BCPST
2e année

Mayeul Bacquelin

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques BCPST - 2e année

NOUVEAUX PROGRAMMES

Mayeul BACQUELIN

Professeur agrégé de mathématiques
Enseignant en BCPST à Nîmes

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

Les notices culturelles « un mathématicien » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-066779
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique-chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme celui de physique-chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier trimestre

1. Révisions d'analyse 3
2. Équations différentielles 39
3. Séries (et révision des suites) 63
4. Concepts de base des probabilités 107
5. Variables aléatoires discrètes 143
6. Couples de variables aléatoires discrètes 171
7. Polynômes 203

Deuxième trimestre

8. Espaces vectoriels 227
9. Applications linéaires 267
10. Diagonalisation 301
11. Espaces euclidiens 335
12. Intégration 367
13. Variables aléatoires à densité 409
14. Théorèmes limites en probabilité 443

Index 471

Premier trimestre

Chapitre 1
Révisions d'analyse

UN MATHÉMATICIEN



C'est alors qu'il est écrivain public que **Michel Rolle** (1652-1719) entame des études de mathématiques en autodidacte. Il résout alors un difficile problème ouvert posé par le mathématicien Jacques Ozanam ; Colbert le récompense par une pension ce qui lui permet de se concentrer sur la recherche mathématique.
Il s'est opposé violemment à l'introduction du calcul différentiel et, ironie de l'histoire, son nom est attaché à un théorème concernant ce domaine des mathématiques.

Un peu d'histoire

Dès 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri remarque « qu'en au moins un des points d'un arc de courbe usuel, la tangente à l'arc est parallèle à la corde joignant les extrémités de l'arc ». En 1691, Michel Rolle publie un ouvrage intitulé *La méthode des Cascades Algébriques* (qui) n'est autre chose qu'une méthode générale pour extraire les racines. Il montre qu'entre deux racines d'un polynôme, le polynôme dérivé s'annule lui aussi. Il réitère le procédé d'où le nom de cascade.

Dans un livre publié en 1797 sous le titre *Théorie des fonctions analytiques*, contenant les principes du calcul différentiel Joseph Louis Lagrange se penche sur la formule de Taylor et en donne un reste dépendant « d'une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites » de l'intervalle d'étude. En cas particulier, il démontre ainsi le théorème des accroissements finis.

Objectifs

les incontournables

- Savoir exploiter l'égalité entre deux complexes (écrit sous forme algébrique ou trigonométrique).
- Savoir résoudre des équations trigonométriques, notamment celles avec $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$.
- Savoir linéariser des produits de cos et sin. Savoir factoriser des sommes de cos ou sin.
- Savoir calculer des limites et lever des formes indéterminées.
- Savoir mener l'étude d'une fonction.
- Maîtriser le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
- Savoir expliciter un développement limité en 0 d'une fonction à partir des développements limités des fonctions usuelles en 0 et par somme, produit ou primitivation.
- Savoir calculer une dérivée partielle et en déduire les points critiques.

et plus si affinités

- Avoir quelques notions sur les racines n-ièmes de l'unité.
- Savoir trouver les extrema d'une fonction de plusieurs variables.

Résumé de cours

Retour sur les complexes et la trigonométrie

Théorème-Définition 1.1.— Écriture algébrique et trigonométrique —. Si x, y, a et b sont quatre réels alors :

$$a+ib = x+iy \Leftrightarrow a = x \text{ et } b = y.$$

Si r et r' sont deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels, on a :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \theta' + 2k\pi.$$

Proposition 1.2.— Inégalité triangulaire —. Soit z et z' deux complexes, on a :

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|, \text{ et } (|z+z'| = |z| + |z'|) \Longleftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+^\star\right)\right).$$

Proposition 1.3.— Formules d'Euler —. Pour tout réel θ, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 1.4.— Soit a un réel non nul et b et c deux réels. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ puis :

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\Delta} & \text{si } \Delta \geq 0 \\ i\sqrt{-\Delta} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Pour tout complexe z, on a alors :

$$az^2 + bz + c = 0 \Longleftrightarrow z = z_1 \text{ ou } z_2 \text{ avec : } z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

On a alors : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ (relations coefficients-racines).

Proposition 1.5.— Soit θ et ϕ des réels, on a : $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ et $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ ainsi que :

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\theta)$$
$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\phi)}{1 - \tan(\theta)\tan(\phi)}$$

Les formules avec tan étant énoncées sous réserve d'existence.

Proposition 1.6.— Pour tout réel θ, on a : $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

Proposition 1.7.— Soit θ et ϕ des réels, on a :

$$\cos(\theta) = \cos(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\phi[2\pi]$$
$$\sin(\theta) = \sin(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \phi[2\pi]$$
$$\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta = \phi[\pi]$$

Proposition 1.8.— Soit A et B deux réels. Il existe $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ (explicité dans les méthodes) tels que pour tout réel θ, on ait :

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = r\cos(\theta - \phi).$$

■ Retour sur les fonctions

Proposition 1.9.— Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (i.e. a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) et f une fonction numérique à variable réelle définie au voisinage de a. Si f a une limite finie, notée L, en a et si L est non nul alors f ne s'annule pas et garde le signe de L sur un voisinage de a.

Proposition 1.10.— Passage à la limite dans les inégalités —. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que f et g soient définies au voisinage de a et telles que $f \leq g$ sur un voisinage de a alors :

- Si f et g ont des limites finies en a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x)) \leq \lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x))$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x)) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x)) = -\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x)) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x)) = +\infty$.

Proposition 1.11.— Théorème de la limite monotone —. Soit $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ tel que $a < b$ et $f :]\,a, b\,[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante (cas décroissant à savoir faire). On a :

- Si f est majorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-}(f(x))$ existe et vaut $\sup\limits_{]a,b[}(f)$. Si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-}(f(x)) = +\infty$.
- Si f est minorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+}(f(x))$ existe et vaut $\inf\limits_{]a,b[}(f)$. Si f n'est pas minorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+}(f(x)) = -\infty$.

Théorème 1.12.— Théorème des gendarmes (ou d'encadrement). —. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f, g et h trois fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que f, g et h soient définies au voisinage de a. Si $f \leq g \leq h$ sur un voisinage de a et si $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x))$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(h(x))$ existent, sont finies et égales alors g admet une limite fine en a et $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x))$ vaut $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(h(x))$.

Proposition 1.13.— Soit $(a, L) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que f et g soient définies sur un voisinage de a.

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x))$ existe et vaut 0 et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $|f(x) - L| \leq g(x)$ pour tout x de $\mathcal{V}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x))$ existe et vaut L.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x))$ existe et vaut 0 et si f est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(g(x)f(x))$ existe et vaut 0.

Définition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction avec D une partie de $\mathbb{R}$, soit a un élément de D. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a}\left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$ existe et est finie alors f est dérivable en a et on appelle $f'(a)$ cette limite.*

Proposition 1.14.— Croissances comparées —. Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{x^a}{(e^x)^b}\right) = 0$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{(\ln(x))^b}{x^a}\right) = 0$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{(e^x)^b}{x^a}\right) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{x^a}{(\ln(x))^b}\right) = +\infty$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+}\left((|\ln(x)|)^b x^a\right) = 0$

Théorème 1.15.— Théorème des valeurs intermédiaires —. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit h une fonction numérique à variable réelle continue sur $[a, b]$. Si z est un réel compris entre $h(a)$ et $h(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = z$. En particulier, si $h(a) \times h(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$.

Théorème 1.16.— Théorème de la bijection continue —. Soit f une fonction numérique définie sur I. Si f est strictement monotone et continue sur I alors :

- $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- f^{-1} est continue et strictement monotone et son sens de variation est celui de f.
- L'équation $f(x) = y$ d'inconnue x a une seule solution si y est dans $f(I)$ (c'est $f^{-1}(y)$), aucune sinon.

Définition : *Soit $M_0(a, f(a))$ un point du plan. Si f est dérivable en a alors on appelle tangente en M_0 à C_f la droite d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.*

Proposition 1.17.— Si f est dérivable en a alors f est continue en a (la réciproque est fausse!!!).

Proposition 1.18.— Si f et g, deux fonctions, sont dérivables en a alors $f+g$, $f\times g$ et λf (avec λ réel) sont dérivables en a et :

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)\ ,\ (\lambda f)'(a)=\lambda f'(a)\ \text{ et }\ (f\times g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a).$$

Si f est dérivable en a et si h, une autre fonction, est dérivable en $f(a)$ alors $h\circ f$ est dérivable en a et :

$$(h\circ f)'(a)=h'(f(a))\times f'(a).$$

En particulier, $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a)=-\dfrac{f'(a)}{f(a)^2}$ et $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(a)=\dfrac{g'(a)f(a)-f'(a)g(a)}{f(a)^2}$ si on suppose $f(a)\neq 0$.

Proposition 1.19.— Si f est continue, strictement monotone et dérivable en a et si $f'(a)\neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et, en posant $b=f(a)$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Si $f'(a)=0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ et son graphe en $(a,f(a))$ admet une tangente verticale.

Proposition 1.20.— Si f est dérivable, si a n'est pas une borne de I et si f possède un extremum local en a alors $f'(a)=0$.

Théorème 1.21.— Théorème de Rolle —. On suppose que $f(a)=f(b)$ avec f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème 1.22.— Théorème des accroissements finis —. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe ξ dans $]a,b[$ tel que :

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■ Retour sur les développements limités

Théorème 1.23.— Théorème de Taylor-Young —. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, on a alors :

$$f(x)\underset{0}{=}f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-\left(f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)}{x^n}\right)=0.$

Proposition 1.24.— On en déduit : $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^1}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$ puis :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right), \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right), \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Proposition 1.25.— Intégration des développements limités —. Soit I un intervalle réel contenant zéro et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que :

$$g'(x) \underset{0}{=} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors g admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n+1$ et :

$$g(x) \underset{0}{=} \left(g(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right).$$

En particulier, $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Proposition 1.26.— Obtention d'équivalent —. Si $f(x) \underset{a}{=} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^k\right)$ avec k un entier naturel et $a_k \neq 0$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} a_k (x-a)^k$.

Proposition 1.27.— Tangente —. Soit b un réel et f une fonction numérique définie sur un voisinage de b contenant b. Si f admet un développement limité au voisinage de b de la forme :

$$f(x) \underset{b}{=} a_0 + a_1 (x-b) + \mathrm{o}\left((x-b)\right)$$

alors la tangente en $(b, f(b))$ à C_f, courbe représentative de f, existe et a pour équation :

$$y = a_0 + a_1 (x-b).$$

Si de plus $f(x) \underset{b}{=} a_0 + a_1 (x-b) + a_k (x-b)^k + \mathrm{o}\left((x-b)^k\right)$ avec k un entier égal ou supérieur à 2 et $a_k \neq 0$, alors on peut donner la position locale de la courbe C_f par rapport à sa tangente. Les détails seront fournis dans les méthodes.

Proposition 1.28.— Asymptote —. Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini. L'éventuel développement limité au voisinage de 0 (resp. 0^+, 0^-) de $x \mapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ permet de déterminer si la courbe C_f possède des asymptotes en l'infini (resp. en $+\infty$, en $-\infty$) et la position de C_f par rapport à celle-ci. Les détails seront fournis dans les méthodes.

■ Retour sur les fonctions de plusieurs variables

Définition : *On appelle applications partielles de f en (a,b) les deux fonctions suivantes :*

$$f_1 : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x,b) \in \mathcal{D}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x,b) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a,y) \in \mathcal{D}\} & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(a,y) \end{cases}.$$

Soit $f_1 : x \mapsto f(x,b)$. Si f_1 est dérivable en a alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable (définition de par rapport à la seconde variable évidente) en (a,b) et on note : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a)$.

Théorème 1.29.— Théorème de Schwarz —. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ alors : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Proposition 1.30.— Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < b$ et $c < d$. Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,a,b\,[\times]\,c,d\,[$. Si f admet en (x_0,y_0) un extremum alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Le gradient de f en (x_0,y_0), qui est $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$, est alors le vecteur nul.

Définition : *On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a,b) est le plan d'équation cartésienne :*

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a,b) est donc le plan normal à $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$ et passant par $(a,b,f(a,b))$.

Proposition 1.31.— On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Soit h et k deux réels. La quantité suivante est négligeable devant $\sqrt{h^2+k^2}$:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) - \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

En notant $\overrightarrow{u}$ le vecteur (h,k) et $\cdot$ le produit scalaire, on a donc :

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx \overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)}(f) \cdot \overrightarrow{u}$$

Méthodes

Retour sur les complexes et la trigonométrie

Méthode 1.1.— Comment trouver un argument

Pour trouver un argument d'un complexe $a+ib$ (avec a et b deux réels pas tous les deux nuls), on factorise par son module pour obtenir $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ puis on cherche θ tel que $\cos(\theta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.2 et **exercice 1.3**.

Remarque : l'angle moitié est un grand classique pour trouver un argument d'un complexe qui se présente comme la somme d'exponentielles complexes, on rappelle que :

$$e^{i\theta}+e^{i\phi}=2\exp\left(i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \quad \text{et} \quad e^{i\theta}-e^{i\phi}=2i\exp\left(i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

et en particulier $1+e^{i\theta}=2\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $1-e^{i\theta}=2i\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Méthode 1.2.— Comment trouver les racines n-ième de l'unité

On veut trouver les complexes z tels que $z^n=1$ (avec n entier naturel fixé). On va identifier en utilisant la forme trigonométrique, on prend z un complexe non nul (pour que l'argument existe) et on a alors :

$$\begin{aligned} z^n=1 &\iff |z^n|=1 \ \text{ et } \ \arg(z^n)\equiv 0[2\pi] \\ &\iff |z|^n=1 \ \text{ et } \ n\arg(z)\equiv 0[2\pi] \\ &\iff |z|=1 \ \text{ et } \ \arg(z)\equiv 0[2\pi/n] \\ &\iff \exists k\in[\![0;n-1]\!] \text{ tel que } z=\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 1.3.

Méthode 1.3.— Comment résoudre une équation du second degré à coefficients réels

Résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z complexe avec a,b et c trois réels et a non-nul n'est pas un problème. Si le discriminant Δ est strictement négatif, on a besoin d'un complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Le plus simple est d'écrire Δ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ (donc sous forme exponentielle) avec ρ et θ deux réels et $\rho\geq 0$ puis de poser, par exemple, $\delta=\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

Mise en œuvre : exercice 1.2.

❑ **Méthode 1.4.— Comment expliciter** $\cos(n\theta)$ **et** $\sin(n\theta)$

Pour expliciter $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on développe, en utilisant la formule du binôme de Newton, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ puis, d'après la formule de De Moivre, il suffit de chercher la partie réelle si on veut $\cos(n\theta)$ et la partie imaginaire si on veut $\sin(n\theta)$.

Mise en œuvre : exercice 1.5.

Exemple : on veut appliquer le principe précédent avec $\cos(4\theta)$. D'après la formule du binôme de Newton, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4$ est $\cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta)$. En identifiant la partie réelle, d'après la formule de De Moivre, on en déduit que $\cos(4\theta)$ est $\cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$.

❑ **Méthode 1.5.— Comment linéariser**

On veut exprimer des puissances de cos et de sin en fonction de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$. Il suffit pour cela de remplacer toutes les fonctions trigonométriques grâce aux formules d'Euler puis de développer avec la formule du binôme de Newton. Dans la grosse somme obtenue, on regroupe ensemble les $\exp(ik\theta)$ avec leurs amis, les $\exp(-ik\theta)$, et, enfin, on utilise de nouveau les formules d'Euler pour repasser en cos et sin.

Exemple : on souhaite appliquer avec $\cos^6(t)$ qui est $\left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^6$ d'après les formules d'Euler. On a alors :

$$\begin{aligned}\cos^6(t) &= \frac{1}{2^5}\times\left(\frac{e^{6it}+6e^{4it}+15e^{2it}+20+15e^{-2it}+6e^{-4it}+e^{-6it}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\frac{e^{6it}+e^{-6it}}{2}+6\times\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2}+10+15\times\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\cos(6t)+6\cos(4t)+15\cos(2t)+10\right).\end{aligned}$$

❑ **Méthode 1.6.— Comment simplifier** $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$

On factorise par $\sqrt{A^2+B^2}$. Si A et B ne sont pas tous les deux nuls, on écrit :

$$A\cos(\theta)+B\sin(\theta) = \sqrt{A^2+B^2}\times\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)\right)$$

et on cherche un angle ϕ tel que $\cos(\phi) = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin(\phi) = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Il suffit ensuite de penser à la formule $\cos(a+b)$...

Mise en œuvre : exercice 1.1 et **exercice 1.5**.

■ Retour sur les fonctions

❑ **Méthode 1.7.— Comment étudier les variations**

Pour avoir les variations de f, le plus classique est d'étudier le signe de sa dérivée. Si f est dérivable, le signe de f' nous donnera les variations de f. Obtenir le signe de f' revient à résoudre des inéquations. Des idées si le signe de f' vous résiste :

- Pensez éventuellement à calculer f'' (si elle existe !) . Le signe de f'' vous donnera les variations de f' et vous ne serez alors pas très loin de son signe !
- Pour trouver le signe, le principe de base est de factoriser alors factorisez ! ! ! Et les facteurs dont vous n'arrivez pas à trouver le signe, dérivez-les si possible.

Mise en œuvre : exercice 1.6.

❑ **Méthode 1.8.— Comment calculer** $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$

- **Par opérations :** Le plus simple (par produit, somme...), à tester dans un premier temps.
- **Par croissances comparées :** Relire le cours. Attention, à être précisément dans le cadre donné (cf la remarque après).
- **Par taux d'accroissement :** Si on sait que f est dérivable en b alors $\lim\limits_{x\to b}\left(\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)$ existe et vaut $f'(b)$. Sachez donc reconnaître les formes du type $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$, c'est toujours la F.I. $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$. Exercez votre œil !
- **C'est la forme indéterminée 1^∞ ou 0^0 :** Cela arrive quand on cherche la limite de $h : x \mapsto (f(x))^{g(x)}$ avec f qui tend vers 1 et g vers l'infini ou bien f et g qui tendent vers 0. Cela peut donner n'importe quoi. Pour s'en sortir, il faut dire que, par définition, on a : $h : x \mapsto \exp(g(x)\times\ln(f(x)))$. On cherche ensuite la limite de $x \mapsto g(x)\ln(f(x))$ (souvent avec un équivalent) puis on compose avec exp.
- **Limite à gauche/à droite :** Notez que dans cette méthode là, a est un réel (pas $+\infty$, ni $-\infty$). Lorsque l'expression de f change avant ou après a, il peut être intéressant d'évaluer la limite à gauche et la limite à droite puis de conclure en les comparant.
- **Passage à la limite :** cf. cours !
- **Un petit tour chez les gendarmes :** cf. cours aussi ! À noter un cas particulier où on se sert quasiment toujours des gendarmes, c'est avec la partie entière. Celle-ci, de part sa définition, fait naturellement intervenir les encadrements. Le sinus et le cosinus sont aussi deux fonctions dont on peut se débarrasser par encadrement.

Remarque : attention, retenir des croissances comparées que "l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme" est un peu léger. Dire que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{x^3}{\exp(2\ln(x))}\right)=0$ est faux, cela donne $+\infty$ puisque $\dfrac{x^3}{\exp(2\ln(x))}$ est x.

Méthodes

Exemple : on veut déterminer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. On a $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$pour tout réel x non nul. Cela prouve, comme sin est dérivable en 0, que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \sin'(0)$ (i.e. 1).

❑ **Méthode 1.9.— Comment prouver que f est prolongeable par continuité**
Pour vérifier que f est prolongeable par continuité en un réel a, il faut d'abord que $f(a)$ n'existe pas (sinon, on ne peut pas prolonger) puis que f admette une limite finie en ce point (utilisez les concepts de limite à gauche, à droite éventuellement).

Exemple : soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. On souhaite prouver que f est prolongeable par continuité en 0. On note que $f(0)$ n'existe pas puis que $\lim_{x\longrightarrow 0}(f(x)) = 1$ (cf. exemple de la méthode précédente). On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

❑ **Méthode 1.10.— Comment trouver les asymptotes**
On suppose f est définie au voisinage de l'infini. Voici les quelques étapes à suivre pour étudier le comportement en l'infini de f :

- **Étape 1 :** On commence par calculer $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$ existe et est finie alors, en notant L cette limite, C_f admet en l'infini une asymptote horizontale d'équation $y = L$. On arrête alors ici notre étude. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$ est infinie alors on passe à la prochaine étape.
- **Étape 2 :** On calcule ensuite $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$ alors C_f admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. On arrête alors ici notre étude. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ est infinie alors C_f admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. On arrête alors ici notre étude. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ existe et est finie alors, on note m cette limite et on passe à la prochaine étape.
- **Étape 3 :** On finit par le calcul de $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)$. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)$ est infinie alors C_f admet en l'infini une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = mx$. On arrête alors ici notre étude. Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)$ existe et est finie alors, en notant n cette limite, C_f admet en l'infini une asymptote oblique d'équation $y = mx + n$.

Mise en œuvre : exercice 1.6.

Exemple : on veut étudier le comportement asymptotique de $f : x \mapsto \frac{x^2+5}{2x-6}$. On suit les différentes étapes. On évalue d'abord $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$, cela donne $+\infty$ (limite obtenue grâce aux équivalents) puis

$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$ (limite obtenue grâce aux équivalents). Un dernier calcul (avec des équivalents) donne que $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)$ vaut $\dfrac{3}{2}$. On peut finalement affirmer que C_f, courbe représentative de f, admet en l'infini une asymptote oblique d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

❑ **Méthode 1.11.— Comment prouver qu'une équation a des solutions**

Voici trois idées qui vous permettront de prouver qu'une équation a (ou non) des solutions :

- **On la résout !** C'est la base et à essayer avant la suite. C'est jouable a priori si c'est une équation du second degré ou une équation faisant intervenir une fonction qu'on peut détruire grâce à des réciproques (ln et exp, $\sqrt{\cdot}$ et $x\mapsto x^2$...)
- **TVI !** On réécrit notre équation sous la forme $f(x)=0$, on prouve la continuité de f, on cherche deux réels a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. On pourra alors conclure que notre équation a au moins une solution. Par contre, le TVI ne pourra pas vous dire le nombre de solutions !
- **Le théorème de la bijection continue** On écrit notre équation sous la forme $y=f(x)$ avec y fixé (0 étant le plus simple), prouve la continuité et la stricte monotonie de f, explicite l'image de f et on note si y appartient (une seule solution) ou non (aucune solution) à l'image de f.

Mise en œuvre : exercice 1.7.

❑ **Méthode 1.12.— Comment dériver dans les cas simples**

La plupart du temps, pour dériver et dire qu'une fonction f est dérivable, on décompose f en somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas), composée (quand c'est composable) de fonctions dérivables. On peut alors conclure que f est dérivable en b et expliciter f à l'aide des formules du cours et des dérivées des fonctions usuelles que l'on doit maîtriser. Pensez bien à la signification de la formule $(f\circ g)'=(f'\circ g)\times g'$, pour dériver une composée, on dérive la fonction externe (f ici) on laisse la fonction interne puis on multiplie par la dérivée de la fonction interne. Si on ne peut pas conclure par opérations à l'existence de $f'(b)$, on évalue $\lim_{x\to b}\left(\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)$ puis, si $\lim_{x\to b}\left(\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)$ n'existe pas ou n'est pas finie, alors f n'est pas dérivable en b. Sinon, f est dérivable en b et sa dérivée vaut $\lim_{x\to b}\left(\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)$.

Mise en œuvre : exercice 1.8.

Méthodes

❑ **Méthode 1.13.— Prouver l'existence et calculer** $(f^{-1})'(b)$

On part d'une fonction f dérivable sur I et bijective sur I. Pour trouver l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable, il faut d'abord chercher la partie J de I sur laquelle f' ne s'annule pas et en prendre l'image par f (forcément, l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} est une partie de l'ensemble de définition de f^{-1} donc une partie de l'ensemble d'arrivée de f). f^{-1} est dérivable sur $f(J)$. D'autre part, $\forall x \in f(J)$, on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

❑ **Méthode 1.14.— Comment utiliser le théorème des accroissements finis**

Ce théorème met en rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(c)$ avec c un élément de $]a,b[$. On va donc simplement utiliser ce théorème lorsqu'on voit apparaître du $f(b)-f(a)$ dans ce qu'on cherche à prouver. Si on cherche à encadrer $f(b)-f(a)$, c'est alors plus l'inégalité des accroissements finis que l'on exploitera. Elle n'est pas au programme, il faut donc savoir la démontrer.

❑ **Méthode 1.15.— Comment étudier du "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec les accroissements finis**

Imaginons étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec tous les u_n qui sont dans un intervalle $[a,b]$ et $|f'|$ existe et est bornée par M avec M un réel positif strictement inférieur à 1 alors on va :

1. chercher le réel L de $[a,b]$ tel que $f(L) = L$ (Résolution d'équation...).
2. On applique l'égalité des accroissements finis, ce qu'on peut faire car u_n et L sont deux élément de $[a,b]$. Si $u_n \neq L$, il existe un réel c dans $]u_n, L[$ si $u_n < L$ ($]L, u_n[$ si $u_n > L$) tel que :
$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(u_n)-f(L)}{u_n - L} \\ &= \frac{u_{n+1}-L}{u_n-L} \end{aligned}$$
Il suffit maintenant de signaler que $|f'(c)| \leq M$ pour obtenir :
$$|u_{n+1} - L| \leq M \times |u_n - L|.$$
Par récurrence, on obtient donc, pour tout entier naturel n, cette inégalité :
$$|u_n - L| \leq M^n \times |u_0 - L|.$$
3. Comme $|M|$ est strictement inférieur à 1, on a alors :
$$\lim_{n\to+\infty} (M^n \times |u_0 - L|) = 0.$$
D'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers L.

■ Retour sur les développements limités

❑ Méthode 1.16.— Comment avoir une tangente et même la position avec un développement limité

Si $f(x) \underset{b}{=} a_0 + a_1(x-b) + a_k(x-b)^k + \mathrm{o}\left((x-b)^k\right)$ avec k un entier supérieur à 2 et $a_k \neq 0$, alors la tangente en $(b, f(b))$ à C_f existe et a pour équation : $y = a_0 + a_1(x-b)$ et, si k est impair alors C_f traverse cette tangente, $(b, f(b))$ est un point d'inflexion. Si k est pair, alors C_f est, au voisinage de b, au-dessus de sa tangente si $a_k > 0$ et est en-dessous si $a_k < 0$. Pour trouver la tangente et le positionnement local de C_f par rapport à sa tangente, il faut donc chercher un développement limité d'ordre au moins 2 (en pratique, pour éviter de recalculer un développement limité, on prend souvent un ordre 3).

Remarque : Inutile de retenir par cœur les résultats "si k est impair alors...". Avec le développement limité proposé, on sait que $f(x) - (a_0 + a_1(x-b)) \underset{b}{\sim} a_k(x-b)^k$ ce qui assure que les fonctions $x \mapsto f(x) - (a_0 + a_1(x-b))$ et $x \mapsto a_k(x-b)^k$ sont, au voisinage de b, du même signe.

Exemple : on veut faire l'étude locale en zéro de $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$. On a :

$$\sin^2(x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit que : $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. De là, on peut déduire que f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, donc f est continue et dérivable en 0 et la tangente en $(0,0)$ à C_f a pour équation $y = x$. De plus, C_f traverse sa tangente et $(0,0)$ car $x \mapsto f(x) - x$ et $x \mapsto -\dfrac{x^3}{6}$ ont même signe au voisinage de 0 car, d'après le développement limité donné, on peut affirmer que : $f(x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.

❑ Méthode 1.17.— Comment avoir une asymptote et même la position avec un développement limité

Même principe que précédemment, le début du développements limités donnent l'équation de l'asymptote et le premier terme non nul suivant donne la position. On commence par chercher un développement limité en zéro de $g : x \mapsto x \times f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis, si $g(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right)$ avec k un entier supérieur à 2 et $a_k \neq 0$ alors $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{=} \dfrac{a_0}{x} + a_1 + a_k x^{k-1} + \mathrm{o}\left(x^{k-1}\right)$ et $f(x) \underset{\infty}{=} a_0 x + a_1 + a_k x^{1-k} + \mathrm{o}\left(x^{1-k}\right)$.

Mise en œuvre : exercice 1.11.

Remarque : On peut de ce développement que l'asymptote à C_f existe et a pour équation : $y = a_1 + a_0 x$. La position locale de la courbe C_f par rapport à son asymptote dépend du signe de

a_k si on est au voisinage de $+\infty$ et du signe de a_k et de la parité de k si on est au voisinage de $-\infty$ car :

$$f(x) - (a_0 x + a_1) \underset{\infty}{\sim} a_k x^{1-k}$$

ce qui assure que $x \mapsto f(x) - (a_0 x + a_1)$ et $x \mapsto a_k x^{1-k}$ sont, au voisinage de l'infini, du même signe.

■ Retour sur les fonctions de plusieurs variables

❑ Méthode 1.18.— Comment tracer la surface représentative

Deux idées pour vous aider à tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables :

- On peut fixer une variable afin de tracer une courbe d'une fonction d'une seule variable. On fixe b et on trace le graphe de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, b)$. On obtient alors l'intersection de la surface représentative de f et du plan $y = b$. Puis on fait bouger b, on a ainsi une représentation par tranche verticale. On peut faire de même en fixant a et en s'intéressant à $y \mapsto f(a, y)$.
- On peut aussi fixer λ et on trace la surface $f(x, y) = \lambda$, (x, y) balayant l'ensemble de définition de f (surface appelée courbe de niveau λ de f). On cherche donc l'intersection de la surface représentative de f et du plan $z = \lambda$. Puis, en faisant bouger λ, on obtient une représentation par tranche horizontale de notre surface.

Dans un cas comme dans l'autre, vous pouvez vous rendre compte qu'on cherche des intersections de notre surface avec des plans du type $x = cte$ ou $y = cte$ ou $z = cte$.

Mise en œuvre : exercice 1.13.

❑ Méthode 1.19.— Comment calculer les dérivées partielles

Si vous voulez calculer la dérivée partielle par rapport à y (c'est plus rigoureux de dire par rapport à la deuxième variable) de $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ en un point $a(x_a, y_a)$ et bien, par définition, c'est la dérivée (si elle existe...) en y_a de la fonction d'une seule variable $g : y \mapsto f(x_a, y)$. On traduit :

- Tant qu'il n'y a pas de problème, cela revient donc à fixer la variable qui ne bouge pas et dériver une fonction d'une variable.
- Sinon, en cas de problème, retenez que f admet en a une dérivée partielle par rapport à y si et seulement si la fonction g admet une dérivée en y_a (cf. donc chapitre de dérivabilité des fonctions d'une seule variable).

Exemple : les dérivées partielles en (a, b) de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 x + y^3$ sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a + b^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2ba + 3b^2.$$

❑ **Méthode 1.20.— Comment trouver les extremums**

Pour trouver les éventuels extremums d'une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, on fait deux étapes :

1. On cherche les points critiques de f. Pour cela, on calcule ses dérivées partielles et on écrit qu'elles sont toutes nulles au point qui nous intéresse. Cela donne donc un système à résoudre.
2. Si f n'a pas de point critique, on peut conclure que f n'a pas d'extremum à l'intérieur de son ensemble de définition. Sinon, on essaye de démontrer (ce sont des inéquations) que ces points critiques sont ou ne sont pas des extremums. On s'intéresse donc au signe de $f(x,y) - f(a,b)$ avec (a,b) un point critique et (x,y) deux réels quelconques. Quelques réflexes de base permettent en général de s'en sortir : dire qu'un carré est positif, utiliser une fonction dont on a étudié le signe. Si c'est plus compliqué, il y aura une indication dans l'énoncé !

Mise en œuvre : exercice 1.14.

❑ **Méthode 1.21.— Comment approcher**

Votre cours vous donne deux pistes pour approcher au mieux une fonction f de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$:

1. On sait que : $f(x_0+h, y_0+k) \approx f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$. Cela peut vous rappeler un développement limité d'ordre 1 d'une fonction d'une seule variable (c'est exactement cela mais le dire est hors-programme...).
2. Une autre idée, on sait que la surface approchant au mieux en un point (x_0,y_0) donné la surface représentative de f est son plan tangent. Ce dernier existe car f est de classe $\mathcal{C}^1$!

Remarque : Dans le cas d'une fonction d'une variable, on approxime sa courbe par une droite (la tangente...). Et bien, une fonction de deux variables donne graphiquement une surface de l'espace (les points d'abscisse x, d'ordonnée y et de hauteur $f(x,y)$) et on l'approche par un plan.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Un argument de $\rho e^{i\theta}$, avec ρ et θ deux réels, est θ.	☐	☐
2. On a : $\mathrm{Re}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Re}\,(z')$ avec z et z' deux complexes.	☐	☐
3. Pour tout réel x, $\arctan(\tan(x)) = x$.	☐	☐
4. On a : $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$	☐	☐
5. La tangente en $(a, f(a))$ a pour équation $y = f'(x)(x-a)+f(a)$.	☐	☐
6. Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)) = \lim\limits_{x\to a}(g(x))$ alors f et g sont équivalentes au voisinage de a.	☐	☐
7. Le domaine de définition de $h : (x, y) \mapsto \sqrt{(x-2)(y-4)}$ est $]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$.	☐	☐
8. Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a, b) a pour équation cartésienne : $$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(y-b).$$	☐	☐
9. On a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ si a et b sont deux réels tels que $a \times b > 0$.	☐	☐
10. $f'(0)$ est $\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Retour sur les complexes et la trigonométrie

Exercice 1.1 : Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(2x)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(2x)=2.$$

Exercice 1.2 : Soit u un élément de $]0,\pi[$. Trouver les solutions de l'équation (E) et donner leur forme trigonométrique avec (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$z^2+2(1-\cos(u))z+2(1-\cos(u))=0$$

Exercice 1.3 : Calculer $(1+i)^6$ et en déduire la résolution de l'équation $z^6=-8i$ d'inconnue z complexe. Résoudre aussi l'équation $(z-1)^6+(z+1)^6=0$ d'inconnue z complexe.

Exercice 1.4 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{(\cos(x))^k}$ avec n un entier naturel et x un élément de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 1.5 : On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue x réel :

$$8x^3=6x+\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour tout réel x.

3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue θ réel :

$$8\left(\cos\left(\theta\right)\right)^3=6\cos\left(\theta\right)+\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

4. En déduire que les solutions de (E) sont :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}\ \text{et}\ \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}.$$

Retour sur les fonctions

Exercice 1.6 : Étudier la fonction $f:x\mapsto x-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Exercice 1.7 : Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par :

$$f_n:x\mapsto x^n+2x^2+x-1.$$

1. Montrer que f_n s'annule sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ en un unique point. On le note x_n.

2. Montrer que $f_{n+1}(x_n)\leq 0$.

3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et convergente.

4. Trouver la limite de $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et enfin celle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 1.8 : Montrer que f avec : $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ sans y être de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.9 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{4\tan(x)}{4+\tan^2(x)}$.

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ a une unique solution. On la note r.

3. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r.

■ Retour sur les développements limités

Exercice 1.10 : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to 0} \left(\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2+x^3}}\right)$.

Exercice 1.11 : Soit $f : x \mapsto (x-2)\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. Déterminer l'asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé et préciser leurs positions relatives.

■ Retour sur les fonctions de plusieurs variables

Exercice 1.12 : Trouvez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$g : (x,y) \mapsto \sqrt{\frac{x^2-4}{y^2-1}} \text{ et } h : (x,y) \mapsto \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 1.13 : Déterminer les différentes courbes de niveau de $g : (x,y) \mapsto x^2+y^2-2x+3y$ et tracer sa surface représentative.

Exercice 1.14 : Soit $f : (x,y) \mapsto x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right)$.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) \geq x \times \exp(x)$.

2. Étudier rapidement la fonction g suivante : $g : x \mapsto x \times \exp(x)$ et trouver la valeur de son minimum s'il existe.

3. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint en un seul point.

■■ Indications

Ex. 1.1

Commencez par remarquer que $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ vaut $\dfrac{\pi}{12}$, cela devrait vous inspirer !

Ex. 1.2

Un discriminant strictement négatif donc des solutions complexes (cf. cours). Pensez à la technique de l'angle moitié pour obtenir la forme exponentielle.

Ex. 1.3

Il faut clairement relire la méthode sur les racines n-ième.

Ex. 1.4

Interpréter cette somme comme une partie imaginaire, vous devriez reconnaître une somme géométrique.

Ex. 1.5

Pour la première question, passer de $\frac{\pi}{8}$ *à* $\frac{\pi}{4}$ *avec les formules d'angle moitié. Après, avec la formule de De Moivre, vous devriez pouvoir vous débarrasser des puissances !*

Ex. 1.6

Étude classique : on dérive, on cherche le signe de la dérivée. Si celui-ci n'est pas simple, on dérive à nouveau...

Ex. 1.7

1. *Théorème de la bijection continue.*
2. *Bien se rappeler que* $x_n^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$.
3. *Montrer que* $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$.
4. *Exploiter le fait que* x_n *appartient à* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *pour prouver que la limite de* $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *est nulle.*

Ex. 1.8

Bien appliquer les définitions et les méthodes. Commencez par prouver le caractère dérivable en 0 *à l'aide du taux d'accroissement puis expliciter enfin* f'. *Constatez simplement que* f' *n'est pas continue en* 0.

Ex. 1.9

Classique ! Introduire $g : x \mapsto f(x) - x$ *pour la deuxième question et pour savoir la monotonie de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 1.10

Pas besoin de développement limité pour la première. Pour la seconde, à l'ordre le plus petit possible et commencez par utiliser les équivalents pour dégrossir le problème.

Ex. 1.11

Il est assez évident qu'il faut relire, voire retravailler, la méthode sur l'obtention des asymptotes à l'aide de développement limité.

Ex. 1.12

Bien faire la différence entre ces deux fonctions. Attention, x *et* y *sont deux variables qui n'ont rien à voir, elles sont indépendantes l'une de l'autre...*

Ex. 1.13

Relire la méthode expliquant comment tracer une surface représentative à partir des courbes de niveau.

Ex. 1.14

Reliez bien les questions entre elles, le minimum de f *a probablement déjà été évoqué !*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	V	F	F	F	V	F	F

1. Un argument de $\rho e^{i\theta}$ est θ si ρ est strictement positif... mais s'il est nul, pas d'argument et s'il est strictement négatif, ce sera $\theta + \pi$ (à 2π près bien sûr !).
2. $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$ est vrai... mais pas l'assertion proposée. Par exemple, $\mathrm{Re}\,(i \times i)$ vaut -1 et $\mathrm{Re}\,(i) \times \mathrm{Re}\,(i)$ vaut 0.
3. Pour tout réel x, $\arctan(\tan(x))$ n'est pas forcément défini ($\tan$ n'est pas défini en $\dfrac{3\pi}{2}$) et cela ne peut pas donner toujours x car $\arctan(x)$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En revanche, il est vrai que, pour tout x dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$. Il est vrai aussi que, pour tout réel x, $\tan(\arctan(x)) = x$.
4. On a bien : $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. De $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}(\cos(x) - 1) = 0$ et de $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$, on peut déduire que :

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &\underset{0}{\sim} \ln(1 + (\cos(x) - 1)) \\ &\underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \\ &\underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

5. La tangente en $(a, f(a))$ a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$... Avec l'assertion proposée, on n'aurait pas forcément l'équation d'une droite !
6. Si $\lim\limits_{x \to a}(f(x)) = \lim\limits_{x \to a}(g(x))$ alors on ne peut pas affirmer pour autant f et g sont équivalentes au voisinage de a. C'est le cas si ces limites ne sont ni 0, ni l'infini. Un contre-exemple est fourni par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.
7. Le domaine de définition de $h : (x, y) \mapsto \sqrt{(x-2)(y-4)}$ n'est pas $]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$, cela n'a pas de sens, ce n'est pas une partie de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit du domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{(x-2)(x-4)}$. $(]-\infty, 2] \times]-\infty, 4]) \cup ([2, +\infty[\times [4, +\infty[)$ est en réalité celui de h !
8. Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a, b) a en réalité pour équation cartésienne :

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b).$$

On vous laisse trouver les différences ! Ce qui a été cité n'était pas nécessairement l'équation d'un plan !
9. On a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ si a et b sont deux réels strictement positifs. Par contre, $\ln(ab)$ est $\ln(-a) + \ln(-b)$ si a et b sont deux réels strictement négatifs. Faire attention !!!!! On a donc finalement $\ln(a \times b) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$. De la même façon, $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.
10. $f'(0)$ est $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right)$. Ne pas confondre taux d'accroissement et limite de taux d'accroissement.

❑ **Erreurs classiques**

- 0 n'a pas d'argument. Si vous écrivez $\text{Arg}\,(z)$, pensez à prendre z non nul.
- Ne pas oublier les modulos quand on résout une équation trigonométrique !
- Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable.
- Ne pas ajouter, composer des équivalents a priori !
- Une fonction numérique de deux variables n'a pas ni dérivée, ni monotonie !

Corrigé

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

Comme $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{(3-2)\pi}{12}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

De même, on prouve que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Appelons P_x la propriété $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(2x) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(2x)$ vaut 2. Pour tout réel x, on a donc :

$$\begin{aligned}P_x &\iff \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\cos(2x) + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\sin(2x) = \frac{1}{2}\\ &\iff \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(2x) = \frac{1}{2}\\ &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff 2x - \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\\ &\iff 2x \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\frac{3\pi}{12}[2\pi]\\ &\iff x \equiv \frac{5\pi}{24}[\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{8}[\pi]\end{aligned}$$

▲

Exercice 1.2

Le discriminant Δ de cette équation est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(1-\cos(u))^2 - 8(1-\cos(u))\\ &= 4(1-\cos(u))\times(1-\cos(u)-2)\\ &= -4(1-\cos^2(u))\\ &= -4\sin^2(u).\end{aligned}$$

✎ *Δ est strictement négatif car $u \in]0,\pi[$.*

Δ est strictement négatif donc les solutions de (E) sont :

$$\frac{2(\cos(u)-1) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

ce qu'on peut donc écrire $(\cos(u)-1) \pm i\sin(u)$. Appelons-les r_1 et r_2, on a

donc en utilisant les techniques de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} r_1 &= \exp\left(i\frac{u}{2}\right) \times \left(-\exp\left(-i\frac{u}{2}\right) + \exp\left(i\frac{u}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(i\frac{u}{2}\right) \times 2i\sin\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{u}{2}\right) \times \exp\left(i\frac{u+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

De même, on prouve que r_2 est $2\sin\left(\frac{u}{2}\right) \times \exp\left(-i\frac{u+\pi}{2}\right)$. ▲

Exercice 1.3

On va utiliser la forme trigonométrique. $1+i$ est $\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$, on a :

$$(1+i)^6 = 2^3\exp\left(6i\frac{\pi}{4}\right) = -8i.$$

D'où, en utilisant la méthode sur les racines n-ième, on a :

$$\begin{aligned} z^6 = -8i &\iff z^6 = (1+i)^6 \\ &\iff \left(\frac{z}{1+i}\right)^6 = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0;5]\!] / \frac{z}{1+i} = \exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![0;5]\!] / z = (1+i) \times \exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

On a $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -(z-1)^6$. Le nombre 1 n'est pas solution de l'équation (car $2^6 \neq 0$) donc on peut supposer $z \neq 1$, il vient les équivalences suivantes (en posant $A_5 = [\![0;5]\!]$ et $f : z \mapsto (z-1)^6 + (z+1)^6$) :

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -1 \\ &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 \\ &\iff \exists k \in A_5 \text{ tel que } \left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \exp\left(i\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \\ &\iff \exists k \in A_5 \text{ tel que } (z+1)\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right) = (z-1)\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \\ &\iff \exists k \in A_5 \text{ tel que } z = \frac{\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)}{\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$

Il suffit après de faire prendre à k les entiers de 0 à 5. L'ensemble des solutions de cette équation est après calcul :

$$\left\{(-\sqrt{3}-2)i, -i, (\sqrt{3}-2)i, (-\sqrt{3}+2)i, i, (\sqrt{3}+2)i\right\}.$$

▲

Bien vérifier la non nullité, avant la division, de $\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$.

Corrigé

Exercice 1.4

Posons $A = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos(x))^k}$. A est bien définie car, pour tout x de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $(\cos(x))^k$ est non nul. On a :

Passer par l'exponentielle nous permet d'obtenir une somme géométrique qu'on sait expliciter.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{Im}\left(\exp\left(ikx\right)\right)}{\left(\cos\left(x\right)\right)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{Im}\left(\left(\exp\left(ix\right)\right)^k\right)}{\left(\cos\left(x\right)\right)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im}\left(\frac{\left(\exp\left(ix\right)\right)^k}{\left(\cos\left(x\right)\right)^k}\right) \end{aligned}$$

car, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\left(\frac{1}{\cos\left(x\right)}\right)^k$ est un réel. On poursuit, on reconnaît une progression géométrique dont la raison, $\frac{\exp\left(ix\right)}{\cos\left(x\right)}$, n'est pas 1 puisque $\sin\left(x\right)$ est non nul et $\frac{\exp\left(ix\right)}{\cos\left(x\right)}$ est $1 + i\frac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}$. On peut donc expliciter cette somme et obtenir :

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\exp\left(ix\right)}{\cos\left(x\right)}\right)^k\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1-\left(\frac{\exp\left(ix\right)}{\cos\left(x\right)}\right)^{n+1}}{1-\frac{\exp\left(ix\right)}{\cos\left(x\right)}}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\left(\cos(x)\right)^{n+1} - \exp\left(i(n+1)x\right)}{\left(\cos(x)\right)^{n+1} - \left(\cos(x)\right)^n \times \left(\cos(x) + i\sin(x)\right)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\left(\cos(x)\right)^{n+1} - \cos\left((n+1)x\right) - i\sin\left((n+1)x\right)}{-i\left(\cos(x)\right)^n \times \sin(x)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(i \times \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{-i\cos\left((n+1)x\right)}{\sin(x) \times \left(\cos(x)\right)^n}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\sin(x) \times \left(\cos(x)\right)^n}\right) \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos((n+1)(x))}{\sin(x) \times \left(\cos(x)\right)^n}. \end{aligned}$$

Signalons qu'on a utilisé que $\frac{1}{i}$ est $-i$ car $i^2 = -1$. ▲

Exercice 1.5

1. De la fameuse relation $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on en déduit que :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

Et, comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est positif, on obtient que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. De même, par positivité de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, on a :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)} = \sqrt{\frac{2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+2}{4}} = \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Maintenant, on sait passer de cos à sin :

$$\text{Pour tout réel } \theta, \text{ on a : } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$$

ce qui entraîne que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Soit x un réel. D'après la formule de De Moivre, on sait que $\cos(3x)$ est la partie réelle de $(\cos(x)+i\sin(x))^3$. Or $(\cos(x)+i\sin(x))^3$ est d'après la formule du binôme de Newton :

$$\cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)$$

et en identifiant la partie réelle, on a :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

3. On pose $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Pour tout θ réel, on a :

$$\begin{aligned}8\left(\cos(\theta)\right)^3 = 6\cos(\theta) + a &\iff 4\left(\cos(\theta)\right)^3 - 3\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ &\iff \cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ &\iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\ &\iff 3\theta \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3\theta \equiv -\frac{3\pi}{8}[2\pi]\\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

Pour tout θ réel, on a :

$$8\left(\cos(\theta)\right)^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2-\sqrt{2}} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

4. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{3}\right)$ sont trois solutions de (E). Ces nombres étant deux à deux distincts et (E) ayant au

Corrigé

plus trois solutions, on peut affirmer qu'on a trouvé les solutions de (E). On a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}\end{aligned}$$

On explicite de la même façon $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{3}\right)$ ce qui nous donne la réponse souhaitée.

▲

Exercice 1.6

Commençons par remarquer que f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ par composition. Pour tout x de $]-1,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1-\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}\\ &= \frac{(1+x)^2-1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\\ &= \frac{h(x)}{(1+x)^2} \text{ avec } h : x\mapsto x^2+2x+\ln(1+x)\end{aligned}$$

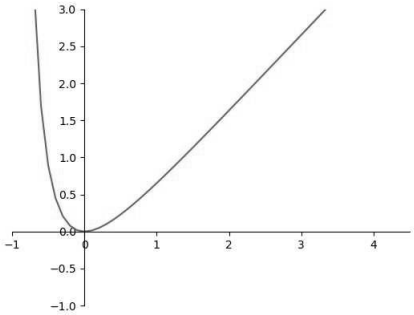
h et f' sont donc de même signe. h est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ par composition et, pour tout x de $]-1,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}h'(x) &= 2x+2+\frac{1}{1+x}\\ &= \frac{2(1+x)^2+1}{1+x}\\ &= \frac{3+2x^2+4x}{1+x}\end{aligned}$$

Le discriminant de $x\mapsto 3+2x^2+4x$ est -8, ce polynôme n'a donc pas de racine réelle et est donc de signe constant, soit strictement positif car il vaut 3 en 0. h' est donc, par quotient, positive, h est donc croissante. De $h(0)=0$, on déduit alors que h est négative sur $]-1,0]$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. f est donc décroissante sur $]-1,0]$ puis croissante. f tend vers $+\infty$ en -1 (limite obtenue par quotient) ainsi qu'en $+\infty$ (mettre au même dénominateur et invoquer les croissances comparées). Voici son tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
	$+\infty$				$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ainsi qu'un tracé :



Exercice 1.7

1. f_n, par somme, est dérivable et :

$$f_n' : x \mapsto nx^{n-1} + 4x + 1.$$

f_n' est donc strictement positive par somme et f_n est donc strictement croissante. Comme elle est de plus continue, elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $\left[f_n(0), f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right]$, soit $\left[-1, \frac{1}{2^n}\right]$. Comme 0 appartient à $\left[-1, \frac{1}{2^n}\right]$, on en déduit que f_n s'annule effectivement sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en un unique point.

2. Par définition, on sait que $x_n^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + 2x_n^2 + x_n - 1 \\ &= x_n^{n+1} - x_n^n \\ &= x_n^n(x_n - 1). \end{aligned}$$

Comme x_n appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.

3. $f_{n+1}(x_n) \leq 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ conduisent à :

$$f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$$

puis, par stricte croissance de f_{n+1}, à $x_n \leq x_{n+1}$ et donc la croissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et donc sa convergence (car on la sait déjà majorée par $\frac{1}{2}$, on invoque le théorème de la limite monotone).

Enchaînement très classique avec le théorème de la bijection continue.

4. Comme x_n appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que :

$$0 \leq x_n^n \leq \frac{1}{2^n}$$

et donc $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers 0 par le théorème des gendarmes. Or comme on sait que $x_n^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$, on en déduit que :

$$x_n^n = -2x_n^2 - x_n + 1$$

ce qui prouve que $-2L^2 - L + 1 = 0$ en notant L la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Cela entraîne que $L = -1$ ou $L = \dfrac{1}{2}$. Comme L appartient à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ car x_n appartient à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (par passage à la limite dans les inégalités), on en déduit que $L = \dfrac{1}{2}$.

▲

Exercice 1.8

Déjà, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition. Pour tout réel non nul x, par composition et produit, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Pour tout réel non nul x, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = 0$ (à l'aide du théorème des gendarmes et en rappelant que cos est bornée et $\lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$). f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. $x \mapsto 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 en 0 (de nouveau avec le théorème des gendarmes avec un produit fonction bornée par une fonction tendant vers 0) et $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 (car sin n'admet pas de limite en l'infini, d'où le résultat par composition), par l'absurde, on en déduit que f' n'admet pas de limite en 0 car, pour tout réel non nul x, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x) - 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si f' admettait une limite en 0 alors, par somme, $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admettrait une limite en 0. f' n'admet pas de limite en 0 donc en particulier f' n'est pas continue en 0 et donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. ▲

✎ *On rappelle que de classe $\mathcal{C}^1$ veut dire f continue et dérivable et f' continue.*

Exercice 1.9

1. Alors, là, f est π-périodique et impaire donc il suffit de l'étudier sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ où elle est dérivable par quotient car, pour tout x dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $4+\tan^2(x) \neq 0$. Pour tout x dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(1+\tan^2(x))(4+\tan^2(x)) - 8\tan^2(x)(1+\tan^2(x))}{(4+\tan^2(x))^2} \\ &= \frac{4(1+\tan^2(x))(2-\tan(x))(2+\tan(x))}{(4+\tan^2(x))^2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(x) \geq 0 \iff 2 - \tan(x) \geq 0 \text{ (car tout le reste est positif sur } [0;\pi/2[)$$
$$\iff x \leq \arctan(2) \text{(par stricte croissance de arctan)}$$

d'où ce tableau de variations :

x	0		$\arctan(2)$		$\pi/2$
			1		
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

2. On étudie $g : x \mapsto f(x) - x$ et on fait une banale étude de fonction. On vous laisse faire... On trouve que $g' : x \mapsto \dfrac{\tan^2(x)(4 - 5\tan^2(x))}{(4 + \tan^2(x))^2}$ et :

x	0		$\arctan\left(2/\sqrt{5}\right)$		$\pi/2$
			$g\left(\arctan\left(2/\sqrt{5}\right)\right)$		
Variation de g		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\pi/2$

et comme $g\left(\arctan\left(2/\sqrt{5}\right)\right) > 0$ et $-\pi/2 < 0$, c'est bon en appliquant le théorème de la bijection continue.

3. $u_0 \not\equiv \pi/2[\pi]$ donc $f(u_0)$ est bien définie. Déjà, on montre par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, u_n existe et appartient à $[0,1]$ (Cela se fait bien puisque pour tout réel x tel que $x \not\equiv \pi/2[\pi]$, on a $f(x) \in [0,1]$.). Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. On peut être un peu plus précis sur la localisation, $g(u_1) > 0$ et $u_1 \in [0,\pi/2]$ entraînent que u_1 appartient à $[0,r]$ puis u_2... Bref, pour tout entier naturel non nul, u_n appartient à $[0,r]$. De plus, on a prouvé en 2) que $\forall x \in [0,r], g(x) \geq 0$ donc $\forall x \in [0,r], f(x) \geq x$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \geq u_n$ i.e. $u_{n+1} \geq u_n$. Bref, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, et, par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un certain α. Or , pour tout entier naturel n, $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(u_n)) = \alpha$. Par continuité de f en α, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(u_n)) = f(\alpha)$. Par unicité de la limite, on a $f(\alpha) = \alpha$. Or on a prouvé que si $x \in]0,\pi/2]$, alors $f(x) = x \Leftrightarrow x = r$ et ici $\alpha \in]0,\pi/2]$. (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi/2 \geq u_n \geq u_1 > 0$ donne par passage à la limite $\pi/2 \geq \alpha \geq u_1 > 0$).

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers r.

▲

Exercice 1.10

Soit x un réel strictement positif, sous réserve d'existence, on a :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(x\ln(x) \times \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right)$$
$$= \exp\left(x\ln(x) \times \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)\right).$$

Or, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)=0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right) &\underset{+\infty}{\sim} x\ln(x)\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x}\\ &\underset{+\infty}{\sim} 1 \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln(x)\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)\right)$ existe et vaut 1 . Par continuité de la fonction exponentielle en 1, la première limite recherchée vaut e. Passons à la seconde. Soit x un réel. Sous réserve d'existence, on a :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2+x^3}}=\exp\left(\frac{1}{x^2+x^3}\times\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right).$$

C'est bien une forme indéterminée. Utilisons un peu les équivalents : on sait que $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}-1\right)=0$ et $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$, on en déduit :

$$\ln\left(1+\left(\frac{\sin(x)}{x}-1\right)\right)\underset{0}{\sim}\frac{\sin(x)}{x}-1$$

et donc, par quotient, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+x^3}\times\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &\underset{0}{\sim}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x^2}\\ &\underset{0}{\sim}\frac{\sin(x)-x}{x^3}. \end{aligned}$$

✎ *Utiliser le moins possible les développements limités afin d'être efficace !*

Or $\sin(x)\underset{0}{=}x-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$ d'où :

$$\frac{\sin(x)-x}{x^3}\underset{0}{\sim}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}\underset{0}{\sim}-\frac{1}{6}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2+x^3}\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)\right)=-\dfrac{1}{6}$ puis, par continuité de exp en $-\dfrac{1}{6}$, on obtient que la limite recherchée vaut $\exp\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

▲

Exercice 1.11

On pose $g : h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ pour revenir en 0. On a donc :

$$\begin{aligned} g(h) &\underset{0}{=} \left(\frac{1}{h} - 2\right) \times \exp\left(\frac{1-h}{1+h}\right) \\ &\underset{0}{=} \left(\frac{1}{h} - 2\right) \times \exp\left((1-h) \times (1 - h + h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right))\right) \\ &\underset{0}{=} \left(\frac{1}{h} - 2\right) \times \exp\left(1 - 2h + 2h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\ &\underset{0}{=} e \times \left(\frac{1}{h} - 2\right) \exp(v(h)) \end{aligned}$$

en posant $v : h \mapsto -2h + 2h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)$. On a donc $\lim\limits_{h\to 0}(v(h)) = 0$. Bref, on compose avec le développement limité de exp pour trouver que :

$$\begin{aligned} g(h) &\underset{0}{=} e \times \left(\frac{1}{h} - 2\right)\left(1 - 2h + 4h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\ &\underset{0}{=} e \times \left(\frac{1}{h} - 4 + 8h + \mathrm{o}\left(h\right)\right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne que : $f(x) \underset{\infty}{=} ex - 4e + \frac{8e}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. On peut donc conclure que $y = ex - 4e$ est l'équation de l'asymptote à C_f en l'infini et que C_f est en-dessous de cette asymptote au voisinage de $-\infty$ et au-dessus au voisinage de $+\infty$. On justifie ce positionnement en disant que $x \mapsto f(x) - (ex - 4e)$ et $x \mapsto \frac{8e}{x}$ ont même signe au voisinage de l'infini car, d'après le développement limité donné, on peut affirmer que : $f(x) - (ex - 4e) \underset{\infty}{\sim} \frac{8e}{x}$.

▲

Exercice 1.12

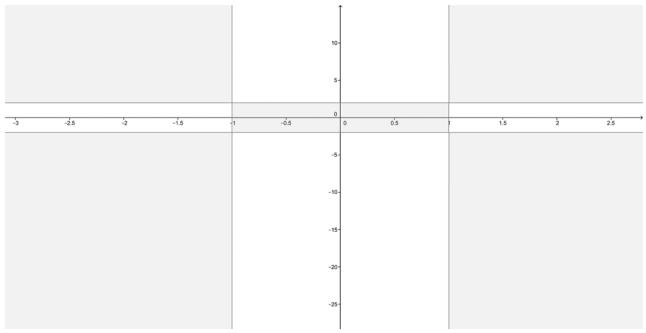
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g\,(x,y) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (x^2-4)(y^2-1) & \geq & 0 \\ y^2 - 1 & \neq & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 4 & \geq & 0 \\ y^2 - 1 & > & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 4 & \leq & 0 \\ y^2 - 1 & < & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} x \geq 2 & \text{ou} & x \leq -2 \\ y > 1 & \text{ou} & y < -1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{lll} -2 \leq & x & \leq 2 \\ -1 < & y & < 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On se résume, le domaine de définition de g est donc :

$$(\ [-2,2]\times]-1,1[\ ) \cup ((\ ]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\ ) \times (\ ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\ ))$$

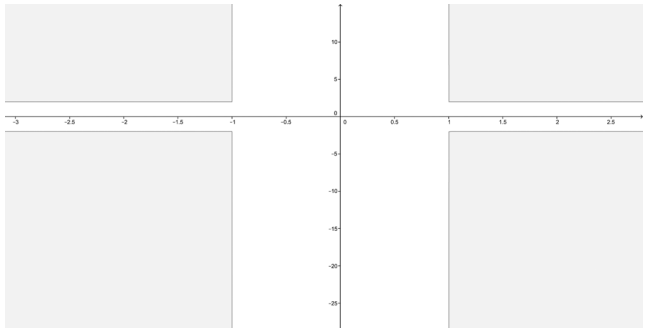
dont voici une illustration :



On raisonne de la même façon pour h :

$$h\,(x,y) \text{ est définie} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x^2-4) & \geq & 0 \\ y^2-1 & > & 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 2 & \text{ou} & x \leq -2 \\ y > 1 & \text{ou} & y < -1 \end{cases}$$

Cela nous fait donc $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[) \times (\,]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$ comme ensemble de définition dont voici une illustration :



▲

Exercice 1.13

On va tracer les courbes de niveaux de g. Pour tout réel λ, pour tout couple de réels (x,y), on a :

$$g(x,y) = \lambda \iff x^2+y^2-2x+3y = \lambda$$
$$\iff (x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} + \lambda$$

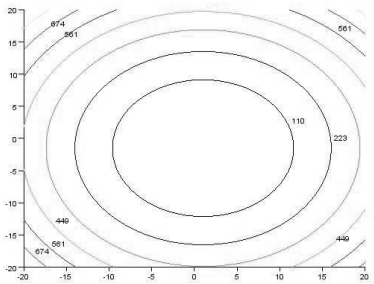
Si $\lambda \geq -\dfrac{13}{4}$, l'intersection de la surface représentative de g avec le plan $z=\lambda$ donne donc un cercle de rayon $\sqrt{\dfrac{13}{4}+\lambda}$ et de centre $\left(1,-\dfrac{3}{2},\lambda\right)$.

Si $\lambda < -\dfrac{13}{4}$, la surface représentative de g et le plan $z=\lambda$ sont disjoints.

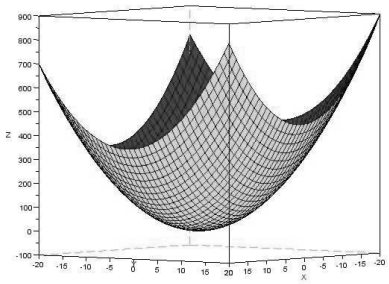
On peut utiliser Python pour obtenir aussi une représentation :

```
deff('z=f(x,y)','z=x*x+y*y-2*x+3*y')
import matplolib.pyplot as plt
import numpy as np
x=np.arange(-20,20,0.1)
y=x
plt.plot3d(x,y,feval(x,y,f))
plt.contour(x, y, feval(x,y,f),7)
```

On obtient ainsi :



Courbe de niveau



Surface représentative

▲

Exercice 1.14

Par composition et produit, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On prend x et y deux réels.

1. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right) \\ &= x \times \exp(x) \times \exp\left(xy^2\right) \end{aligned}$$

Si x est positif alors $\exp\left(xy^2\right) \geq 1$ et $x \times \exp(x) \geq 0$ d'où :

$$f(x,y) \geq x \times \exp(x).$$

Si x est négatif alors $\exp\left(xy^2\right) \leq 1$ et $x \times \exp(x) \leq 0$ donc, on obtient de nouveau que : $f(x,y) \geq x \times \exp(x)$.

2. On a :

$$g'(x) = \exp(x) \times (x+1).$$

On cherche le signe de g' : Tout ça, vous savez faire et vous obtenez donc un minimum de g en -1 valant $\dfrac{-1}{e}$.

3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc chercher ses points critiques . Soit a et b deux réels, on note $\mathcal{P}$ la propriété "(a,b) est un point critique de f",

Ne pas confondre point critique et extremum.

Corrigé

on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} ((b^2+1)a+1)\exp\left(a\left(b^2+1\right)\right) & = & 0 \\ (2ba^2)\exp\left(a\left(b^2+1\right)\right) & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & -1 \\ a & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{car } 0 \neq -1
\end{aligned}
$$

Ainsi, si $(a,b) \neq (-1,0)$, $f(a,b)$ n'est pas un extremum de f. Soient x et y deux réels. On sait que $f(x,y) \geq xe^x$ donc $f(x,y) \geq g(x)$. Or $g(x) \geq \dfrac{-1}{e}$ et $f(-1,0) = \dfrac{-1}{e}$ (ça tombe bien !) donc $f(x,y) \geq f(-1,0)$. $f(-1,0)$ est donc le minimum de f et il n'est atteint qu'en $(-1,0)$.

▲

Chapitre 2

Équations différentielles

UN MATHÉMATICIEN



Bien que n'étant pas à l'origine de grandes théories, le mathématicien suisse **Leonhard Euler** (1707-1783) fixe un nouveau cadre d'étude qui incorpore le calcul différentiel et, plus généralement, les processus infinis : c'est la naissance de l'analyse.

Dans ses nombreux articles, il résout d'innombrables problèmes grâce à des méthodes nouvelles. Sa puissance de travail, ses connaissances encyclopédiques en font sans doute le plus extraordinaire mathématicien de tous les temps.

Un peu d'histoire

À la fin du XVII^{e} siècle l'introduction du calcul différentiel, indépendamment par Newton et Leibniz, a permis de développer de nouvelles méthodes de résolution de problèmes, en particulier en mécanique et en physique. La cinématique a servi de support intuitif au développement de ses nouveaux outils ; la vitesse d'un mobile est la dérivée de l'équation du mouvement et une primitive de son accélération. Aussi, des relations entre ces trois données débouchent sur des équations différentielles. Des méthodes de résolution de ces équations se sont développées tout au long du XVIII^{e} siècle mais on sait qu'il n'existe aucune méthode générale.

Les sciences économiques n'ont introduit que plus tardivement de telles méthodes mais celles-ci se sont avérées très efficientes et sont devenues indispensables.

Objectifs

les incontournables

- Comprendre la notion d'équation différentielle autonome.
- Avoir entendu parler de la méthode d'Euler.
- Maîtriser la méthode de la variation de la constante.
- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à cœfficients constants.

et plus si affinités

- Savoir approximer la solution d'une équation différentielle avec la méthode d'Euler en étant guidé.
- Savoir résoudre une équation différentielle autonome d'ordre un en étant guidé.
- Savoir faire du recollement en étant guidé.

Résumé de cours

Retour sur les équations différentielles de BCPST1

Équations différentielles second ordre à cœfficients constants

Dans tout ce paragraphe, on note I un intervalle de réels, g une fonction définie sur I, a un réel non nul, b et c deux autres réels, (E) l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur I :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E)$$

et (H) l'équation homogène associée à (E), c'est-à-dire l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur I.

Proposition 2.1.— Pour résoudre (H), on résout son équation caractéristique, c'est l'équation, d'inconnue x complexe, $ax^2 + bx + c = 0$. On distingue alors les cas suivants :

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2, pour toute fonction f dérivable deux fois sur I, f est solution de (H) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que :
$$f : x \mapsto \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x).$$
2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, pour toute fonction f dérivable deux fois sur I, f est solution de (H) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que :
$$f : x \mapsto (\lambda + \mu x) \times \exp(r_0 x).$$
3. Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes non réelles, elles seront de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec β et α deux réels. Pour toute fonction f dérivable deux fois sur I, f est solution de (H) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que :
$$f : x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \exp(\alpha x).$$
On peut dire aussi (c'est également correct) que : pour toute fonction f dérivable deux fois sur I, f est solution de (H) si et seulement si il existe un **complexe** λ tel que :
$$f : x \mapsto \lambda \exp((\alpha + i\beta)x) + \overline{\lambda} \exp((\alpha - i\beta)x).$$

Proposition 2.2.— La solution générale de (E) est, en cas d'existence, la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

Équations différentielles linéaire du premier ordre

Dans tout ce paragraphe, on note I un intervalle de réels, a et b deux fonctions continues sur I, (E) l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable sur I :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

et (H) l'équation homogène associée à (E), c'est-à-dire l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ d'inconnue y fonction dérivable sur I.