ECG
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES INFORMATIQUE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques approfondies Informatique ECG - 2e année

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI
Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Nicolas PIERSON
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un mathématicien » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-066687
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Troisième semestre

1. Compléments d'algèbre linéaire 1
2. Réduction : endomorphismes et matrices carrées 23
3. Produit scalaire – Norme – Orthogonalité 71
4. Espaces euclidiens 99
5. Fonctions de plusieurs variables : première approche 139
6. Variables aléatoires discrètes – Espérance – Espérance totale..... 161
7. Variables aléatoires à densité 203
8. Lois à densité usuelles 245
9. Covariance – Corrélation linéaire 289
10. Couples de variables aléatoires 333
11. Vecteurs aléatoires 373

Quatrième semestre

12. Endomorphismes symétriques – Fonctions quadratiques 421
13. Projecteurs orthogonaux – Problèmes de minimisation..... 465
14. Fonctions de plusieurs variables – Calcul différentiel 497
15. Fonctions de plusieurs variables – Extrema..... 521
16. Convergences en loi et en probabilité..... 561
17. Estimation..... 605

Informatique

18. Représentations graphiques avec Python 649
19. Simulation de lois et estimation avec Python..... 693

Index 733

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

UN MATHÉMATICIEN



Georg Frobenius (1849-1917) effectue ses études dans les universités de Göttingen puis de Berlin où il suit les cours des plus grands mathématiciens allemands de l'époque comme Kronecker, Kummer et Weietrsrass. Par la suite, il enseigne dans cette même ville puis à l'École polytechnique de Zurich.
Les travaux de Frobenius en algèbre linéaire ont justifié et généralisé plusieurs résultats effleurés par ses prédécesseurs, en particulier sur le polynôme caractéristique.

Un peu d'histoire

Dans la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle, différents mathématiciens ont manipulé les coefficients de systèmes d'équations linéaires, comme Bézout, Vandermonde et même Lagrange. En l'absence de notation sous forme de tableau, on aboutissait à des calculs lourds mais ces mathématiciens avaient compris l'intérêt du déterminant.

Ce n'est cependant qu'en 1850 que le mathématicien anglais James Sylvester introduit, sous le nom de matrice, un tableau de nombres dont les éléments représentent des coordonnées des images de vecteur d'une base par une application linéaire. Son compatriote Arthur Cayley définit, peu après, les opérations d'addition et de multiplication, les traitant ainsi comme des nombres et non des tableaux de nombres. Il démontre en dimension 2 et 3 le théorème de Cayley-Hamilton ; Frobenius donnera une preuve générale en 1878.

Objectifs

Les incontournables

- Connaître la définition d'une matrice de passage et les formules de changement de bases.
- Connaître la définition et les propriétés de la trace d'une matrice.
- Connaître la définition de deux matrices semblables.
- Connaître la définition de la somme de r sous-espaces vectoriels.

Et plus si affinités

- Savoir montrer qu'une somme de r sous-espaces est directe.

■■ Résumé de cours

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension n (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

■ Somme de r sous-espaces vectoriels

Ce paragraphe généralise les notions vues au **chapitre 21** du **tome 1** à une somme de r sous-espaces vectoriels.

❑ Somme

Définition 1.1. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle *somme* de F_1, F_2, ..., F_r, l'ensemble noté $F_1 + F_2 + ... + F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$ défini par :

$$F_1 + F_2 + ... + F_r = \left\{ x_1 + x_2 + ... + x_r, (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r \right\}.$$

Théorème 1.1. — La somme de r sous-espaces de E est un sous-espace vectoriel de E.

❑ Somme et somme directe

Définition 1.2. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F = F_1 + F_2 + ... + F_r$ est *directe* si pour tout vecteur x de F, il existe un unique r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que :

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_r$$

Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ ou $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Théorème 1.2. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe si, et seulement si, pour tout r-uplet $(x_1, ..., x_r)$ de $F_1 \times ... \times F_r$, on a l'implication : $x_1 + x_2 + ... + x_r = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ x_i = 0_E$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer qu'une somme de r sous-espaces est directe ?**

Remarque 1.1. — Il ne faut pas oublier le cas particulier $r = 2$ pour lequel on a vu dans le **tome 1** le résultat suivant : la somme $F_1 + F_2$ est directe si, et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition 1.3. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.

- On dit que E est *somme* de F_1, F_2, ..., F_r si $E = F_1 + F_2 + ... + F_r$.
- On dit que E est *somme directe* de F_1, F_2, ..., F_r si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Théorème 1.3. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
E est somme de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme de *r* sous-espaces?**

Théorème 1.4. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un *unique* r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

Théorème 1.5. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_r$.
E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, la famille obtenue par *concaténation* (c'est-à-dire juxtaposition) des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_r$ est une base de E.

Théorème 1.6. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si :

$$E = F_1 + F_2 + ... + F_r \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \dim F_i = \dim E$$

En d'autres termes, E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.
- $\dim F_1 + \dim F_2 + ... + \dim F_r = \dim E$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme directe de *r* sous-espaces?**

■ Changement de bases

❑ Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.4. — On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_p)$ une famille de p vecteurs de E ($p\in\mathbb{N}^*$). On appelle *matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$*, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la j^{e} colonne sont les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.2. — Soit x un vecteur de E et $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées du vecteur x dans une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Propriété 1.1. — Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ une famille de n vecteurs de E. La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est une base de E.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer matriciellement qu'une famille est une base ?**

❑ Matrice de passage

Définition 1.5. — On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 1.2. — Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

❑ Formules de changement de bases

Théorème 1.7. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout vecteur x de E, on note X (respectivement X') la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $X=PX'$.

Définition 1.6. — (Rappel) Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Si f est un endomorphisme de E, on appelle *matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$* (ou *dans la base $\mathcal{B}$*) la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, dont la j^{e} colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 1.8. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout endomorphisme f de E, on note A (respectivement A') la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $A'=P^{-1}AP$.

❑ Matrices semblables

Définition 1.7. — Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, et telle que : $A' = P^{-1}AP$.

Théorème 1.9. — Deux matrices carrées sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes ou non (dans ce dernier cas, les matrices sont égales et on a $P = I$).

■ Trace d'une matrice carrée

❑ Définition

Définition 1.8. — Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace* de A, le réel noté $\mathrm{Tr}(A)$, égal à la somme des éléments diagonaux de A. On a donc : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Remarque 1.3. — La trace d'une matrice n'a de sens que si la matrice est carrée.

❑ Linéarité de la trace

Propriété 1.3. — L'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$

❑ Trace d'un produit

Propriété 1.4. — Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$$

❑ Invariance de la trace par similitude

Propriété 1.5. — Deux matrices semblables ont même trace. Autrement dit, si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right)$$

■ Somme de sous-espaces

❑ Méthode 1.1. Comment montrer qu'une somme de *r* sous-espaces est directe ?

Pour montrer que la somme de trois sous-espaces F_1, F_2 et F_3 est directe, on montre que : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
La généralisation à r sous-espaces se fait sans difficulté : la somme $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe si, et seulement si, on a :
$\forall (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$, $x_1 + x_2 + ... + x_r = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!]$, $x_i = 0_E$.

⇨ Exercice 1.5

Exemple. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$, on donne :
$F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(-x)\}$.
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$.
$H = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$.
Montrer que la somme de *F*, *G* et *H* est directe.

Soit P_1, P_2, P_3 des vecteurs appartenant respectivement à *F*, *G* et *H* tels que $P_1 + P_2 + P_3 = 0$.
En évaluant cette égalité en 1 puis en 2, on obtient : $P_1(1) = P_1(2) = 0$.
Comme P_1 appartient à *F*, on a donc aussi : $P_1(-1) = P_1(-2) = 0$.
Le polynôme P_1 de $\mathbb{R}_3[x]$, possède au moins 4 racines distinctes, c'est donc le polynôme nul.
Puisque P_1 est nul, il ne reste plus que l'égalité $P_2 + P_3 = 0$ et, en l'évaluant en 0 puis en 3, on trouve : $P_3(0) = 0$ et $P_2(3) = 0$.
Les polynômes P_2 et P_3 ont donc eux aussi au moins 4 racines distinctes (0, 1, 2 et 3) donc ils sont nuls.
Finalement, on a : $P_1 = P_2 = P_3 = 0$.
La somme $F + G + H$ est directe et on peut donc la noter $F \oplus G \oplus H$.

❑ Méthode 1.2. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme de *r* sous-espaces ?

Pour montrer qu'un espace E est la somme de r sous-espaces F_1, F_2 …, F_r, il suffit de prouver que :
$\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple.
Pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$, on note A_k le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont toutes les colonnes sauf la k-ième sont nulles.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 + A_2 + ... + A_n$.
Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En considérant, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les matrices M_k dont les colonnes sont nulles, sauf la k-ième qui est égale à la k-ième colonne de M.
On a, par construction, $M = M_1 + ... + M_n$, et comme chaque matrice M_k appartient à A_k, on obtient bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

❑ Méthode 1.3. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme directe de *r* sous-espaces ?

Pour montrer qu'un espace E est somme directe de r sous-espaces F_1, F_2 …, F_r, il y a trois méthodes :
- On montre qu'on obtient une base de E en concaténant des bases de F_1, …, F_r.
- On montre que les deux conditions suivantes sont réalisées :
  ❶ $\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.
  ❷ $\dim F_1 + \dim F_2 + ... + \dim F_r = \dim E$.
- On montre (par analyse-synthèse), que pour tout vecteur x de E, il existe un unique r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$ (voir l'**exercice 1.6**).

Remarque. Lorsque $r = 2$, relire le **chapitre 21** du **tome 1** et voir l'**exercice 1.4**.

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple. On reprend l'exemple précédent.
Pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$, on note A_k le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont toutes les colonnes sauf la k-ième sont nulles.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$.

Méthode 1.

Notons $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, la famille $\left(E_{1,k},...,E_{n,k}\right)$ est une base de A_k et, en concaténant ces bases, on obtient la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$.

Méthode 2.

On a déjà montré dans la **méthode 1.2** que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 + A_2 + ... + A_n$ donc il ne reste plus qu'à vérifier que $\dim A_1 + \dim A_2 + ... + \dim A_n = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$.

Notons $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, la famille $\left(E_{1,k},...,E_{n,k}\right)$ est génératrice de A_k par définition, elle est libre en tant que sous-famille de la famille libre $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, donc c'est une base de A_k, ce qui prouve que $\dim A_k = n$, et ainsi $\dim A_1 + \dim A_2 + ... + \dim A_n = n \times n = n^2$.

On peut conclure que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$.

■ Matrice de passage

❑ Méthode 1.4. Comment montrer matriciellement qu'une famille est une base ?

Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ de n vecteurs de E est une base de E, on montre que la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.
Cette matrice est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2**

Exemple. Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne $u = (1,0,0)$, $v = (-1,2,-2)$ et $w = (3,-1,2)$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $u = e_1$, $v = -e_1 + 2e_2 - 2e_3$ et $w = 3e_1 - e_2 + 2e_3$. La matrice de la famille (u,v,w) dans $\mathcal{B}$ est donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ qui admet pour réduite de Gauss la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on a effectué dans P l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$).

Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc P est inversible et ainsi, (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Soit A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est semblable à B et B est semblable à C, alors A est semblable à C.	☐	☐
2.	Toute matrice semblable à une matrice scalaire est scalaire.	☐	☐
3.	Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$	☐	☐
4.	L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace égale à 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
5.	L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
6.	Toute matrice de trace nulle est non inversible.	☐	☐
7.	Si F, G, H sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F \cap G \cap H = \{0_E\}$, alors la somme $F+G+H$ est directe.	☐	☐
8.	On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2) \oplus ... \oplus \mathrm{Vect}(e_n)$	☐	☐
9.	Si E_1, ..., E_k sont des sous-espaces d'un espace vectoriel E, alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dim(E_1 + ... + E_k) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k)$	☐	☐
10.	Soit f un endomorphisme de E. Si F_1, …, F_r sont des sous-espaces de E stables par f, c'est-à-dire tels que : $\forall k \in [\![1, r]\!],\ x \in F_k \Rightarrow f(x) \in F_k$, alors $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est stable par f.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on donne : $f_1=(1,1,2,1)$, $f_2=(1,-1,0,1)$, $f_3=(0,0,-1,1)$ et $f_4=(1,2,2,0)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. a) Écrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}'=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ dans $\mathcal{B}$.

b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. a) Déterminer P^{-1}.

b) En déduire les coordonnées du vecteur $x=(-1,1,1,2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

❑ **Exercice 1.2.** — Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

1. a) Écrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}'=(A,B,C,D)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}$.

a) Déterminer P^{-1}.

b) En déduire les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}'$.

❑ **Exercice 1.3.** — Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer la propriété du cours stipulant que, si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a : $\mathrm{Tr}(MN)=\mathrm{Tr}(NM)$.

2. a) En déduire la preuve de l'autre propriété du cours selon laquelle deux matrices semblables ont même trace.

b) Montrer qu'il n'existe aucun couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB-BA=I$.

❑ **Exercice 1.4.** — Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note Tr l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace. On rappelle que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})=\mathbb{R}$.

2. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

3. Établir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})\oplus\mathrm{Vect}(I)$.

D'après EDHEC

❑ **Exercice 1.5**.** — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, p_i désigne un projecteur de E.

On suppose que pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$: $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.

Montrer que la somme $\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_n)$ est directe.

D'après EML

❑ **Exercice 1.6*.** — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que l'endomorphisme f vérifie $f^3 = f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id_E)$.

❑ **Exercice 1.7*.** — Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Pour tout entier naturel k de $[\![1,n]\!]$, on note E_k l'ensemble constitué des polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ qui s'annulent en k.

1. a) Montrer que E_k est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Quelle est la dimension de E_k ?

2. a) Montrer que $\mathbb{R}_n[x] = E_1 + E_2 + ... + E_n + \mathbb{R}_0[x]$.

b) Établir que $\mathbb{R}_0[x] \subset E_1 + E_2 + ... + E_n$ et en déduire que $\mathbb{R}_n[x] = E_1 + E_2 + ... + E_n$.

c) A-t-on $\mathbb{R}_n[x] = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$?

3. Montrer qu'on a, pour tout k de $[\![1,n]\!]$: $\mathbb{R}_n[x] = E_k \oplus \mathbb{R}_0[x]$.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercices 1.1 et **1.2.** Pour la question **2.b)**, utiliser les formules de changement de base.

Exercice 1.4. Pour la question **1**, ne pas oublier de justifier que Tr n'est pas l'application nulle.

Exercice 1.5. Utiliser la **méthode 1.1**.

Exercice 1.6. Effectuer un raisonnement analyse-synthèse.

Exercice 1.7. Pour la question **1.b)**, écrire, pour tout polynôme P de E_k, $P(x) = (x-k)Q(x)$, où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Pour la question **2.a)**, on pourra considérer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, les polynômes Q_k définis par : $Q_k(x) = \dfrac{1}{n}\big(P(x) - P(k)\big)$.

Pour la question **2.b)**, trouver par exemple les réels α et β permettant d'écrire $a = \alpha(x-1) + \beta(x-2) + 0 + ... + 0$.

Pour la question **2.c)**, considérer les dimensions des sous-espaces E_k.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
V	V	F	F	V	F	F	V	V	V

1. Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est semblable à B signifie qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que : $B = P^{-1}AP$. B est semblable à C signifie qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que : $C = Q^{-1}BQ$.
On obtient ainsi : $C = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q = \left(Q^{-1}P^{-1}\right)A\left(PQ\right)$. En notant $R = PQ$, on sait que R est inversible (produit de deux matrices inversibles) et on a : $R^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.
On a donc : $C = R^{-1}AR$. La matrice A est bien semblable à C.

2. Soit B une matrice scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $B = \lambda I_n$. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à B, c'est qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que : $A = P^{-1}BP$. On en déduit que : $A = P^{-1}\left(\lambda I_n\right)P = \lambda P^{-1}I_nP = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n$.
On en conclut que toute matrice semblable à une matrice scalaire est scalaire.

3. Prenons par exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On constate que : $\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) = 4 \times 2 = 8$ et $\mathrm{Tr}(AB) = 4$. Ainsi : $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.

4. Comme la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de trace nulle, elle n'appartient pas à l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace égale à 1, qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Notons H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
Par définition, H est le noyau de l'application linéaire Tr (trace) donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Remarque. On pouvait montrer (ce n'est pas très difficile) que H est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non vide, et stable par combinaison linéaire.

6. Par exemple, considérons dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elle est bien de trace nulle, et elle est inversible (car elle est diagonale à coefficients diagonaux non nuls).

Corrigé

7. Considérons $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}\big((1,1,1)\big)$, $G=\text{Vect}\big((1,0,1)\big)$ et $H=\text{Vect}\big((0,1,0)\big)$. Bien sûr, on a : $\{0\}\subset F\cap G\cap H$. Par ailleurs, si x est élément de $F\cap G\cap H$, alors x appartient à G donc sa deuxième composante est nulle. Mais x appartient aussi à H donc sa première et sa troisième composante sont nulles. Ainsi, tout élément de $F\cap G\cap H$ est nul.
On en déduit que : $F\cap G\cap H\subset\{0\}$. On a donc montré : $F\cap G\cap H=\{0\}$.
Cependant, l'implication $\big[\forall(x,y,z)\in F\times G\times H,(x+y+z=0)\Rightarrow x=y=z=0\big]$ n'est pas vraie.
En effet, en choisissant $x=(1,1,1)$, $y=(-1,0,-1)$ et $z=(0,-1,0)$, on a bien : $x\in F$, $y\in G$, $z\in H$ et $x+y+z=0$. Pourtant, aucun des vecteurs *x*, *y* ou *z* n'est le vecteur nul.
La somme $F+G+H$ n'est donc pas directe.

8. Les vecteurs e_1, e_2, …, e_n sont non nuls donc (e_1), (e_2), …, (e_n) sont des bases, respectivement de $\text{Vect}(e_1)$, $\text{Vect}(e_2)$, …, $\text{Vect}(e_n)$ et la concaténation de ces bases est une base de $\mathbb{R}^n$ (en l'occurrence la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
Ainsi, $\mathbb{R}^n=\text{Vect}(e_1)\oplus\text{Vect}(e_2)\oplus\ldots\oplus\text{Vect}(e_n)$.

9. C'est vrai et ça se prouve par récurrence.

- Pour $k=1$, on a bien $\dim(E_1)\leq\dim(E_1)$.
- Si l'on suppose, pour un entier *k* fixé supérieur ou égal à 1, que $\dim(E_1+\ldots+E_k)\leq\dim(E_1)+\ldots+\dim(E_k)$, alors, d'après la formule de Grassmann (**théorème 21.12** du **tome 1**), on a :

$$\dim(E_1+\ldots+E_k+E_{k+1})=\dim(E_1+\ldots+E_k)+\dim(E_{k+1})-\dim((E_1+\ldots+E_k)\cap E_{k+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\dim(E_1+\ldots+E_k+E_{k+1})\leq\dim(E_1)+\ldots+\dim(E_{k+1})-\dim((E_1+\ldots+E_k)\cap E_{k+1})$$

Comme une dimension est positive, on a $\dim((E_1+\ldots+E_k)\cap E_{k+1})\geq 0$ et on peut majorer davantage, ce qui donne :

$$\dim(E_1+\ldots+E_k+E_{k+1})\leq\dim(E_1)+\ldots+\dim(E_k)+\dim(E_{k+1})$$

- On a bien montré par récurrence que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dim(E_1+\ldots+E_k)\leq\dim(E_1)+\ldots+\dim(E_k)$$

10. Par définition d'une somme de sous-espaces, pour tout élément *z* de $F_1+\ldots+F_r$, il existe un *r*-uplet $(y_1,\ldots,y_r)\in F_1\times F_2\times\ldots\times F_r$ tel que $z=y_1+\ldots+y_r$.
Par linéarité de *f*, on a : $f(z)=f(y_1)+\ldots+f(y_r)$. Puisque F_1, …, F_r sont stables par *f*, on a $f(y_1)\in F_1$, $f(y_2)\in F_2$, …, $f(y_r)\in F_r$, ce qui prouve que $f(z)$ est élément de $F_1+\ldots+F_r$, c'est-à-dire que $F_1+\ldots+F_r$ est stable par *f*.
La somme de *r* sous-espaces de *E*, stables par *f*, est stable par *f*.

❑ Les erreurs classiques

- Ne pas croire que la somme $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe lorsque $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_r = \{0_E\}$: ce n'est vrai que si $r = 2$.
- Attention aux propriétés de la trace. Par linéarité, la trace d'une somme de matrices est égale à la somme des traces. En revanche, la trace du produit de deux matrices n'est pas égale, en général, au produit des traces.
- Il n'y pas de lien entre inversibilité d'une matrice et le fait que cette matrice soit de trace nulle.

Corrigé

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. a) La matrice P de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est, par définition :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Avec les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on trouve : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour finir, avec $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$, on a une réduite de Gauss de P : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est triangulaire sans élément diagonal nul, elle est donc inversible et P aussi. Ceci prouve que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

⇨ *Méthode 1.4*

2. a) Par la méthode de Gauss Jordan (en commençant par les mêmes opérations élémentaires qu'à la question précédente), on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Soit X la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ et X' celle formée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. Le **théorème 1.7** donne $X = PX'$, soit : $X' = P^{-1}X$.
Comme $x = (-1, 1, 1, 2)$, les coordonnées de x dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ sont $(-1, 1, 1, 2)$.

On a donc $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$X' = P^{-1}X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$ sont donc $(3,-2,1,-2)$.

Exercice 1.2

1. a) On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a : $A = E_{1,1}$, $B = E_{1,1} + 2E_{1,2}$, $C = E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{2,1}$ et $D = E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{2,1} + 4E_{2,2}$.

La matrice P de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est, par définition :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) La matrice P est triangulaire sans élément diagonal nul, elle est donc inversible.
Ceci prouve que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

⇨ *Méthode 1.4*

2. a) Par la méthode de Gauss Jordan, on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Soit X la matrice colonne formée des coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$ et X' celle formée des coordonnées de M dans $\mathcal{B}'$. Le **théorème 1.7** donne $X = PX'$, soit : $X' = P^{-1}X$.
Comme $M = 6E_{1,1} + 4E_{1,2} + 4E_{2,2}$, les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$ sont : $(6,4,0,4)$.

Corrigé

On a donc $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$X' = P^{-1}X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de M dans $\mathcal{B}'$ sont donc $(4,2,-1,1)$.

Exercice 1.3

1. En notant $m_{i,j}$ et $n_{i,j}$ les termes généraux des matrices M et N, le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de MN est : $r_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, n_{k,j}$. Celui de la matrice NM est : $s_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} n_{i,\ell}\, m_{\ell,j}$.

On a donc : $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n} r_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, n_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} n_{k,i} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{k,i} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} s_{k,k} = \mathrm{Tr}(NM).$

Conclusion :

$$\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$$

2. a) Soit A et B deux matrices semblables. Il existe donc une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que : $B = P^{-1}AP$.

On a alors : $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(P^{-1}A\right)P\right) = \mathrm{Tr}\left(P\left(P^{-1}A\right)\right)$, cette dernière égalité étant justifiée grâce à la première question. On obtient donc :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\left(PP^{-1}A\right) = \mathrm{Tr}(IA) = \mathrm{Tr}(A)$$

b) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB - BA = I$.

Alors, en prenant la trace, on aurait : $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I)$, puis, par linéarité de la trace, on obtiendrait $\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = n$, d'où $n = 0$ car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

C'est absurde puisque $n \geq 2$. Par conséquent, il n'existe aucun couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB - BA = I$.

Exercice 1.4

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, il est donc soit de dimension 0 et $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ ne contient que le réel 0, soit de dimension 1 et $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ est alors égale à $\mathbb{R}$.

Comme $\mathrm{Tr}(I) = n \neq 0$, $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ contient un autre réel que 0 donc la première possibilité n'est pas recevable. En conclusion :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$$

2. D'après la formule du rang, on a : $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Comme $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = 1$, on a :

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1$$

3. La matrice I n'étant pas la matrice nulle, on a : $\dim \mathrm{Vect}(I) = 1$. Ceci permet d'écrire :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \dim \mathrm{Vect}(I)$$

Il reste donc à montrer que $\mathrm{Vect}(I) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{0\}$.

Soit donc M une matrice appartenant à $\mathrm{Vect}(I) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Comme M appartient à $\mathrm{Vect}(I)$, il existe un réel α tel que $M = \alpha I$ et on a $\mathrm{Tr}(M) = n\alpha$. Comme, de plus, M appartient à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, on obtient $n\alpha = 0$. De plus, n est supérieur ou égal à 2 donc on a $\alpha = 0$, ce qui donne $M = 0$.

On vient de montrer que : $\mathrm{Vect}(I) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant évidente (tous les espaces vectoriels contiennent le vecteur nul), on a bien :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$$

Exercice 1.5

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit n vecteurs $y_1, ..., y_n$ appartenant respectivement à $\mathrm{Im}(p_1), ..., \mathrm{Im}(p_n)$ tels que $y_1 + ... + y_n = 0$. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, y_i appartient à $\mathrm{Im}(p_i)$ donc il existe un vecteur x_i de E tel que $y_i = p_i(x_i)$. On a donc : $p_1(x_1) + ... + p_n(x_n) = 0$.

Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, on applique le projecteur p_j à la relation précédente, ce qui donne :

$$p_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)\right) = 0 \text{ d'où } \sum_{i=1}^{n} (p_j \circ p_i)(x_i) = 0 \text{ (linéarité de } p_j)$$

Pour $i \neq j$, $p_j \circ p_i = 0$ et de plus, $p_j \circ p_j = p_j$ (car p_j est un projecteur), donc il reste un seul terme de la somme : $p_j(x_j) = 0$. Ainsi : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ y_j = 0$.

En conclusion, la somme $\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_n)$ est directe.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.6

On effectue un raisonnement analyse-synthèse.

• Soit x un vecteur de E. On suppose qu'il existe trois vecteurs x_1, x_2 et x_3 respectivement dans $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id_E)$ tels que $x = x_1 + x_2 + x_3$.

Rappelons que pour tout réel λ, on a : $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \Leftrightarrow f(x) = \lambda x$.

Ici, on a donc : $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = x_2$ et $f(x_3) = -x_3$.

On en déduit :

$$f(x) = x_2 - x_3$$

En appliquant à nouveau *f*, on obtient :

$$f^2(x) = x_2 + x_3$$

De ces deux égalités, on peut conclure :

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(f^2(x) + f(x)\right) \text{ et } x_3 = \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right)$$

Enfin, puisque $x = x_1 + x_2 + x_3$, on a nécessairement :

$$x_1 = x - x_2 - x_3 = x - f^2(x)$$

Cette partie « analyse » prouve que si $x = x_1 + x_2 + x_3$ alors x_1, x_2 et x_3 sont uniques (définis comme ci-dessus).

• Soit *x* un vecteur de *E*. On pose $x_1 = x - f^2(x)$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(f^2(x) + f(x)\right)$, $x_3 = \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right)$.

Comme $f^3 = f$, on a successivement :

$f(x_1) = f(x) - f^3(x) = 0$ donc : $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

$f(x_2) = \frac{1}{2}\left(f^3(x) + f^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f^2(x)\right) = x_2$ donc : $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.

$f(x_3) = \frac{1}{2}\left(f^3(x) - f^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f^2(x)\right) = -x_3$ donc : $x_3 \in \mathrm{Ker}(f + Id_E)$.

Enfin, on a : $x_1 + x_2 + x_3 = x - f^2(x) + \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f(x) = x$.

Cette partie « synthèse » prouve qu'il existe x_1, x_2 et x_3 tel que $x = x_1 + x_2 + x_3$ puisque ceux trouvés dans la partie « analyse » conviennent.

• Conclusion *:*

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id_E)$$

➪ *Méthode 1.3*

Exercice 1.7

1. a) Tout d'abord, E_k est non vide puisqu'il contient le polynôme nul (qui s'annule bien en *k*) et on a bien l'inclusion de E_k dans $\mathbb{R}_n[x]$ puisque E_k contient des polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$.

Pour finir, si l'on prend deux polynômes *P* et *Q* de E_k, ainsi qu'un réel λ, on a, par définition de l'addition de deux polynômes et du produit d'un polynôme par un réel :

$$(P + \lambda Q)(k) = P(k) + \lambda Q(k) = 0 + \lambda \times 0 = 0$$

Ceci prouve que $P + \lambda Q$ appartient à E_k.

Conclusion : E_k est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Pour tout polynôme P de E_k, on a $P(x)=(x-k)Q(x)$, où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, ce qui s'écrit : $P(x)=(x-k)\sum_{i=0}^{n-1} q_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} q_i\, x^i (x-k)$. Ceci montre que la famille $\left(x^i(x-k)\right)_{0\le i\le n-1}$ est génératrice de E_k. De plus, c'est une famille libre car elle contient des polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts (**propriété 8.11** du **tome 1**). Par conséquent, cette famille est une base de E_k et comme elle contient *n* polynômes, on a $\dim E_k = n$.

2. a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on peut écrire :

$$P(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(P(x)-P(k)\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(k)$$

Comme chaque polynôme Q_k défini par $Q_k(x)=\frac{1}{n}\left(P(x)-P(k)\right)$ est élément de E_k, la première somme est élément de $E_1+E_2+...+E_n$ et la deuxième est un polynôme constant élément de $\mathbb{R}_0[x]$ donc on a :

$$\mathbb{R}_n[x]=E_1+E_2+...+E_n+\mathbb{R}_0[x]$$

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_0[x]$ pour lequel il existe un réel a tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a$. On peut écrire $a=\underbrace{a(x-1)}_{\in E_1}+\underbrace{a(2-x)}_{\in E_2}+\underbrace{0}_{\in E_3}+...+\underbrace{0}_{\in E_n}$, ce qui prouve que :

$$\mathbb{R}_0[x]\subset E_1+E_2+...+E_n$$

Pour finir, on a $\mathbb{R}_n[x]=E_1+E_2+...+E_n+\mathbb{R}_0[x]$ et $\mathbb{R}_0[x]\subset E_1+E_2+...+E_n$ donc $\mathbb{R}_n[x]\subset E_1+E_2+...+E_n$. Comme l'inclusion réciproque est acquise (**théorème 1.1**), on a bien :

$$\mathbb{R}_n[x]=E_1+E_2+...+E_n$$

⇨ *Méthode 1.2*

c) Comme $\dim E_k = n$, alors $\sum_{k=1}^{n}\dim E_k = n^2$, et comme $\dim\mathbb{R}_n[x]=n+1$ on en déduit $\sum_{k=1}^{n}\dim E_k \neq \dim\mathbb{R}_n[x]$ car l'équation $n^2=n+1$ n'a pas de solution entière.

Ainsi, $\mathbb{R}_n[x]$ n'est pas somme directe de $E_1, E_2, ..., E_n$.

⇨ *Méthode 1.3*

3. En s'inspirant de la méthode utilisée dans la question **2.a)** on a, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$P(x) = \underbrace{P(x) - P(k)}_{\in E_k} + \underbrace{P(k)}_{\in \mathbb{R}_0[x]}$$

On a donc $\mathbb{R}_n[x] = E_k + \mathbb{R}_0[x]$.

Comme $\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim E_k + \dim \mathbb{R}_0[x]$, on peut conclure (**théorème 21.17** du **tome 1**) que la somme est directe :

$$\mathbb{R}_n[x] = E_k \oplus \mathbb{R}_0[x]$$

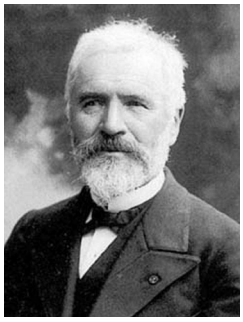
Remarque. Il était également facile de justifier que $E_k \cap \mathbb{R}_0[x] = \left\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\right\}$: en effet si l'on prend un polynôme dans l'intersection, ce polynôme est constant et il s'annule en k donc c'est le polynôme nul.

⇨ *Méthode 1.3*

Chapitre 2

Réduction : endomorphismes et matrices carrées

UN MATHÉMATICIEN



Camille Jordan (1838-1922) entre premier à l'École polytechnique à 17 ans et s'engage aussitôt dans la recherche, malgré son activité d'ingénieur. Son œuvre touche tous les domaines des mathématiques. Ses travaux sont particulièrement novateurs dans le cadre de la théorie des groupes et de l'algèbre linéaire mais aussi en géométrie analytique. Par son esprit synthétique et ses talents de pédagogue, il forme, encourage et fascine toute une génération de mathématiciens.

Un peu d'histoire

L'algèbre linéaire, sous la forme que nous connaissons, se met en place seulement dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle. Pourtant, nombre de ses propriétés ont été entrevues bien auparavant dans l'étude de problèmes concernant des systèmes linéaires à plusieurs inconnues ou des équations différentielles. Leonhard Euler, Gabriel Cramer, Étienne Bézout mais surtout Alexandre Vandermonde en ont été de brillants contributeurs.

Des problèmes de mécanique conduisent à la recherche de valeurs propres ; c'est ainsi que Joseph Lagrange en est sans doute l'initiateur dans des études sur la stabilité du système solaire.

En 1829, Cauchy montre qu'une matrice symétrique à valeurs propres distinctes est diagonalisable. Weierstrass généralise ce résultat en 1858. Peu après, Jordan et Frobenius raffinent les méthodes de réduction de matrices, même pour celles qui ne sont pas diagonalisables.

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Connaître les définitions de valeur propre, vecteur propre et sous-espace propre d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

▷ Savoir déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

▷ Savoir démontrer qu'une matrice (ou un endomorphisme) est diagonalisable (ou pas).

▷ Savoir utiliser un polynôme annulateur d'une matrice (ou d'un endomorphisme) pour la recherche de valeurs propres.

■ Et plus si affinités

▷ Maîtriser quelques applications de la diagonalisation (étude de suites récurrentes imbriquées, calcul des puissances d'une matrice...).

▷ Réduire des endomorphismes ou des matrices non diagonalisables.

▷ Réduire des matrices de taille n.

■■ Résumé de cours

La lettre E désigne un espace vectoriel de dimension n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

■ Rappels

La lettre f désigne un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

❑ Polynôme matriciel, polynôme d'endomorphisme

Définition 2.1. — Soit r un entier naturel et P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que : $P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$.

$P(A)$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $P(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k$.

$P(f)$ est l'endomorphisme de E défini par : $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k$.

Exemple 2.1. — Si P est le polynôme défini par $P(x) = 3x^2 - x - 2$, alors :

$$P(A) = 3A^2 - A - 2I \text{ et } P(f) = 3f^2 - f - 2Id_E$$

Propriétés 2.1. — Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, α et β deux réels. On a :

$$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \text{ et } (PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$$
$$(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f) \text{ et } (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

❑ Polynôme annulateur

Définition 2.2. — On dit que le polynôme P est *annulateur* de f (respectivement de A) si $P(f) = 0$ (respectivement $P(A) = 0$).

Exemple 2.2. — Si f est une homothétie, (c'est-à-dire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f = \lambda Id_E$), alors le polynôme P défini par $P(x) = x - \lambda$ est annulateur de f. En effet : $P(f) = f - \lambda Id_E = 0$.

Exemple 2.3. — Si f est un projecteur de E, alors le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - x$ est annulateur de f. En effet, tout projecteur f vérifie : $f^2 = f$ donc $P(f) = 0$.

Théorème 2.1. — Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.
Tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.

■ Éléments propres

❑ Éléments propres d'une matrice

La lettre A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définitions 2.3. — Le scalaire λ est *valeur propre* de A s'il existe un vecteur colonne X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé *spectre* de A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Si λ est une valeur propre de A, tout vecteur colonne X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$ est appelé *vecteur propre* de A associé à la valeur propre λ, et l'ensemble $E_\lambda(A)$ de tous les vecteurs X tels que $AX = \lambda X$, est appelé *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ.

Théorème 2.2. — Le scalaire λ est valeur propre de A si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
En particulier, 0 est valeur propre de A si, et seulement si, la matrice A n'est pas inversible.

Remarque 2.1. — On a aussi l'équivalence : A est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de A.

Propriété 2.2. — Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Propriété 2.3. — Le sous-espace propre de A, noté $E_\lambda(A)$, associé à la valeur propre λ, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (A - \lambda I)X = 0\}$.

Propriété 2.4. — Soit λ un scalaire et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.
Pour tout polynôme Q, on a : $Q(A)X = Q(\lambda)X$.

Remarque 2.2. — Cas particuliers importants.
• Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors pour tout polynôme Q, X est un vecteur propre de la matrice $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.
• Soit λ un réel et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$. Pour tout entier naturel k, on a : $A^k X = \lambda^k X$.

Théorème 2.3. — Si P est un polynôme non nul annulateur de A, alors toute valeur propre de A est racine de P.

⇨ **Méthode 2.3. Comment déterminer, avec un polynôme annulateur, les valeurs propres d'une matrice ?**

Théorème 2.4. — Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

❑ Éléments propres d'un endomorphisme

La lettre f désigne un endomorphisme de E et on rappelle que E est un espace vectoriel de dimension n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Définitions 2.4. — Le scalaire λ est *valeur propre* de f s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé *spectre* de f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Si λ est une valeur propre de f, tout vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$ est appelé *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ, et l'ensemble $E_\lambda(f)$ de tous les vecteurs x tels que $f(x) = \lambda x$, est appelé *sous-espace propre* de f associé à la valeur propre λ.

Propriété 2.5. — Soit λ une valeur propre de f.
Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ de f, associé à la valeur propre λ, est un sous-espace vectoriel de E et on a :

$$E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\left(f - \lambda Id_E\right)$$

Théorème 2.5. — Le réel λ est valeur propre de f si, et seulement si $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.
En particulier : 0 est valeur propre de l'endomorphisme f si, et seulement si, f n'est pas injectif.

Remarque 2.3. — Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme injectif est bijectif. On a donc les équivalences suivantes :

- Le réel λ est valeur propre de f si, et seulement si, $f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif.
- En particulier, 0 est valeur propre de f si, et seulement si, f n'est pas bijectif.

On a donc la propriété suivante :

Propriété 2.6. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
L'endomorphisme f de E est bijectif si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de f.

Théorème 2.6. — Soit E un espace vectoriel de dimension n.
L'endomorphisme f de E possède au plus n valeurs propres et ses sous-espaces propres sont en somme directe.

Propriété 2.7. — Pour tout endomorphisme f de E, on a :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \mathrm{Ker}\left(f - \lambda Id_E\right) \leq \dim E$$

Théorème 2.7. — La concaténation (c'est-à-dire la juxtaposition) de familles libres de sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forme une famille libre de E. En particulier, si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de f et si $x_1, x_2, ..., x_p$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, alors la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est libre.

Propriété 2.8. — Soit λ un scalaire et x un vecteur de E tel que : $f(x) = \lambda x$.
Pour tout polynôme Q, on a : $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$.

Remarque 2.5. — Cas particuliers importants.

• Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors pour tout polynôme Q, x est un vecteur propre de l'endomorphisme $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

• Soit λ un scalaire et x un vecteur de E tel que : $f(x) = \lambda x$.
Pour tout entier naturel k, on a : $f^k(x) = \lambda^k x$.

Théorème 2.8. — Si P est un polynôme non nul annulateur de f, alors toute valeur propre de f est racine de P.

⇨ **Méthode 2.4. Comment déterminer, avec un polynôme annulateur, les valeurs propres d'un endomorphisme ?**

❑ Lien entre éléments propres d'une matrice et d'un endomorphisme

Théorème 2.9. — Soit $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Soit x un vecteur de E et X la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

• Le scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de A.

• x est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

⇨ **Méthode 2.1. Comment déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme ?**
⇨ **Méthode 2.2. Comment déterminer les sous-espaces propres d'une matrice ou d'un endomorphisme ?**

■ Diagonalisation des matrices

❑ Matrices diagonalisables

Définition 2.5. — La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$ ou, ce qui revient au même, telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque 2.6. — Autrement dit, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

❑ Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

Théorème 2.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant comme valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ $(p \leq n)$, et $E_{\lambda_1}(A), ..., E_{\lambda_p}(A)$ les sous-espaces propres de A respectivement associés à ces valeurs propres. La matrice A est diagonalisable si, et seulement si : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(A)$.

Théorème 2.11. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant comme valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ $(p \leq n)$, et $E_{\lambda_1}(A), ..., E_{\lambda_p}(A)$ les sous-espaces propres de A respectivement associés à ces valeurs propres. La matrice A est diagonalisable si, et seulement si : $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) = n$.

❑ Condition suffisante de diagonalisabilité

Théorème 2.12. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède exactement n valeurs propres distinctes 2 à 2, alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

⇨ **Méthode 2.5. Comment déterminer si une matrice est diagonalisable ?**

■ Diagonalisation des endomorphismes

❑ Endomorphismes diagonalisables

Définition 2.6. — L'endomorphisme f de E est *diagonalisable* s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

❑ Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

Théorème 2.13. — L'endomorphisme f de E est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Théorème 2.14. — Soit f un endomorphisme de E admettant comme valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ $(p \leq n)$, et $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_p}(f)$ les sous-espaces propres de f respectivement associés à ces valeurs propres.

L'endomorphisme f de E est diagonalisable si, et seulement si : $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(f)$.

Théorème 2.15. — Soit f un endomorphisme de E admettant comme valeurs propres λ_1, ..., λ_p $(p \leq n)$, et $E_{\lambda_1}(f)$, ..., $E_{\lambda_p}(f)$ les sous-espaces propres de f respectivement associés à ces valeurs propres.

L'endomorphisme f de E est diagonalisable si, et seulement si : $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E$.

Théorème 2.16. — L'endomorphisme f de E est diagonalisable si, et seulement si, l'une de ses matrices dans une base de E est diagonalisable.

❑ Condition suffisante de diagonalisabilité

Théorème 2.17. — Si $\dim E = n$ et si l'endomorphisme f de E possède exactement n valeurs propres distinctes 2 à 2, alors f est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

⇨ **Méthode 2.6. Comment déterminer si un endomorphisme est diagonalisable ?**

■ Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice avec Python

On suppose importées les librairies `numpy` et `numpy.linalg` (avec les racourcis `np` et `al`).

Théorème 2.18. — On suppose déclarée une variable `M` contenant une matrice M carrée d'ordre n, où n est un entier naturel non nul.
La commande **`al.eig`**`(M)` renvoie deux valeurs : un vecteur dont les éléments sont les valeurs propres de M et une matrice dont la i^e colonne est un vecteur propre de M associé à la i^e valeur propre.

Remarque 2.7. — L'instruction `Sp,vp=al.eig(M)` affecte à la variable `Sp` un vecteur à n composantes contenant les valeurs propres de M, et à la variable `vp` une matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les vecteurs propres associés.

■ Éléments propres

❑ Méthode 2.1. Comment déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme ?

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A.

- Les valeurs propres de A, ou de f, sont les scalaires λ pour lesquels la matrice $A-\lambda I$ n'est pas inversible.
- Si la matrice A est triangulaire, les valeurs propres de A, ou de f, sont les coefficients diagonaux de A.
- Dans le cas général, on détermine une réduite de Gauss de $A-\lambda I$. Les valeurs propres de A, ou de f, sont les valeurs de λ qui annulent les coefficients diagonaux de cette réduite.

⇨ Exercices 2.1, 2.2, 2.8, 2.9

Exemple 1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$.

Comme la matrice A est triangulaire, on a : $\mathrm{Sp}(A)=\{1,4,6\}$.

Exemple 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par : $f(x)=(x_1-2x_2+2x_3,-2x_1+x_2+2x_3,-2x_1-2x_2+5x_3)$. On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer les valeurs propres de A (ou de f).

On a : $f(e_1)=f(1,0,0)=(1,-2,-2)=e_1-2e_2-2e_3$.

De même, on trouve : $f(e_2)=-2e_1+e_2-2e_3$ et $f(e_3)=2e_1+2e_2+5e_3$. On a donc :

$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&1-\lambda&2\\-2&-2&5-\lambda\end{pmatrix}$.

En permutant les lignes 1 et 3, on obtient : $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Puis, avec les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 + (1-\lambda)L_1$, on obtient : $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 2(-3+\lambda) & \lambda^2-6\lambda+9 \end{pmatrix}$.

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ donne finalement : $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda+3 \end{pmatrix} = G_\lambda$.

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si $\begin{cases} 3-\lambda=0 \\ \text{ou} \\ \lambda^2-4\lambda+3=0 \end{cases}$.

On en déduit : $\mathrm{Sp}(A) = \{1,3\}$.

❑ Méthode 2.2. Comment déterminer les sous-espaces propres d'une matrice ou d'un endomorphisme ?

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A. Soit λ une valeur propre λ de A (ou de f).

• Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ sont les matrices colonnes X solutions du système $(A-\lambda I)X = 0$.

• Les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ sont les vecteurs x de E dont la matrice X de x dans $\mathcal{B}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

⇨ **Exercices 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.8, 2.9**

Exemple. On reprend l'**exemple 2** de la **méthode 2.1**. Déterminer les sous-espaces propres de A, puis de f.

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on résout le système $(A-\lambda I)X = 0$, qui est équivalent à $G_\lambda X = 0$, où G_λ est la réduite de Gauss de $A-\lambda I$ obtenue dans l'**exemple 2** de la méthode précédente.

• Pour la valeur propre $\lambda = 1$: $(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y+4z=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$.

Finalement, $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• Pour la valeur propre $\lambda = 3$: $(A-3I)X = 0 \Leftrightarrow -2x-2y+2z=0 \Leftrightarrow x=-y+z$.

Finalement, $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbb{R}(y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On en déduit que :

Le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 1 est : $E_1(f) = \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$.

Le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 3 est : $E_3(f) = \text{Vect}\big((-1,1,0),(1,0,1)\big)$.

■ Polynôme annulateur

❑ Méthode 2.3. Comment déterminer, avec un polynôme annulateur, les valeurs propres d'une matrice ?

Soit *A* une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si on connaît un polynôme annulateur *P* de *A*, on sait que toute valeur propre de *A* est racine de *P*. On détermine donc les racines de *P* et les valeurs propres de *A* sont à chercher parmi ces racines.
Pour savoir si une racine λ de *P* est effectivement valeur propre de *A*, on peut utiliser la propriété suivante :
λ est valeur propre de *A* si et seulement si la matrice $A-\lambda I$ n'est pas inversible.

⇨ Exercices 2.3, 2.4, 2.5, 2.7

Exemple. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que le polynôme *P* défini par $P(x) = x^2 + 2x - 3$ est annulateur de *A*. En déduire les valeurs propres de *A*.

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $A^2 + 2A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le polynôme *P* est annulateur de *A*. Or, *P* admet deux racines : -3 et 1. Comme toute valeur propre de *A* est racine de *P*, on en déduit que les seules valeurs propres possibles de *A* sont -3 et 1, c'est-à-dire : $\text{Sp}\, A \subset \{-3,1\}$.

On a : $A-I=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ et $A+3I=\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&0&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$. En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de ces matrices, on constate que $A-I$ est non inversible (car $C_1=C_3$) donc 1 est valeur propre de A et $A+3I$ est non inversible (car $C_1+2C_2-C_3=0$) donc -3 est aussi valeur propre de A.
On peut donc maintenant conclure que : $\mathrm{Sp}\,A=\{-3,1\}$.

❑ Méthode 2.4. Comment déterminer, avec un polynôme annulateur, les valeurs propres d'un endomorphisme ?

Soit f un endomorphisme de E. Si on connaît un polynôme annulateur P de f, on sait que toute valeur propre de f est racine de P. On détermine donc les racines de P et les valeurs propres de f sont à chercher parmi ces racines.

⇨ **Exercices 2.6, 2.12**

Exemple. Soit p et q deux projecteurs associés d'un espace vectoriel E et f l'endomorphisme de E défini par : $f=3p-q$.

Vérifier que le polynôme P défini par $P(x)=x^2-2x-3$ est un polynôme annulateur de f.

En supposant que p n'est ni l'endomorphisme nul, ni l'application Id_E, déterminer les valeurs propres de f.

• On a : $P(f)=f^2-2f-3Id_E=(3p-q)^2-2(3p-q)-3Id_E$.

En développant, on obtient : $P(f)=9p^2-3p\circ q-3q\circ p+q^2-6p+2q-3Id_E$.

Les projecteurs p et q étant associés, on a : $p^2=p$, $q^2=q$ et $p\circ q=q\circ p=0$.

On en déduit : $P(f)=3p+3q-3Id_E=3(p+q)-3Id_E$.

Comme $p+q=Id_E$ (p et q sont des projecteurs associés), on obtient : $P(f)=0$.

Comme P admet deux racines -1 et 3, les seules valeurs propres possibles de f sont -1 et 3.
On a donc : $\mathrm{Sp}(f)\subset\{-1,3\}$.

• On remarque que : $f+Id_E=3p-q+p+q=4p$, car $p+q=Id_E$.

On a donc : $\mathrm{Ker}(f+Id_E)=\mathrm{Ker}(p)$. De plus, $\mathrm{Ker}(p)\neq\{0_E\}$, sinon p serait injectif, donc bijectif, et en composant l'égalité $p^2=p$ par p^{-1}, on obtiendrait $p=Id_E$, ce qui est faux.

On en conclut que $\mathrm{Ker}(f+Id_E)\neq\{0_E\}$ et que -1 est effectivement valeur propre de f.

• De la même façon, $f-3Id_E=3p-q-3(p+q)=-4q$, car $p+q=Id_E$. On a donc :

$\mathrm{Ker}(f-3Id_E)=\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Ker}(Id_E-p)$. Or p est un projecteur, donc $\mathrm{Ker}(Id_E-p)=\mathrm{Im}(p)$.

Ainsi, on a : $\mathrm{Ker}(f-3Id_E)=\mathrm{Im}(p)$. Comme $\mathrm{Im}(p)\neq\{0_E\}$ (l'endomorphisme p n'est pas nul), on en conclut que $\mathrm{Ker}(f-3Id_E)\neq\{0_E\}$ et ainsi, 3 est effectivement valeur propre de f.

• On peut donc conclure que : $\mathrm{Sp}(f)=\{-1,3\}$.

■ Diagonalisation

❑ Méthode 2.5. Comment déterminer si une matrice est diagonalisable ?

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On détermine d'abord les valeurs propres de A.

• Si A possède n valeurs propres 2 à 2 distinctes, alors A est diagonalisable. En prime, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

• Si A possède p valeurs propres λ_1, ..., λ_p ($p < n$), on détermine les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$, ..., $E_{\lambda_p}(A)$, puis il suffit de calculer $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A)$.

Si $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) = n$, alors A est diagonalisable. Sinon, A n'est pas diagonalisable.

• Dans le cas particulier où A possède une seule valeur propre λ, on peut effectuer le raisonnement suivant : si A était diagonalisable, on aurait $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, ce qui signifie, dans le cas présent, que $D = \lambda I$. On aurait donc $A = P(\lambda I)P^{-1}$, c'est-à-dire $A = \lambda I$. On en conclut que si $A \neq \lambda I$, A n'est pas diagonalisable.

⇨ **Exercices 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11**

Remarque. Lorsqu'une matrice A est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Si on note P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ et D la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres associés respectivement aux vecteurs de $\mathcal{B}$, on a la relation : $A = PDP^{-1}$.

Exemple 1. On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est diagonalisable.

La matrice A est triangulaire, on a donc immédiatement : $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4, 6\}$.

La matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède exactement trois valeurs propres donc A est diagonalisable.

Exemple 2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Déterminer une matrice P, inversible, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

En reprenant les résultats établis dans les exemples des **méthodes 2.1** et **2.2**, on sait que A possède deux valeurs propres (1 et 3).

On sait aussi que les sous-espaces propres correspondants sont définis par :

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

On a donc : $\dim E_1(A) = 1$ (une famille génératrice formée d'un vecteur non nul est une base) et $\dim E_3(A) = 2$ (même chose avec une famille génératrice de deux vecteurs non proportionnels). Comme $\dim E_1(A) + \dim E_3(A) = 3$ et comme A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.

En notant $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et on a : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Exemple 3. La matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

La matrice A est triangulaire, on a immédiatement : $\text{Sp}(A) = \{1\}$. Si A était diagonalisable, on aurait $A = PDP^{-1}$, avec $D = I$ puisque D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 (1 étant ici la seule valeur propre de A). On aurait donc $A = I$, ce qui est faux (à cause du coefficient $a_{1,3}$ qui vaut 1). La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

❑ Méthode 2.6. Comment déterminer si un endomorphisme est diagonalisable ?

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On détermine les valeurs propres de f (ou celles de n'importe laquelle de ses matrices).

- Si f possède exactement n valeurs propres, alors f est diagonalisable. En prime, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
- Si f possède p valeurs propres λ_1, ..., λ_p ($p < n$), on détermine les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f)$, ..., $E_{\lambda_p}(f)$.

Dans certains cas, on a, "sans effort" : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ et f est diagonalisable.

Dans les autres cas, on calcule $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(f)$. Si $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(f) = n$, alors f est diagonalisable. Sinon, f n'est pas diagonalisable.

⇨ **Exercices 2.6, 2.12**

Exemple 1. On admet que l'application f qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[x]$ associe $f(P)$, défini par $f(P)(x)=(1-2x)P(x)+(2x^2+5x-3)P'(x)$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[x]$.

On note $\mathcal{B}=(e_0\ ,e_1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[x]$ et A la matrice de f dans $\mathcal{B}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

On a $f(e_0)(x)=1-2x$ donc $f(e_0)=e_0-2e_1$ et $f(e_1)(x)=-3+6x$ donc $f(e_1)=-3e_0+6e_1$, d'où $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de A (et de f). On a $A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & -3\\ -2 & 6-\lambda\end{pmatrix}$.

$\lambda\in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow (1-\lambda)(6-\lambda)-6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-7\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ou $\lambda=7$.

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}_1[x]$ admet deux valeurs propres distinctes et comme $\dim\mathbb{R}_1[x]=2$, f est diagonalisable.

Exemple 2. L'endomorphisme f défini dans l'**exemple** de la **méthode 2.1** est-il diagonalisable ?

En reprenant les résultats établis dans les exemples des **méthodes 2.1** et **2.2**, on sait que f possède deux valeurs propres (1 et 3) et que les sous-espaces propres correspondants sont définis par : $E_1(f)=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et $E_3(f)=\mathrm{Vect}\big((-1,1,0),(1,0,1)\big)$.

On a donc, comme à l'**exemple 2** de la **méthode 2.5**, $\dim E_1(f)=1$ et $\dim E_3(f)=2$, d'où $\dim E_1(f)+\dim E_3(f)=3$ et comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, alors f est diagonalisable.

Exemple 3. Montrer que l'endomorphisme f, défini dans l'**exemple** de la **méthode 2.4**, est diagonalisable.

On a vu (**méthode 2.4**) que : $\mathrm{Sp}(f)=\{-1,3\}$.

De plus, on a montré : $\mathrm{Ker}(f+Id_E)=\mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{Ker}(f-3Id_E)=\mathrm{Im}(p)$.

Comme p est un projecteur, on a : $E=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$.

Ceci s'écrit : $E=\mathrm{Ker}(f+Id_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-3Id_E)$.

L'espace E est somme directe des sous-espaces propres de f, donc f est diagonalisable.

■■ Vrai/Faux

E désigne un espace vectoriel de dimension finie.

		Vrai	Faux
1.	Toute matrice diagonale est diagonalisable.	☐	☐
2.	Toute matrice diagonalisable est inversible.	☐	☐
3.	Si A est une matrice diagonalisable, $A+2I$ est diagonalisable.	☐	☐
4.	Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$, $Q(D)$ est une matrice diagonale.	☐	☐
5.	La matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ est diagonalisable.	☐	☐
6.	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Pour tout polynôme Q, la matrice $Q(A)$ est diagonalisable.	☐	☐
7.	Soit f un endomorphisme de E et P un polynôme annulateur de f. Pour tout vecteur x de E, on a : $P(f(x))=0$.	☐	☐
8.	Tout endomorphisme de E possède une infinité de polynômes annulateurs.	☐	☐
9.	Soit f un endomorphisme de E. Si P est le polynôme défini par $P(x)=(x-1)(x-2)$, alors $P(f)=f^2-3f+2$.	☐	☐
10.	Soit f un endomorphisme de E. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, les endomorphismes f et $P(f)$ commutent.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 2.1.** — Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

b) Vérifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^{-1}$.

2. Montrer que la matrice B n'a aucune valeur propre.

3. a) Déterminer les valeurs propres de C.

b) La matrice C est-elle diagonalisable ?

❑ **Exercice 2.2.** — Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on donne :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ et } C=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.

b) Vérifier que la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis, donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $B = PDP^{-1}$.

3. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.

b) La matrice C est-elle diagonalisable ?

❑ **Exercice 2.3.** — Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les racines du polynôme P défini par $P(x)=1-x^3$.

2. a) Calculer A^3 et en déduire un polynôme annulateur de A. Donner alors les valeurs propres possibles de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

❑ **Exercice 2.4.** — Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on donne : $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que le polynôme P défini par $P(x)=x^3+x^2-2x$ est un polynôme annulateur de A.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

❑ **Exercice 2.5.** — Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on donne :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$$

1. a) Calculer A^2 et A^3.

b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.

c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On note, pour tout réel a, $M(a)=I+2aA+2a^2A^2$ et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

a) Calculer pour tout couple de réels (a,b), le produit $M(a)M(b)$ et vérifier que ce produit appartient à E.

b) En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.

3. Soit a un réel non nul.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.

b) Calculer $\left(M(a)-I\right)^3$.

c) En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.

d) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

D'après EML

❑ **Exercice 2.6*.** — Soit p et q deux endomorphismes non nuls de E tels que $p+q=Id_E$.
On note a et b deux nombres réels distincts et on considère l'endomorphisme f de E défini par : $f=ap+bq$. On suppose de plus que :

$$f^2=a^2p+b^2q$$

1. On note P le polynôme défini par : $P(x)=(x-a)(x-b)$.

a) Montrer que $P(f)=0$.

b) En déduire que p et q sont des projecteurs de E qui commutent.

2. Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f-aId_E)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(f-bId_E)$.

3. a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Montrer que f est diagonalisable.

❑ **Exercice 2.7.** — Soit a et b deux réels. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on donne les matrices suivantes :

$$M=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Calculer J^2 et en déduire un polynôme annulateur de J.

b) Déterminer les valeurs propres de J et vérifier qu'il existe une matrice P inversible, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $J=PDP^{-1}$ où $D=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

2. a) Exprimer M comme combinaison linéaire de J et de I.

b) En déduire que M est diagonalisable et préciser les valeurs propres de M.

❑ **Exercice 2.8.** — On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

2. En déduire qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n sous forme de tableau matriciel.

4. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0=1$, $v_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1}=7u_n+2v_n \\ v_{n+1}=-4u_n+v_n \end{cases}$.

a) On note $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n et v_n en fonction de n.

❑ **Exercice 2.9.** ** — Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i-j|=1$ et 0 sinon. Par exemple, $A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A_3 est diagonalisable. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $A_3=PDP^{-1}$.

2. Soit $\theta\in\left]0,\pi\right[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $s_0=0$ et pour tout entier naturel k : $s_{k+2}-2\cos\theta\, s_{k+1}+s_k=0$ et on **admet** que, si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à S_θ, alors :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ s_k=s_1\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

Montrer que S_θ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ et m le plus grand des réels $|x_1|, ..., |x_n|$.

a) Montrer que :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_2 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$$

b) Montrer, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, que : $|\lambda| \times |x_k| \leq 2m$, puis en déduire que $|\lambda| \leq 2$.

c) On suppose que $|\lambda| < 2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$. Montrer que la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ s_k = x_k \text{ et } s_{n+1} = 0$$

En déduire qu'il existe un entier p de $[\![1, n]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$.

4. Pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$, on note $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout p de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$A_n X_p = \lambda_p X_p$$

b) En déduire que A_n est diagonalisable.

D'après EML

❑ **Exercice 2.10.** ** — Soit f un endomorphisme de E (de dimension $n \geq 1$) et p un entier naturel non nul tel que : $f^p = 0$. On note p_0 le plus petit entier tel que : $f^{p_0} = 0$.

1. a) Démontrer qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $\left(u, f(u), ..., f^{p_0-1}(u)\right)$ est libre.

b) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$. Montrer que P est un polynôme annulateur de f si, et seulement si, x^{p_0} divise $P(x)$.

2. a) Rappeler une factorisation de $x^{p_0} - 1$.

b) En déduire que $Id_E - f$ est inversible et expliciter $(Id_E - f)^{-1}$ en fonction de f.

3. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

b) En déduire qu'il existe un hyperplan H tel que $\mathrm{Im}(f) \subset H$.

4. a) Soit g la restriction de f à H. Vérifier que g est un endomorphisme de H tel que : $g^p = 0$.

b) En raisonnant par récurrence sur n ($n = \dim E$), montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

❑ **Exercice 2.11*.** — Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels. On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1. Vérifier que $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. a) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

b) Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leq 2$.

c) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq 2$.

d) Conclure que $g \circ f$ n'est ni surjective, ni injective.

3. En déduire une valeur propre de BA.

4. On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Montrer que $BX \neq 0$.

b) Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est valeur propre de BA.

c) En déduire que BA est diagonalisable.

D'après EDHEC

❑ **Exercice 2.12.** — Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note Tr l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace. On rappelle que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1$, ce qui a été démontré à l'**exercice 1.4** du **chapitre 1**. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{Tr}(M)\, J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui serait facile à vérifier.

1. a) Établir que le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - 2x + 1$ est un polynôme annulateur de g.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.