une enceinte adiabatique.

Calculer la température finale T_f du système.

Données : capacités thermiques massiques à pression constante
- Fer solide : $c_{Fe} = 444\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Aluminium solide : $c_{Al} = 897\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Exercice 6 *Détente de Joule Gay-Lussac*

Un récipient est divisé en deux compartiments par une paroi fixe. Les parois du récipient sont calorifugées. Chaque compartiment a un volume $V = 1{,}00$ L. Dans l'état initial, le compartiment n° 1 est rempli par $n = 1{,}00$ mol de gaz considéré parfait, de coefficient adiabatique $\gamma = 1{,}66$ à une température $T_i = 27{,}0$ °C. Le compartiment n° 2 est vide.
À l'instant initial, un trou est percé dans la paroi pour que le gaz remplisse les deux compartiments. Un nouvel état d'équilibre est ensuite atteint.

1) Montrer que l'énergie interne du gaz reste constante lors de cette transformation.

La loi de Joule du gaz parfait relative à l'énergie interne stipule que cette dernière ne dépend que de la température du système. La conséquence sur la différentielle de U, notée $\mathrm{d}U$, est qu'elle peut s'exprimer comme :

$$\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$$

2) Calculer la température et la pression du gaz à l'état final.

Exercice 7 *Chauffage d'une chambre*

Une chambre est séparée de l'extérieur par des murs en béton. La température régnant à l'extérieur est supposée constante égale à $T_0 = 280$ K. La température $T(t)$ à l'intérieur du local et ses murs est supposée uniforme mais non constante. La puissance perdue par la pièce à cause des fuites thermiques est égale à $\mathcal{P}_{th} = \frac{T(t)-T_0}{R_{th}}$ avec $R_{th} = 2{,}00 \times 10^{-2}\ \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ la résistance thermique des parois. La pièce est chauffée par un radiateur délivrant une puissance $\mathcal{P} = 2{,}00$ kW.
La capacité thermique du système {local + murs} est $C = 1{,}50\ \text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}$. À $t = 0$, la température de la pièce vaut $T(0) = T_0$ et le radiateur est allumé à ce moment.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $T(t)$. La mettre sous forme canonique et identifier τ.
2) Déterminer $T(t)$ et décrire son allure.
3) Calculer la température dans la pièce une fois le régime stationnaire établi. Que faut-il faire pour que la température finale soit de 19 °C comme recommandé ?

Exercice 8 *Étude thermodynamique d'un moteur à piston*

Un moteur à piston fonctionne selon le cycle décrit ci-dessous, réalisé avec une quantité de matière fixée d'un gaz supposé parfait (notée n) :

1. *Compression isotherme* : le gaz initialement à $p_1 = 1{,}013$ bar est comprimé à température constante $T_1 = 300$ K, de $V_1 = 5{,}0$ L à $V_2 = 2{,}0$ L.
2. *Chauffage isochore* : le gaz est chauffé à volume constant jusqu'à $T_3 = 600$ K.
3. *Détente adiabatique* : le gaz se détend adiabatiquement jusqu'à ce V_1.
4. *Refroidissement à volume constant* : le gaz revient à son état initial (T_1).

Données :

- Capacité thermique molaire à volume constant : $C_{v,m} = 20{,}8\,\text{J·mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Rapport des capacités thermiques : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}4$

1) Compression isotherme
   a) Calculer la pression p_2 du gaz à la fin de la compression.
   b) Déterminer le travail $W_{1\to2}$ échangé au cours de cette étape.
   c) En déduire le transfert thermique échangé $Q_{1\to2}$.
2) Chauffage isochore

   Calculer la variation d'énergie interne $\Delta U_{2\to3}$ et le transfert thermique échangé $Q_{2\to3}$.
3) Détente adiabatique Pour cette transformation, la relation $pV^\gamma = \text{constant}$ est vérifiée.
   a) En déduire la pression p_4 et la température T_4 du gaz à la fin de la détente.
   b) Calculer le travail $W_{3\to4}$ échangé au cours de cette étape.
4) Refroidissement isochore

   Calculer le transfert thermique $Q_{4\to1}$ lors du retour à la température T_1.
5) Bilan énergétique
   a) Calculer le travail total W_{cycle} reçu par le système sur un cycle complet.
   b) En déduire le rendement thermodynamique $\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{2\to3}}$.

Données :

- Pour une transformation isotherme : $W_{i\to f} = -nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$
- Pour une transformation adiabatique : $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ et $pV^\gamma = \text{constante}$

Exercice 9 *Utilisation d'une bouteille thermos*

Une bouteille dite « isotherme » peut être considérée comme un calorimètre, c'est-à-dire un système de faible capacité thermique et pouvant pratiquement isoler thermiquement son contenu du milieu extérieur. On considère la bouteille thermos comme étant ouverte sur l'extérieur mais sans échange avec l'air.

l) Justifier la qualification de monobare pour une transformation ayant lieu dans un calorimètre.

2) Montrer que pour un système subissant une telle transformation $\Delta H = Q$.

Une masse $m = 580$ g d'eau est placée dans une bouteille dite « isotherme ». Une fois l'équilibre thermique établi, la température est mesurée et vaut $\theta_1 = 20{,}0$ °C. Une autre masse $m = 580$ g d'eau est ensuite ajoutée dans la bouteille à $\theta_2 = 80{,}0$°C. Un nouvel état d'équilibre est atteint et la température mesurée vaut $\theta_{\text{éq}} = 49{,}0$ °C. Les manipulations sont réalisées suffisamment vite pour que les pertes thermiques soient négligées.

3) Exprimer la température $\theta_{\text{éq},0}$ si la capacité thermique de la bouteille était nulle.

4) Déterminer la valeur de la capacité thermique C_t de la bouteille utilisée.

5) Il est indiqué sur la notice fournie par le constructeur du calorimètre que la masse équivalente en eau de la bouteille et de ses accessoires est $m_c = 40$ g. Commenter cette valeur numérique.

En attendant plus longtemps, la température $\theta(t)$ du calorimètre varie au cours du temps. Cette variation s'interprète par des pertes thermiques à travers la surface de la bouteille.
Ces pertes thermiques sont modélisées par une puissance thermique perdue par la bouteille exprimée comme :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = kS\big(\theta(t) - \theta_{\text{ext}}\big)$$

où k est une constante positive et S désigne l'aire de la surface extérieure de la bouteille au contact avec la pièce de température $\theta_{\text{ext}} = 20$ °C.
Pour simplifier, le système constitué de la bouteille et de tout ce qu'elle contient est considéré homogène, à la température $\theta(t)$ et sa capacité thermique (supposée constante) est notée C.

6) Commenter le signe de $\mathcal{P}_{\text{th}}$ quand la température de la pièce est inférieure à celle de l'intérieur de la bouteille.

7) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $\theta(t)$. Mettre cette équation sous forme canonique en exprimant une constante de temps τ en fonction de k, S et C.

8) Résoudre cette équation différentielle sachant qu'à l'instant initial la température à l'intérieur de la bouteille est de 60 °C.

9) La variation de température mesurée au bout du temps $t = 10$ min vaut $\Delta\theta = -1$ °C. Calculer la valeur de τ.

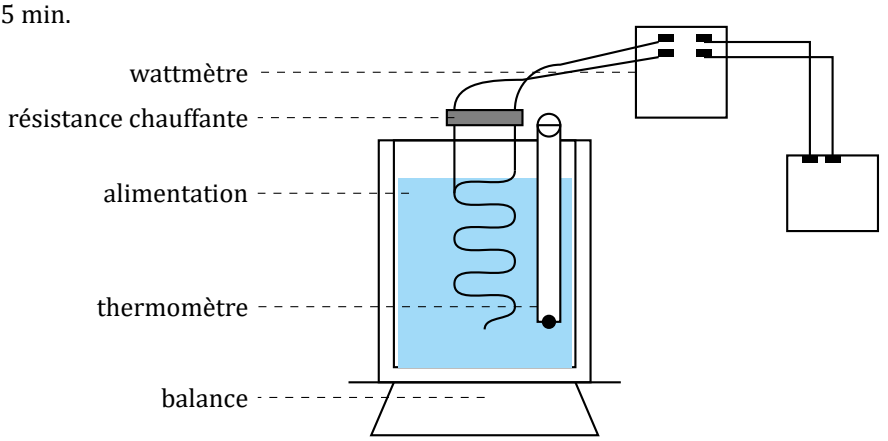
Données :
Capacité thermique massique de l'eau liquide à pression constante : $c_{\text{eau}} = 4{,}18\,\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

D'après écrits Agro-Véto TB

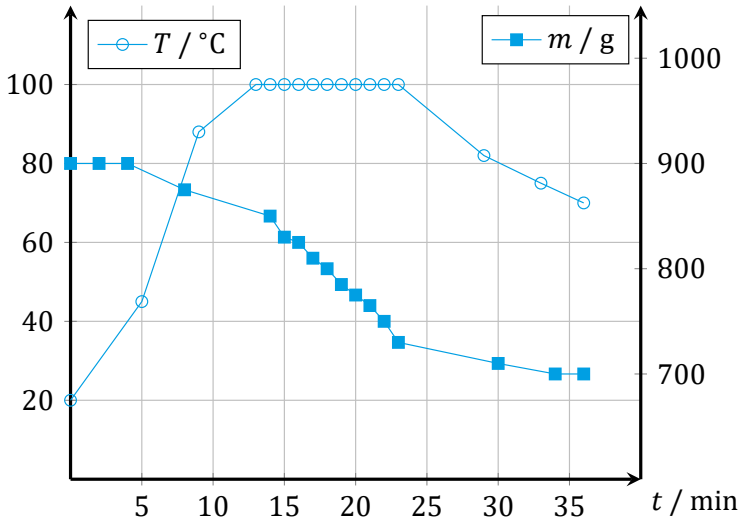
Exercices d'approfondissement

Exercice 10 *Question ouverte*

Un vase de DEWAR contenant environ 1 L d'eau est placé sur une balance. Un thermomètre y est plongé ainsi qu'une résistance chauffante (du type de celles que l'on trouve dans les bouilloires électriques). Celle-ci est alimenté avec une forte puissance ($\mathcal{P} = 502$ W), pendant 25 min.



L'alimentation est branchée à la date $t = 0$. La température et la masse d'eau sont mesurées à intervalles de temps réguliers (la balance ayant été tarée en l'absence d'eau).
Le graphique suivant est obtenu.

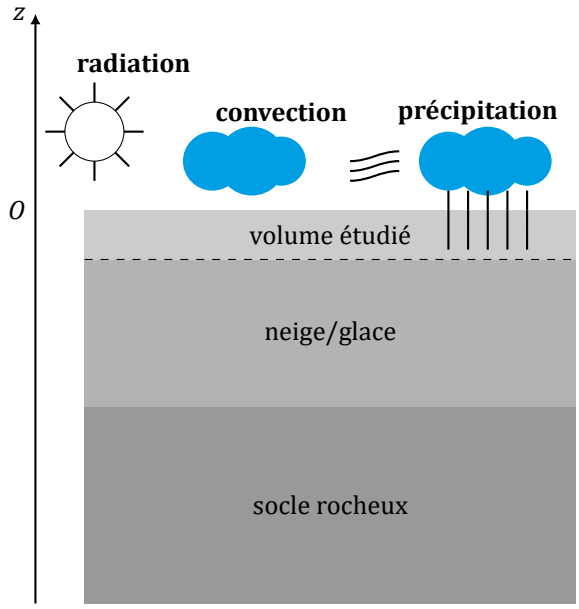


À l'aide du diagramme, déterminer la capacité thermique massique de l'eau liquide ainsi que son enthalpie massique de vaporisation.

D'après oral Banque PT

Exercice 11 *Bilan thermique d'un glacier*

Les glaciers, de par leur faible inertie de réponse aux changements climatiques, sont des outils de choix pour comprendre l'augmentation globale de température observée depuis le XIXe siècle. La relation entre l'évolution des glaciers et la variabilité climatique repose en partie sur une étude du bilan d'énergie de surface du glacier. Pour effectuer ce bilan, on considère le volume compris entre la surface et une profondeur à partir de laquelle il n'existe plus de flux radiatifs significatifs comme l'indique la figure ci-dessous.



Le but de l'exercice est d'effectuer un bilan en termes de flux surfacique pour déterminer Φ, l'énergie stockée par unité de surface et de temps du volume étudié. L'énergie stockée a pour effet d'augmenter la température de la glace jusqu'à induire sa fonte.
Le bilan fait intervenir les flux suivants (chaque flux est positif s'il est reçu par la surface et négatif s'il est cédé par la surface) :

- Des flux surfaciques radiatifs arrivant « in » et partant « out » de la surface notés SW_{in} et SW_{out} pour les radiations de courtes longueurs d'onde (*Short Waves* de longueur d'onde comprise entre 0,15 et 3 µm) et LW_{in} et LW_{out} (*Long Waves*) pour les radiations de grandes longueurs d'onde (de 3 à 100 µm).
- Des flux surfaciques de convection : LE le flux turbulent de chaleur latente (permet à la neige de se sublimer une fois au sol ; il dépend de la vitesse du vent, de l'humidité mais aussi de la densité de l'air et de la chaleur latente de sublimation) et H le flux turbulent sensible (permet à la neige déposée de changer de température ; il dépend de la densité de l'air, de la capacité thermique massique à pression constante de l'air mais aussi de la vitesse du vent et de la température de la neige).
- Du flux surfacique P induit par les précipitations.

• Du flux surfacique conductif G dans la neige/glace.

Seuls les flux verticaux par rapport au volume de glace étudié, supposé horizontal, sont étudiés. On se place en géométrie axiale d'axe Oz.

Document n° 1 : la loi de Wien

Un corps noir de température absolue T émet un rayonnement thermique. La loi de Wien donne la longueur d'onde pour laquelle l'*émittance* (puissance émise par unité de surface du corps noir et par unité de longueur d'onde) est maximale à la température T du corps noir

$$\boxed{\lambda_{\text{max}} = \frac{\alpha}{T}}$$

avec $\alpha = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ m · K.

Document n° 2 : la loi de Stefan-Boltzmann

La loi de Stefan-Boltzmann donne l'expression de la puissance surfacique rayonnée (émittance énergétique totale, prenant en compte toutes les longueurs d'onde) :

$$\boxed{\Phi_{\text{th}}(T) = \sigma T^4}$$

avec $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4}, la constante de Stefan-Boltzmann.

1) Expliquer ce qui distingue les transferts thermiques par conduction ou convection des transferts thermiques par rayonnement. Expliquer ce qui distingue les transferts thermiques par conduction des transferts thermiques par convection.
2) Justifier, par un calcul de longueur d'onde en µm, que les radiations courtes longueurs d'onde sont dues au Soleil (température moyenne $T_{\text{Soleil}} = 5778$ K) alors que les radiations grandes longueurs d'onde sont dues au système terrestre (température moyenne $T_{\text{Terre}} = 300$ K).
3) Calculer le flux radiatif LW_{out} dans le cas où la neige/glace se comporte comme un corps noir de température égale à $-2{,}6$ °C.
4) Exprimer R, le flux radiatif global, en fonction de SW_{in}, SW_{out}, LW_{in} et LW_{out}.
5) Le flux surfacique P apporté par les précipitations (entre l'eau et le glacier) suit une loi de type loi de Newton. Exprimer P en fonction du coefficient de transfert thermique h, de la température de la neige qui tombe T_n et de la température de la surface du glacier T_{surf} dans le cas $T_n > T_{\text{surf}}$.

D'après écrits G2E BCPST

Corrections

Exercices d'application du cours

Exercice 1 *Équation de la température d'un système*

1) Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \delta W + \delta Q$$
$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$
$$\boxed{\mathrm{d}U = \delta Q}$$

système au repos macroscopique
variations de volumes nulles car système incompressible et indilatable et travail des forces de pression nul

Remarque
La forme globale correspondante s'écrit alors $\Delta U = Q$.

2) Le transfert thermique reçu par le système avec un thermostat extérieur s'exprime comme :

$$\boxed{\delta Q = -\Phi_{\text{syst}\to\text{th}}\mathrm{d}t = -h\,(T - T_{\text{Th}})\,S\mathrm{d}t}$$

avec S la surface de contact et h le coefficient de convection thermique.

3) La variation d'énergie interne s'écrit $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T$.

4) Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors :

$$C\mathrm{d}T = -h(T - T_{\text{Th}})S\mathrm{d}t$$

Sous forme canonique, on a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_{\text{Th}}}{\tau}} \quad \text{en posant} \quad \boxed{\tau = \frac{C}{hS}}$$

τ correspond effectivement à une durée car

- $[C] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$;
- $[h] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$;
- $[S] = \mathrm{L}^2$

Remarque
Une autre façon d'établir cette équation est d'écrire le premier principe de la thermodynamique enthalpique avec aucun autre travail.

5) Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre constant. La solution est donc de la forme :

$$T(t) = T_h(t) + T_p$$

avec $T_h(t)$ la solution de l'équation homogène et T_p la solution particulière (constante).

- Solution de l'équation homogène
  $T_h(t)$ est solution de l'équation sans second membre suivante :

$$\frac{\mathrm{d}T_h}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{T_h(t)}{\tau} = 0 \qquad \text{donc} \qquad T_h = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

  où A est une constante d'intégration et τ la constante de temps.

- Solution particulière
  T_p est **constante** car le second membre l'est. En l'injectant dans l'équation différentielle, il vient :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}T_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{T_p}{\tau} = \frac{T_{\mathrm{Th}}}{\tau} \qquad \text{d'où} \qquad T_p = T_{\mathrm{th}}$$

  L'équation a donc pour solution :

$$T(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{\mathrm{Th}}$$

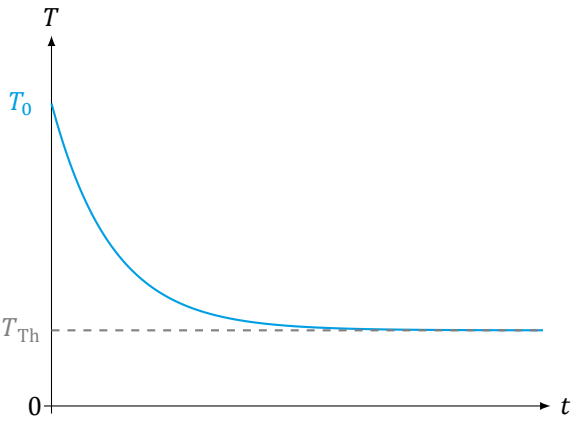
- Expression de la constante d'intégration
  Pour déterminer la valeur de A, il faut utiliser la condition initiale. À $t = 0, T(t = 0) = T_0$ d'où :

$$\underbrace{T(t=0)}_{=T_0} = A + T_{\mathrm{Th}} \qquad \text{donc} \qquad A = T_0 - T_{\mathrm{Th}}$$

- Solution de l'équation

$$\boxed{T(t) = (T_0 - T_{\mathrm{Th}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_{\mathrm{Th}}}$$

La température T du système tend vers celle T_{Th} du thermostat avec lequel il est en contact.



Exercice 2 *Travail reçu lors d'une évolution adiabatique*

1) La **compression adiabatique** est une **augmentation de pression** sans transfert thermique entre le système considéré et le milieu extérieur ($Q_{\text{adia}} = 0$).

2) Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + Q \\ \Delta U &= W \\ nC_{\text{v,m}}\Delta T &= W \\ n \times \frac{5}{2} R\,(T_{\text{f}} - T_{\text{i}}) &= W \end{aligned}$$

transformation adiabatique

$\Delta U = C_{\text{v}}\Delta T$ pour le gaz parfait

gaz diatomique supposé parfait

Par conséquent :

$$\boxed{W = \frac{m}{M} \cdot \frac{5R}{2}\,(T_{\text{f}} - T_{\text{i}})}$$

Application numérique : $W = \frac{1}{29 \cdot 10^{-3}} \times \frac{5 \times 8{,}314}{2} \times (333 - 293) = 28{,}7$ kJ

Erreur classique

La masse molaire est souvent fournie en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ alors que l'unité du système international de la masse est le kilogramme. Il faut donc la convertir en $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Exercice 3 *Transformations d'un gaz parfait*

1) La transformation β étant isotherme, il vient directement :

$$\boxed{T_{\text{B}} = T_{\text{A}}}$$

L'équation d'état du gaz parfait donne :

$$p_{\text{A}}V_{\text{A}} = nRT_{\text{A}} \qquad \text{et} \qquad p_{\text{B}}V_{B} = nRT_{\text{B}}$$

Comme $T_{\text{A}} = T_{\text{B}}$, on a :

$$p_{\text{B}}V_{\text{B}} = p_{\text{A}}V_{\text{A}}$$

De plus $p_{\text{B}} = 3p_{\text{A}}$,

$$\boxed{V_{\text{B}} = \frac{V_{\text{A}}}{3}}$$

2) Le calcul des termes d'échange diffère selon le type de transformation.

- Transformation α

  La transformation AC est **isochore**, donc $W_{\alpha,\text{AC}} = 0$. La transformation CB est **isobare**, donc $W_{\alpha,\text{CB}} = -p_{\text{B}}(V_{\text{B}} - V_{\text{A}})$, soit :

$$W_{\alpha,\text{CB}} = 2p_{\text{B}}V_{\text{A}}$$

CORRECTIONS

W étant une grandeur extensive :

$$W_\alpha = W_{\alpha,\mathrm{AC}} + W_{\alpha,\mathrm{CB}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{W_\alpha = 2p_A V_A}$$

Comme $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$, $\Delta U_\mathrm{AB} = 0$. D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$Q_\alpha = \Delta U_\mathrm{AB} - W_\alpha = -W_\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q_\alpha = -2p_\mathrm{A}V_\mathrm{A}}$$

- Transformation β

Sur une **isotherme réversible**, $P\mathrm{ext} = P$ et grâce à l'équation d'état du gaz parfait, le travail W_β s'écrit :

$$W_\beta = -\int_{V_\mathrm{A}}^{V_\mathrm{B}} p\mathrm{d}V = -\int_{V_\mathrm{A}}^{V_\mathrm{B}} \frac{nRT_\mathrm{A}}{V}\mathrm{d}V = -nRT_\mathrm{A}\int_{V_\mathrm{A}}^{V_\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

Ainsi :

$$W_\beta = -nRT_\mathrm{A}\ln\left(\frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{A}}\right) = -nRT_\mathrm{A}\ln\left(\frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\right)$$

$$\boxed{W_\beta = p_A V_A \ln(3)}$$

D'après le premier principe de la thermodynamique et comme $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$:

$$Q_\beta = \underbrace{\Delta U_\mathrm{AB}}_{=0} - W_\beta$$

Ainsi :

$$\boxed{Q_\beta = -p_A V_A \ln(3)}$$

Remarque

Contrairement à Q et W, l'énergie interne est une fonction d'état donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi :

$$\Delta U_\alpha = \Delta U_\beta = 0$$

car $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$.

Exercice 4 *Moteur thermique*

1) À pression constante, on a $\Delta H = Q$. Le transfert thermique reçu par le fluide dans la chaudière s'écrit :

$$Q_\mathrm{chaud} = m\left(h_{\mathrm{chaud,\ sortie}} - h_{\mathrm{chaud,\ entrée}}\right)$$

avec :

- m la masse du fluide ;
- $h_{\mathrm{chaud,\ entrée}}$ est l'enthalpie du fluide à l'entrée du système ;
- $h_{\mathrm{chaud,\ sortie}}$ est l'enthalpie à la sortie de la chaudière (400 °C, 10 MPa).

2) Le travail théorique maximum fourni par la turbine s'écrit :

$$W_{\text{turb, théo}} = -m\left(h_{\text{turb, sortie}} - h_{\text{turb, entrée}}\right)$$

Par définition du rendement de la turbine η, le travail réel est donné par :

$$W_{\text{turb, réel}} = \eta W_{\text{turb, théo}}$$

où $\eta = 0{,}90$ est le rendement de la turbine.

3) Le bilan d'énergie totale pour ce moteur thermique s'écrit :

$$\Delta U = Q_{\text{chaud}} + W_{\text{chaud}} + Q_{\text{turb}} + W_{\text{turb, réel}} + Q_{\text{cond}} + W_{\text{cond}} = 0$$

La pression constante dans la chaudière et le condensateur ainsi que la transfromation isentropique permettent de simplifier cette relation. On a donc :

$$Q_{\text{chaud}} - W_{\text{trub, réel}} = Q_{\text{cond}}$$

Le travail fourni par la turbine est équivalent à l'énergie reçue par le fluide dans la chaudière moins l'énergie perdue sous forme de chaleur rejetée dans le condenseur.

Exercices d'entraînement

Exercice 5 *Contact thermique entre deux solides*

Le premier principe appliqué à l'ensemble des deux solides au repos macroscopique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + Q \\ \Delta U &= 0 \\ m_1 c_{\text{Fe}}\left(T_{\text{f}} - T_1\right) + m_2 c_{\text{Al}}\left(T_{\text{f}} - T_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

enceinte calorifugé et solides indéformables

$\Delta U = C\Delta T$

La température finale du système s'écrit donc :

$$\boxed{T_{\text{f}} = \frac{m_1 c_{\text{Fe}} T_1 + m_2 c_{\text{Al}} T_2}{m_1 c_{\text{Fe}} + m_2 c_{\text{Al}}}}$$

Application numérique : $T_{\text{f}} = \frac{320{\cdot}10^{-3}\times 444\times 380 + 250{\cdot}10^{-3}\times 897\times 280}{320{\cdot}10^{-3}\times 444 + 250{\cdot}10^{-3}\times 897} = 319\ \text{K}$

Exercice 6 *Détente de Joule Gay-Lussac*

1) Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système {compartiment n° 1 + compartiment n° 2} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \delta W + \delta Q \\ \mathrm{d}U &= 0 \\ \mathrm{d}U_{\text{gaz}} + \mathrm{d}U_{\text{vide}} &= 0 \end{aligned}$$

parois calorifugées et indéformables

extensivité de l'énergie interne

CORRECTIONS

Comme **l'énergie interne du vide est nulle**, l'énergie interne du gaz ne varie pas pendant la transformation.

$$\boxed{\mathrm{d}U_{\text{gaz}} = 0}$$

2) Un gaz parfait suit la première loi de JOULE donc sa variation d'énergie interne s'écrit :

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{A}} = C_V \mathrm{d}T \qquad \text{ou encore} \qquad \Delta U_A = C_V \Delta T = 0$$

La température d'un gaz parfait ne varie donc pas au cours d'une détente de JOULE-GAY-LUSSAC :

$$\boxed{T_{\mathrm{f}} = T_{\mathrm{i}}}$$

Application numérique : $T_{\mathrm{f}} = 300$ K

La loi des gaz parfaits permet de calculer la pression :

$$\boxed{p_{\mathrm{f}} = \frac{nRT_{\mathrm{f}}}{V_{\mathrm{f}}}}$$

Application numérique : $p_f = \frac{1{,}00 \times 8{,}314 \times 300}{2{,}00 \times 10^{-3}} = 12{,}5$ bar

Exercice 7 *Chauffage d'une chambre*

1) Le bilan entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit : $\Delta U = c\mathrm{d}T = \mathcal{P}\mathrm{d}t - \mathcal{P}_{\text{th}}\mathrm{d}t$. La variation de la température $T(t)$ dans le local est régie par l'équation différentielle suivante, où la puissance thermique nette est convertie en variation d'énergie thermique du système :

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_{\text{th}}$$

D'après l'expression de la puissance thermique perdue $\mathcal{P}_{\text{th}}$ fournie dans l'énoncé, l'équation différentielle s'écrit :

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) = \mathcal{P} - \frac{T(t) - T_0}{R_{\text{th}}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{T(t)}{CR_{\text{th}}} = \frac{T_0}{CR_{\text{th}}} + \frac{\mathcal{P}}{C}$$

Sous forme canonique, cette équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \tau = CR_{\text{th}} \qquad \text{et} \qquad T_\infty = T_0 + \mathcal{P} \times R_{\text{th}}$$

2) La solution est donc de la forme :

$$T(t) = T_h(t) + T_p$$

avec $T_h(t)$ la solution de l'équation homogène et T_p la solution particulière (constante).

- Solution de l'équation homogène

  $T_h(t)$ est solution de l'équation sans second membre suivante :

$$\frac{\mathrm{d}T_h}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{T_h(t)}{\tau} = 0 \qquad \text{donc} \qquad T_h = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

  où A est une constante d'intégration et τ la constante de temps.

- Solution particulière

  T_p est **constante** car le second membre de l'équation l'est. En l'injectant dans l'équation différentielle, il vient :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}T_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{T_p}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau} \qquad \text{d'où} \qquad T_p = T_\infty$$

  L'équation a donc pour solution :

$$T(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_\infty$$

- Expression de la constante d'intégration

  Pour déterminer la valeur de A, il faut utiliser les conditions initiales.
  À $t = 0$, $T(t = 0) = T_0$ d'où :

$$\underbrace{T(t=0)}_{=T_0} = A + T_\infty \qquad \text{donc} \qquad A = T_0 - T_\infty$$

- Solution de l'équation

$$\boxed{T(t) = (T_0 - T_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_\infty}$$

Les applications numériques donnent :

$$T_\infty = 280 + (2{,}00 \times 10^{-2}) \times 2000 = 320 \text{ K}$$

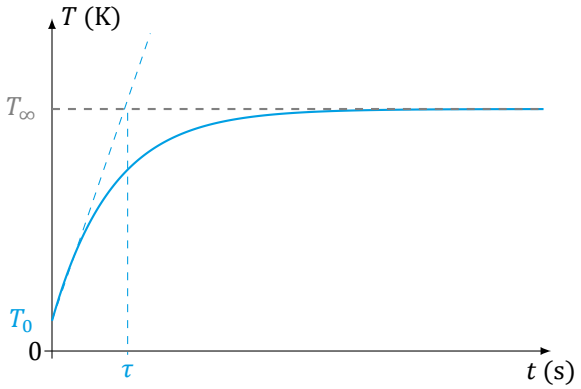
et :

$$\tau = 1{,}50 \times 10^3 \times 2{,}00 \cdot 10^{-2} = 30 \text{ s}$$

La solution est donc

$$T(t) = 320 - 40e^{-t/30}$$

La température suit une évolution exponentielle vers la valeur asymptotique $T_\infty = 320$ K avec une constante de temps $\tau = 30$ s. Elle croît rapidement au début, puis tend vers T_∞.



3) En régime stationnaire ($t \to \infty$), la température atteint la valeur limite :

$$T_\infty = T_0 + R\mathcal{P} = 320 \text{ K}$$

Pour augmenter ou diminuer la température de la pièce, il faut ajuster la puissance du radiateur $\mathcal{P}$ selon la relation :

$$T_\infty = T_0 + R\mathcal{P}$$

- Pour augmenter la température, il faut augmenter $\mathcal{P}$.
- Pour diminuer la température, il faut diminuer $\mathcal{P}$.

Exercice 8 *Étude thermodynamique d'un moteur à piston*

1) Compression isotherme

a) L'équation d'état du gaz parfait pour une transformation isotherme implique $pV =$ constante. Ainsi :

$$p_1V_1 = p_2V_2 \qquad \text{donc} \qquad p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2}$$

Application numérique : $p_2 = 1{,}013 \times \frac{5}{2} = 2{,}5$ bar

b) Pour une transformation isotherme, le travail est donné par $W_{i\to f} = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ (*cf.* exercice 3) avec $n = \frac{p_1V_1}{RT_1}$ d'après l'équation d'état du gaz parfait appliqué à l'état 1, il vient :

$$\boxed{W_{1\to2} = -p_1V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Application numérique : $W = -1{,}013 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} \times \ln\left(\frac{2{,}0}{5{,}0}\right) = 464$ J

c) Pour une transformation isotherme et un gaz parfait, le premier principe de la thermodynamique donne $\Delta U = C_V \mathrm{d}T = 0$, donc :

$$\boxed{Q_{1\to2} = -W_{1\to2}}$$

Application numérique : $Q_{1\to2} = -464$ J

2) Chauffage isochore

À volume constant, les travaux des forces de pression sont nuls ($W_{3\to3} = 0$) donc d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = Q$$

avec :

$$\Delta U_{2\to3} = nC_{v,m}\Delta T \qquad \text{donc} \qquad \boxed{Q_{2\to3} = nC_{v,m}\,(T_3 - T_2)}$$

De plus $T_2 = T_1 = 300$ K car le fluide a subi précédemment une compression isotherme.
Application numérique : $Q_{2\to3} = 0{,}203 \times 20{,}8 \times (600 - 300) = 1264{,}7$ J

3) Détente adiabatique

a) Pour une transformation adiabatique : $pV^\gamma = \text{cte}$ et pour un gaz parfait $pV = nRT$, donc $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$.

Soit

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

avec $V_3 = V_2$ car la transformation 2 est isochore. Ainsi :

$$\boxed{T_4 = T_3\left(\frac{V_2}{V_4}\right)^{\gamma-1}}$$

Application numérique : $T_4 = 600 \times \left(\frac{2{,}0}{5{,}0}\right)^{1{,}4-1} = 472$ K

Pour la pression, grâce à la loi du gaz parfait :

$$\boxed{p_4 = p_3 \cdot \frac{T_4}{T_3}}$$

Application numérique : $p_3 = 2{,}5 \times \frac{472}{600} = 1{,}97$ bar

b) D'après le premier principe de la thermodynamique, le travail pour une transformation adiabatique s'écrit :

$$W_{3\to4} = \Delta U_{3\to4} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{W_{3\to4} = nC_{v,m}(T_4 - T_3)}$$

Application numérique : $W_{3\to4} = 0{,}203 \times 20{,}8 \times (472 - 600) = -541$ J

$W_{3\to4} < 0$ ce qui est cohérent car la transformation est une détente.

4) Refroidissement isochore

À volume constant, $W_{4\to1} = 0$ donc le premier principe donne $\Delta U = Q$. Il vient donc :

$$\boxed{Q_{4\to1} = nC_{v,m}(T_4 - T_1)}$$

Application numérique : $Q_{4\to1} = 0{,}203 \times 20{,}8 \times (472 - 300) = 729{,}7$ J

5) Bilan énergétique

a) Le travail total est la somme de tous les travaux :

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = W_{1\to2} + \cancel{W_{2\to3}} + W_{3\to4} + \cancel{W_{4\to1}}}$$

Application numérique : $W_{\text{cycle}} = 464 - 541 = -77$ J

b) Le rendement est donné par :

$$\boxed{\eta = \left|\frac{\mathcal{E}_{\text{utile}}}{\mathcal{E}_{\text{couteuse}}}\right| = \left|\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{2\to3}}\right|}$$

Application numérique : $\eta = -\frac{-77}{1265} = 0{,}06$

Exercice 9 *Utilisation d'une bouteille thermos*

1) Une transformation est dite **monobare** si elle se déroule à **pression extérieure constante**. Dans un calorimètre, le système est **isolé thermiquement**, mais reste en contact avec l'atmosphère extérieure à travers la paroi souple ou ouverte au-dessus du liquide. La pression reste donc constante, égale à la pression atmosphérique.

2) Le premier principe pour une transformation globale s'écrit :

$$\Delta\mathcal{E} = W + Q$$
$$\Delta U = W + Q \quad \text{(système au repos macroscopique)}$$
$$U_f - U_i = -p_{ext}(V_f - V_i) + Q \quad \text{(forces de pressions seulement et monobare)}$$
$$U_f - U_i = -p_f V_f + p_i V_i + Q \quad (p_f = p_i = p_{ext})$$
$$Q = U_f + p_f V_f - (U_i + p_i V_i) \quad H = U + pV$$
$$Q = H_f - H_i$$

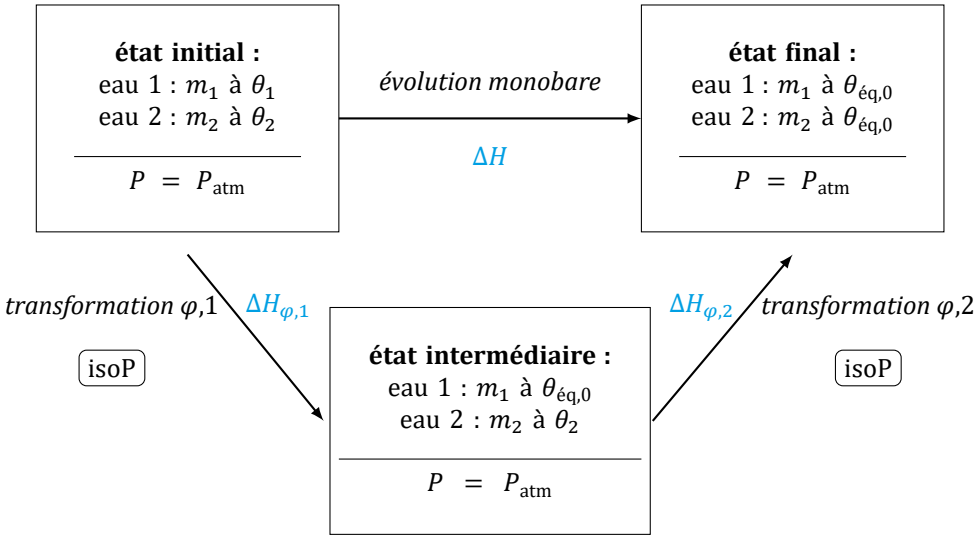
Ainsi, l'expression du premier principe de la thermodynamique en évolution monobare (avec équilibre de pression entre les états initial et final), sans autres travaux que ceux des forces pressantes, s'écrit :

$$\boxed{\Delta H = Q}$$

3) D'après la question précédente, le premier principe en évolution adiabatique se résume à une variation d'enthalpie nulle pour le système.

$$\Delta H = 0$$

Or, l'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi. Si la capacité thermique de la bouteille est négligeable, seule l'eau intervient dans les échanges thermiques et le cycle suivant permet de décomposer la transformation.



$$\Delta H = \Delta H_{\varphi,1} + \Delta H_{\varphi,2} = 0$$

En utilisant la relation $\Delta H = C_P \Delta T = m c_{p,m} \Delta T$:

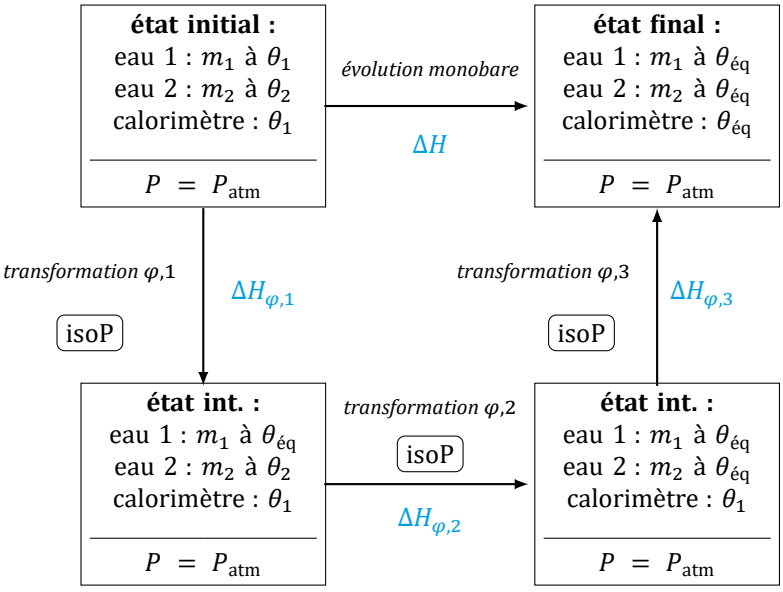
$$m_1 c_{\text{eau}} \left(\theta_{\text{éq},0} - \theta_1\right) + m_2 c_{\text{eau}} \left(\theta_{\text{éq},0} - \theta_2\right) = 0$$

À l'équilibre, le transfert thermique cédé par l'eau chaude est égal au transfert thermique absorbé par l'eau froide. Sachant que les masses sont égales, $m_1 = m_2 = m$, il vient :

$$\boxed{\theta_{\text{éq},0} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

Application numérique : $\theta_{\text{éq},0} = \frac{20+80}{2} = 50\ °\text{C}$

4) Lorsque la capacité thermique de la bouteille C_t est prise en compte, le transfert thermique absorbé par la bouteille doit être ajouté.



L'application du premier principe donne toujours $\Delta H = 0$ en évolution adiabatique. En revanche cette fois la variation d'enthalpie prend en compte le terme supplémentaire :

$$m_1 c_{\text{eau}} \left(\theta_{\text{éq}} - \theta_1\right) + m_2 c_{\text{eau}} \left(\theta_{\text{éq}} - \theta_2\right) + C_t \left(\theta_{\text{éq}} - \theta_1\right) = 0$$

En prenant en compte le fait que $m_1 = m_2 = m$, la capacité thermique à pression constante du calorimètre s'écrit donc :

$$\boxed{C_t = m c_{\text{eau}} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_{\text{éq}}}{\theta_{\text{éq}} - \theta_1}}$$

Application numérique : $C_t = 580 \times 10^{-3} \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 \times \frac{20-2\times49+80}{49-20} = 167{,}2\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

5) La capacité thermique de la bouteille peut être comparée à celle d'une masse d'eau équivalente m_c, où $C_t = m_c c_{\text{eau}}$. En inversant cette relation :

$$\boxed{m_c = \frac{C_t}{c_{\text{eau}}}}$$

Application numérique : $m_c = \frac{167{,}2}{4{,}18 \cdot 10^3} = 0{,}0400 \text{ kg} = 40{,}0 \text{ g}$

Cette valeur est cohérente avec la valeur fournie par le constructeur, $m_c = 40$ g. Cela indique que les accessoires du calorimètre et la bouteille contribuent à une capacité thermique équivalente à environ 40 g d'eau et que celle-ci est négligeable pour toute masse d'eau totale grande devant 40 g.

6) Si $\theta(t) > \theta_{\text{ext}}$, alors la puissance thermique perdue par la bouteille est positive $\mathcal{P}_{\text{th}} > 0$. Cela est cohérent avec le fait que le transfert thermique s'effectue alors de la bouteille vers l'extérieur.

7) Comme $\theta(t)$ varie, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \delta Q \\ C\mathrm{d}\theta &= -\mathcal{P}_{\text{th}}\mathrm{d}t \\ C\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -kS\left(\theta - \theta_{\text{ext}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\theta(t)}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau}} \qquad \text{en posant} \qquad \boxed{\tau = \frac{C}{kS}}$$

8) La solution est donc de la forme :

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p$$

avec $\theta_h(t)$ la solution de l'équation homogène et θ_p la solution particulière (constante).

- Solution de l'équation homogène

  $\theta_h(t)$ est solution de l'équation sans second membre suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\theta_h(t)}{\tau} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \theta_h = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

  où A est une constante d'intégration et τ la constante de temps.

- Solution particulière

  θ_p est **constante** car le second membre de l'équation est constant. En l'injectant dans l'équation différentielle, il vient :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\theta_p}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{\theta_p}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau} \qquad \text{d'où} \qquad \theta_p = \theta_{\text{ext}}$$

  kS correspond à la puissance perdue.

L'équation a donc pour solution :

$$\theta(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \theta_{\text{ext}}$$

- Expression de la constante d'intégration
  Pour déterminer la valeur de A, il faut utiliser la condition initiale.
  À $t = 0$, $\theta(t = 0) = \theta_0 = 60$ °C d'où :

$$\underbrace{\theta(t = 0)}_{=\theta_0} = A + \theta_{\text{ext}} \qquad \text{donc} \qquad A = \theta_0 - \theta_{\text{ext}}$$

- Solution de l'équation

$$\boxed{\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{ext}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \theta_{\text{ext}}}$$

9) Pour $t_1 = 10$ min, $\Delta\theta = \theta(t_1) - \theta_0 = -1$ °C. Grâce à la solution de l'équation différentielle :

$$\theta(t_1) = \theta_1 = (\theta_0 - \theta_{\text{ext}})\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \theta_{\text{ext}}$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}} = \mathrm{e}^{-t_1/\tau}$$

$$\ln\left(\frac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}\right) = -\frac{t_1}{\tau}$$

$$\tau = \frac{t_1}{\ln\left(\frac{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}\right)}$$

$$\boxed{\tau = \frac{t_1}{\ln\left(\frac{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 + \Delta\theta - \theta_{\text{ext}}}\right)}}$$

Application numérique : $\tau = \dfrac{10}{\ln\left(\frac{60-20}{-1+60-20}\right)} = 395 \text{ min} = 6{,}5 \text{ h}$

L'ordre de grandeur paraît cohérent pour une bouteille isotherme.

Exercices d'approfondissement

Exercice 10 *Question ouverte*

• *Analyse rapide du graphique :*

La première phase est l'**échauffement sans changement d'état**, reconnaissable par une **élévation de la température** pour une masse m constante.
La deuxième phase correspond au **changement d'état**, reconnaissable par une **diminution de la masse** d'eau pour une température constante (corps pur).

• *Détermination des grandeurs thermodynamiques :*

L'application du premier principe donne :

$$\mathrm{d}H = mc_{\text{eau}}\mathrm{d}T = \delta Q + \cancel{\delta W}$$

Or, $\delta Q = \mathcal{P}\mathrm{d}t$ et $\delta W = 0$ car l'eau est une phase condensée indilatable, donc

$$mc_{\text{eau}}\mathrm{d}T = \mathcal{P}\mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}c_{\text{eau}} = \frac{\mathcal{P}}{m}$$

donc

$$\boxed{c_{\text{eau}} = \frac{\mathcal{P}}{m\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}}$$

Les grandeurs m et $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ sont déterminées par lecture graphique dans la première phase, d'où :

$$c_{\text{eau}} \approx 4{,}78\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot g^{-1}}$$

Dans la phase 2, le changement d'état est étudié. En repartant de $\mathrm{d}H = \mathcal{P}\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{d}H = -\mathrm{d}mL_{\text{vap}}$. Il vient :

$$\mathcal{P} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}L_{\text{vap}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L_{\text{vap}} = -\frac{\mathcal{P}}{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}}$$

avec $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, la pente de la courbe lors de la deuxième phase.
La pente $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ se détermine par lecture graphique :

$$L_{\text{vap}} \approx 2{,}3\cdot 10^{3}\ \mathrm{J\cdot g^{-1}}$$

Exercice 11 *Bilan thermique d'un glacier*

1) Les transferts thermiques par **rayonnement** ne nécessitent **aucun support matériel**, contrairement aux transferts par **conduction** ou **convection**. Les transferts **convectifs** sont associés à des **mouvements** macroscopiques de fluides : le support matériel est mobile. Dans le cas de la **conduction**, le support matériel est fixe et l'énergie thermique se propage via l'**agitation thermique** au niveau moléculaire.

2) D'après la loi de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{\alpha}{T\ (\text{en K})}$$

- Pour $T = 5778\ \text{K}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{5778} = 501\ \text{nm},$$

soit environ 0,5 µm. Cela correspond bien aux **ondes courtes** (*SW*) mentionnées dans l'énoncé.

- Pour $T = 300\ \text{K}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{300} = 9{,}7\ \mu\text{m},$$

soit environ 10 µm. Cela se situe dans le domaine des **ondes longues** (*LW*).

3) D'après la loi de Stefan :

$$LW_{\text{out}} = \sigma T^4$$

Pour $T = -2{,}6\ ^\circ\text{C} = 270{,}55\ \text{K}$:

$$\text{LW}_{\text{out}} \approx 304\ \text{W} \cdot\ \text{m}^{-2}$$

4) L'expression du bilan radiatif est donnée par :

$$\boxed{R = SW_{\text{in}} + SW_{\text{out}} + LW_{\text{in}} + LW_{\text{out}}}$$

avec les conventions usuelles pour les transferts radiatifs entrants (*in*) et sortants (*out*).

5) La loi de Newton pour les transferts conducto-convectifs s'écrit :

$$P = h(T_{\text{fluide}} - T_{\text{surf}})$$

où h est le coefficient d'échange thermique.
Dans le cas proposé, cela donne :

$$P = h(T_n - T_{\text{surf}})$$

avec T_n la température du fluide. Si $T_n > T_{\text{surf}}$, alors $P > 0$, ce qui correspond à un transfert thermique dirigé vers le glacier.

Machines thermiques 3

Énoncés des exercices

Données pour l'ensemble des exercices :

- Conversion des unités de température : $T(\text{K}) = \theta(^\circ\text{C}) + 273$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Lois de LAPLACE pour une transformation adiabatique et réversible :

$$pV^\gamma = \text{cste} \qquad TV^{\gamma-1} = \text{cste} \qquad T^\gamma V^{1-\gamma} = \text{cste}$$

Exercices d'application du cours

Exercice 1 *Rendement du moteur*

1) Représenter un schéma de principe des échanges thermiques et travaux dans le cas d'un moteur.
2) Définir le rendement et l'exprimer dans le cas du moteur en fonction des termes d'échanges adéquats.
3) En utilisant l'inégalité de CLAUSIUS, exprimer la valeur maximale pouvant être prise par le rendement du moteur.

Exercice 2 *Efficacité de la machine frigorifique*

1) Représenter un schéma de principe des échanges thermiques et travaux dans le cas d'une machine frigorifique.
2) Définir l'efficacité d'une machine thermique et l'exprimer dans le cas de la machine frigorifique en fonction des termes d'échanges adéquats.
3) En utilisant l'inégalité de CLAUSIUS, exprimer la valeur maximale pouvant être prise par l'efficacité de la machine frigorifique.