Patrice Struillou

Licence
Master

Équations fonctionnelles

Cours et exercices corrigés

Équations différentielles, équations intégrales
et équations aux dérivées partielles



ellipses

Références sciences

Équations fonctionnelles

Cours et exercices corrigés

Équations différentielles, équations intégrales et équations aux dérivées partielles

Patrice Struillou

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-080386
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2023
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

L'inconnue d'une ***équation fonctionnelle*** est une fonction d'une ou plusieurs variables (réelles, dans cet ouvrage). Nous étudierons trois types d'équations fonctionnelles :

- des ***équations différentielles***, qui expriment une relation entre une fonction d'une seule variable réelle (ou une *distribution*) et une ou plusieurs de ses dérivées ;
- des ***équations aux dérivées partielles*** (EDP), relations entre une fonction de plusieurs variables réelles (ou une distribution) et ses dérivées partielles ;
- des ***équations intégrales***, où la fonction inconnue apparaît sous le signe d'intégrale (par exemple une équation de convolution est une équation intégrale).

L'ouvrage est une version très étendue du cours d'*équations fonctionnelles pour la physique* que j'enseigne à l'ENSSAT (École Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie), école d'ingénieurs de l'Université de Rennes située à Lannion. Dans les heures dédiées à cet enseignement, il est impossible d'approfondir l'ensemble des sujets abordés. Cette petite frustration est à l'origine de l'écriture du livre, commencé il y a plus de neuf ans. L'ouvrage est donc accessible aux élèves-ingénieurs et aux étudiants de master de physique. Ceux-ci pourront sans doute se concentrer sur les méthodes et les très nombreux exemples, dont beaucoup sont directement issus de la physique.

Cependant, un bon nombre de développements et d'exercices s'adresse plutôt aux étudiants en mathématiques. Ils se situent à un niveau de L3 à M1 et je crois qu'ils peuvent avantageusement illustrer certaines leçons d'agrégation. Chaque chapitre se termine en effet par plusieurs exercices corrigés, le plus souvent en détail, qui soit illustrent les notions du cours, soit en constituent des prolongements.

Concernant les équations différentielles et les EDP, il existe déjà une multitude d'ouvrages, mais ce sont le plus souvent soit des livres de « recettes », de mon point de vue peu « applicables », soit au contraire des ouvrages de master de mathématiques destinés à former de futurs chercheurs dans le domaine. Une autre motivation pour l'écriture de ce livre a donc été d'essayer de proposer un outil rigoureux mais abordable avec les connaissances de CPGE ou de L3 de mathématiques, permettant aux étudiants d'acquérir les bases sur ces sujets avant d'attaquer des cours plus ambitieux.

En effet, vu l'objectif de formation à la recherche en temps limité, les enseignements de master priorisent ce qui est indispensable avant une thèse. Par exemple, un cours de M1 sur les *problèmes aux limites* se place rapidement dans le cadre des espaces de Sobolev, et on n'a pas toujours le temps de traiter tous les exemples constituant normalement une « base culturelle » commune aux physiciens et aux mathématiciens. Je crois qu'il manque une étape intermédiaire : l'étude rigoureuse des équations les plus classiques dans les cas où la résolution est possible sans recourir aux méthodes numériques.

Ce livre a deux niveaux de lecture. La majeure partie ne fait appel qu'aux connaissances d'analyse et d'algèbre de licence et à un peu de théorie de l'intégration. Afin de réaliser la transition souhaitée vers des ouvrages plus spécialisés, certains paragraphes et exercices nécessitent quelques connaissances sur les *distributions*, mais d'une part sauter ces parties, bien délimitées, ne nuit pas à la compréhension de la majorité des notions du livre, d'autre part une annexe regroupant les principales définitions et résultats utiles sur les distributions figure à la fin de l'ouvrage. Une autre annexe contient les connaissances de *calcul différentiel* nécessaires. Les différents chapitres s'enchaînent naturellement mais une lecture linéaire n'est pas forcément indispensable, à condition de suivre les renvois aux chapitres antérieurs quand c'est indiqué.

Le chapitre 1 expose les fondements sur les équations différentielles. On y a privilégié les exemples et les conséquences du *théorème de Cauchy-Lipschitz* à sa démonstration. Une grande partie du chapitre 2 (*équations différentielles linéaires*) sera une révision pour un bon nombre de lecteurs. Le chapitre 3 est sans doute plus original : l'étude de ces familles d'*équations différentielles non linéaires* n'est pratiquement plus enseignée, à l'exception parfois des « recettes » que j'évoquais plus haut. Ce chapitre présente des techniques de résolution rigoureuses (notamment la recherche des *courbes intégrales* sous forme paramétrique), de façon plus détaillée que dans les grands ouvrages classiques (qui datent un peu). Il doit pouvoir être utile aux agrégatifs pour certaines leçons. Le chapitre 4 est une introduction assez complète aux *systèmes dynamiques* (théorie autonome).

Le chapitre 5 introduit le vocabulaire et des exemples fondamentaux d'EDP, puis traite des *EDP linéaires et quasi-linéaires* d'ordre 1, grâce au *théorème des fonctions implicites*. Le chapitre 6 s'appuie sur la résolution de deux *problèmes d'évolution* très classiques, concernant l'*équation des ondes* et l'*équation de la chaleur* (au sens classique puis au sens des distributions pour cette dernière, exemple typique des deux niveaux de lecture évoqués plus haut), pour dégager ce qui différencie ces deux EDP, généraliser à d'autres problèmes de Cauchy — d'évolution ou non — dans le cadre analytique (*théorèmes de Cauchy-Kovalevskaya*) et obtenir une classification de certaines EDP d'ordre 2.

Le chapitre 7 traite d'équations intégrales et d'équations différentielles avec *conditions aux limites*, afin de donner un cadre à la *méthode de séparation des variables* pour des EDP munies de *conditions frontières*, étudiées dans les chapitres 8 et 9. Ces deux chapitres sont techniques mais très détaillés. Ils présentent un grand nombre d'exemples classiques, notamment l'*équation des membranes vibrantes*, l'*oscillateur harmonique quantique*, les *problèmes de Dirichlet* dans le disque et la boule, et une étude complète des *états liés de l'atome d'hydrogène*. L'ouvrage n'aborde pas les méthodes variationnelles.

Je remercie mon éditeur pour la patience dont il a fait preuve pendant la rédaction.
J'ai eu la chance de bénéficier de la relecture particulièrement attentive et des conseils d'amélioration de plusieurs collègues, qui sont aussi des amis. Ils ont corrigé leurs chapitres respectifs avec la rigueur qui les caractérise. J'adresse mes très sincères remerciements à Marie-Laure Ravard et Yann Loaëc, enseignants en CPGE au lycée Rabelais (Saint-Brieuc), à Laurent Bernis et Emmanuel Droguet, enseignants en CPGE au lycée La Pérouse-Kerichen (Brest), à Mériadec Chuberre, auteur d'une thèse en EDP à l'INSA de Rennes, ainsi qu'à mes étudiants, à l'origine de fréquentes évolutions du contenu.
Je remercie enfin mon épouse, d'un constant soutien et qui s'est chargée de vérifier l'orthographe des chapitres ayant évolué après leur correction. Je lui dédie ce livre, ainsi qu'à mes deux enfants et à mes relecteurs et amis.

Patrice Struillou

Table des matières

1 Équations différentielles, problèmes de Cauchy **11**
1.1 Généralités 11
1.1.1 Fonctions vectorielles 11
1.1.2 Équations différentielles 12
1.1.3 Quelques situations régies par des équations différentielles . 13
1.1.4 Forme normalisée 16
1.1.5 Régularité des solutions. 16
1.1.6 Réduction à un système du premier ordre 17
1.2 Le problème de Cauchy 17
1.2.1 Formulations du problème 17
1.2.2 Lemme de Gronwall 20
1.2.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz 21
1.2.4 Étude d'un exemple 24
1.2.5 Propriétés des solutions maximales 26
1.2.6 Cas d'échec du théorème de Cauchy-Lipschitz 30
1.2.7 Notion d'étude qualitative 33
1.2.8 Cas d'une équation non normalisée 34
1.2.9 Trajectoires 36
1.2.10 Régularité par rapport aux données initiales 39
1.3 Exercices corrigés 39

2 Équations différentielles linéaires **51**
2.1 Définitions et vocabulaire 51
2.1.1 Système différentiel linéaire 51
2.1.2 Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n 53
2.2 Propriétés des équations linéaires 54
2.2.1 Équation homogène associée 54
2.2.2 Superposition des seconds membres 56
2.3 Le problème de Cauchy dans le cas linéaire 57
2.3.1 Solutions maximales des équations linéaires 57
2.3.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire 58
2.3.3 Base de solutions de l'équation homogène 59

2.4 Équations linéaires scalaires du premier ordre 63
2.4.1 Résolution de l'équation homogène 63
2.4.2 Solution particulière de l'équation avec second membre . . . 63
2.4.3 Cas d'une équation non normalisée 66
2.5 Systèmes linéaires à coefficients constants 68
2.5.1 Résolution de $U' = AU$ lorsque A est diagonalisable 68
2.5.2 Résolution de $U' = AU$ lorsque A n'est pas diagonalisable . 72
2.5.3 Résolution de $X' = AX + B$ 73
2.6 Méthode de variation des constantes 74
2.7 Équations linéaires scalaires d'ordre n 76
2.7.1 Le problème de Cauchy 76
2.7.2 Base de solutions de l'équation homogène 77
2.7.3 Recherche d'une solution particulière 79
2.8 Équations linéaires scalaires d'ordre 2 80
2.8.1 L'équation homogène : abaissement de l'ordre 80
2.8.2 Solution particulière : variation des constantes 83
2.9 Solutions développables en série entière 85
2.10 Équations scalaires à coefficients constants 88
2.10.1 Équation homogène 88
2.10.2 Cas d'un second membre exponentielle-polynôme 90
2.10.3 Utilisation d'une solution fondamentale 93
2.11 Exercices corrigés 94

3 Équations différentielles non linéaires du premier ordre 113
3.1 Équations à variables séparables 113
3.2 Équations différentielles exactes 115
3.3 Équations de Bernoulli et de Riccati 118
3.3.1 Équation de Bernoulli 118
3.3.2 Équation de Riccati 121
3.4 Équations homogènes en y et x 122
3.4.1 Généralités sur les équations homogènes 122
3.4.2 Résolution de l'équation homogène normalisée 124
3.4.3 Résolution de l'équation homogène non normalisée 129
3.5 Équations incomplètes 138
3.5.1 Équations incomplètes en x 138
3.5.2 Équations incomplètes en y 143
3.6 Équations de Lagrange et de Clairaut 146
3.6.1 Équation de Lagrange 146
3.6.2 Équation de Clairaut 151
3.7 Exercices corrigés 156

4 Équations différentielles autonomes 173
4.1 Propriétés élémentaires des systèmes dynamiques . . . 173
4.1.1 Invariance par translation . . . 173
4.1.2 Interprétation physique . . . 175
4.1.3 Intervalle de définition des solutions . . . 176
4.1.4 Points d'équilibre . . . 176
4.1.5 Orbites . . . 177
4.1.6 Champs de vecteurs . . . 180
4.1.7 Intégrales premières . . . 182
4.2 Champs de vecteurs linéaires de $\mathbb{R}^2$ . . . 187
4.2.1 Cas de deux valeurs propres réelles distinctes non nulles . . 188
4.2.2 Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées . . . 190
4.2.3 Cas d'une valeur propre double non nulle . . . 193
4.2.4 Cas d'une valeur propre nulle . . . 194
4.3 Stabilité . . . 195
4.3.1 Stabilité d'un équilibre . . . 195
4.3.2 Étude de la stabilité de l'origine pour un champ linéaire . . 198
4.3.3 Linéarisation au voisinage d'un équilibre . . . 200
4.3.4 Stabilité d'une solution . . . 202
4.3.5 Pour aller plus loin . . . 203
4.4 Exercices corrigés . . . 205

5 EDP d'ordre 1 **231**
5.1 EDP : généralités et exemples . . . 231
5.1.1 Vocabulaire . . . 231
5.1.2 Exemples d'EDP en physique. . . . 232
5.1.3 La notation multi-indices . . . 236
5.1.4 EDP quasi-linéaires, semi-linéaires, linéaires . . . 236
5.2 L'équation $F \cdot \nabla u = 0$ . . . 237
5.2.1 L'équation $\partial_j u = 0$ . . . 237
5.2.2 L'équation de transport . . . 240
5.2.3 L'équation $F \cdot \nabla u = 0$ . . . 241
5.2.4 Le problème de Cauchy pour l'équation de transport . . . 243
5.2.5 Hypersurfaces et problème de Cauchy général . . . 244
5.2.6 Le problème de Cauchy pour l'équation $F \cdot \nabla u = 0$ . . . 245
5.3 EDP quasi-linéaires du premier ordre . . . 251
5.3.1 Résolution sous forme implicite . . . 251
5.3.2 Le problème de Cauchy pour une EDP quasi-linéaire . . . 253
5.4 Exercices corrigés . . . 258

6 Équations d'évolution 273
6.1 L'équation des ondes en dimension 1 d'espace 273
6.1.1 L'équation des ondes sur $\mathbb{R}$ par la méthode de D'Alembert . 273
6.1.2 Le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ pour l'équation des ondes . . 276
6.2 Équation de la chaleur homogène 278
6.2.1 Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ 278
6.2.2 Recherche d'une solution par transformation de Fourier . . 279
6.2.3 Solution du problème de Cauchy 281
6.2.4 Solution du problème au sens des distributions 285
6.2.5 Étude du noyau de la chaleur et conséquences 292
6.3 Le théorème de Cauchy-Kovalevsky 295
6.3.1 Exemple introductif : DSE des solutions d'une EDO 295
6.3.2 Fonctions analytiques de plusieurs variables réelles 296
6.3.3 Le problème de Cauchy pour une équation d'évolution . . . 297
6.3.4 Unicité et existence d'une solution analytique 298
6.3.5 Le théorème de Cauchy-Kovalevsky d'évolution 300
6.3.6 Le théorème d'Holmgren 303
6.3.7 Cas d'une équation non résolue en $\partial_t^m u$ 304
6.3.8 EDP quasi-linéaires d'ordre 1 dans le cas analytique 307
6.3.9 EDP quasi-linéaires d'ordre 2 311
6.4 Caractéristiques et classification 315
6.4.1 Caractéristiques des EDP semi-linéaires d'ordre 1 315
6.4.2 Caractéristiques des EDP semi-linéaires d'ordre 2 317
6.4.3 Classification des EDP semi-linéaires d'ordre 2 320
6.5 Exercices corrigés 324

7 Équations intégrales et problèmes de Sturm-Liouville 351
7.1 Opérateurs autoadjoints 351
7.1.1 Définitions et rappels 351
7.1.2 Éléments propres d'un opérateur autoadjoint 353
7.2 Opérateurs intégraux 354
7.2.1 Définition et premiers exemples 354
7.2.2 Opérateurs intégraux bornés sur L^2 355
7.2.3 Adjoint d'un opérateur intégral 356
7.3 Équations intégrales de Fredholm 358
7.3.1 Équations de Fredholm de première et deuxième espèce . . 358
7.3.2 Équation intégrale à noyau dégénéré 359
7.3.3 L'équation aux valeurs propres : théorie de Hilbert-Schmidt 365
7.3.4 L'équation avec second membre : alternative de Fredholm . 371
7.4 Problèmes de Sturm-Liouville 372
7.4.1 Conditions aux limites 372
7.4.2 Formes autoadjointes d'une équation du second ordre . . . 373
7.4.3 Le problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville 374

7.4.4 Fonction de Green d'un problème de Sturm-Liouville 383
7.4.5 Développement en série de fonctions propres 392
7.4.6 Autres problèmes de Sturm-Liouville 397
7.5 Exercices corrigés 398

8 Problèmes mixtes - Méthode de séparation des variables 413
8.1 Problème mixte pour l'équation de la chaleur 413
8.1.1 Position du problème 413
8.1.2 Étude de l'unicité de la solution 414
8.1.3 Réduction à des conditions aux limites homogènes 415
8.1.4 Séparation des variables 415
8.1.5 Superposition de solutions élémentaires 417
8.2 Corde vibrante fixée aux extrémités 420
8.2.1 Séparation des variables. 421
8.2.2 Superposition des solutions élémentaires 421
8.3 Équation de Schrödinger 426
8.3.1 Séparation de la variable t 426
8.3.2 Solutions stationnaires pour l'oscillateur harmonique 427
8.3.3 Le problème de Cauchy pour l'oscillateur harmonique . . . 430
8.4 Équation des membranes vibrantes 432
8.4.1 Séparation des variables 433
8.4.2 Équation et fonctions de Bessel 435
8.4.3 Solution du problème de Sturm-Liouville-Bessel 439
8.4.4 Orthogonalité des fonctions de Bessel 440
8.4.5 Superposition de solutions élémentaires 443
8.5 Exercices corrigés 446

9 EDP elliptiques 455
9.1 Généralités 455
9.1.1 Fonctions harmoniques 455
9.1.2 Problème de Cauchy versus problème de Dirichlet 456
9.1.3 Principe du maximum pour les EDP elliptiques 457
9.1.4 Le problème de Dirichlet sur un ouvert borné 460
9.2 Fonctions harmoniques en dimension 2 463
9.2.1 Lien avec les fonctions holomorphes 463
9.2.2 Application au problème de Dirichlet pour le disque 465
9.3 Fonctions harmoniques en dimension 3 469
9.3.1 Séparation des variables r, θ, φ 469
9.3.2 Problème de Legendre d'ordre 0 : polynômes de Legendre . 471
9.3.3 Problème de Legendre d'ordre m : fonctions de Legendre . 476
9.3.4 Harmoniques sphériques - Partie radiale 480
9.3.5 Problème de Dirichlet pour la boule 481
9.4 L'atome d'hydrogène 482

9.4.1 Équation de Schrödinger à potentiel radial 482
9.4.2 Cas du potentiel coulombien 484
9.5 Exercices corrigés 491

A Calcul différentiel **499**
A.1 Différentiabilité 499
A.1.1 Différentielle en un point 499
A.1.2 Cas particuliers fondamentaux 500
A.1.3 Propriétés de la différentiabilité 501
A.1.4 Dérivée suivant un vecteur 501
A.1.5 Dérivées partielles 502
A.1.6 Lien entre différentielle et dérivées partielles 503
A.1.7 Notion de gradient 504
A.1.8 Matrice jacobienne 505
A.1.9 Dérivées partielles d'une fonction composée 505
A.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 506
A.2.1 $\mathcal{C}^1$ implique différentiable 506
A.2.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 507
A.2.3 Théorème des fonctions implicites 508
A.2.4 Difféomorphismes 510
A.3 Arcs paramétrés 511

B Distributions et transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ **515**
B.1 T.F. et convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ 515
B.2 Distributions sur $\mathbb{R}^n$ 516
B.2.1 Définition et exemples élémentaires 516
B.2.2 Opérations élémentaires sur les distributions 517
B.2.3 Produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et dérivées partielles 517
B.2.4 Produit tensoriel 517
B.2.5 Support des distributions 519
B.2.6 Produit de convolution 519
B.2.7 Transformée de Fourier 519
B.2.8 Formule de Green et formule des sauts en dimension n . . . 521

Bibliographie **523**

Index **525**

Chapitre 1

Équations différentielles, problèmes de Cauchy

Une équation différentielle est une relation entre une fonction X d'une seule variable (pour nous, la variable sera réelle) et sa dérivée X', ou entre X et plusieurs de ses dérivées successives. Les équations différentielles permettent de modéliser une multitude de problèmes de physique, de chimie, de biologie et d'économie. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

1.1.1 Fonctions vectorielles

On appelle ***fonction vectorielle*** toute fonction X définie sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui sera $\mathbb{K}^n$ dans ce chapitre. Une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée ***fonction scalaire***. Lorsque $n = 1$, une fonction vectorielle est donc une fonction scalaire.

On munit l'e.v. $\mathbb{K}^n$ d'une de ses normes $\|\cdot\|$ (toutes équivalentes), par exemple celle définie par

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

On dit que la fonction vectorielle $t \in I \mapsto X(t) \in \mathbb{K}^n$ admet une limite $L \in \mathbb{K}^n$ en un point $t_0 \in I$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $t \in I$ vérifie $|t - t_0| < \eta$ alors $\|X(t) - L\| < \varepsilon$. Dans ce cas, le vecteur L est noté $\lim_{t \to t_0} X(t)$.

On note $x_1, \ldots, x_n$ les fonctions composantes de X, définies sur I et à valeurs scalaires, de sorte que pour $t \in I$ on a $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$.

Avec ces notations, nous avons les définitions et résultats suivants.

1. Le vecteur $\lim\limits_{t\to t_0} X(t)$ existe dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0} x_i(t)$ existe dans $\mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a dans ce cas $\lim\limits_{t\to t_0} X(t) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} x_1(t), \dots, \lim\limits_{t\to t_0} x_n(t)\right)$.

2. Par définition, X est ***continue*** en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} X(t) = X(t_0)$. On dit que X est continue sur I si elle est continue en tout point de I. La fonction vectorielle X est continue en t_0 (respectivement sur I) si et seulement si ses composantes $x_1, \dots, x_n$ sont toutes continues en t_0 (respectivement sur I).

3. Par définition, X est ***dérivable*** en t_0 si :
$$\lim_{t\to t_0} \frac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0} \quad \text{existe dans } \mathbb{K}^n$$
Dans ce cas, cette limite est notée $X'(t_0)$ et s'appelle le ***vecteur dérivé*** de X en t_0. La fonction vectorielle X est dérivable en t_0 si et seulement si ses composantes sont toutes dérivables en t_0. Le vecteur dérivé de X en t_0 est alors $X'(t_0) = \big(x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)\big)$.
On dit que X est dérivable sur I si elle dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on peut définir la fonction $X' : t \in I \mapsto X'(t) \in \mathbb{K}^n$. Si cette fonction X' est elle-même dérivable en t_0, alors on peut définir le vecteur $X''(t_0)$ comme la dérivée de X' en t_0. Lorsqu'il s'itère, ce procédé permet de définir les dérivées successives de X en t_0, notées $X^{(j)}(t_0)$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I) si les fonctions $X^{(j)}$ sont définies et continues sur I pour $j \in [\![0,k]\!]$ (respectivement pour tout $j \in \mathbb{N}$). La fonction X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I) si et seulement si chaque composante est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I).

1.1.2 Équations différentielles

Définition 1.1 (*Équation différentielle*)

*Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **équation différentielle d'ordre** k est une relation de la forme*
$$F\big(t, X(t), X'(t), \dots, X^{(k)}(t)\big) = 0_{\mathbb{K}^n} \tag{1.1}$$
*où F est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}\times(\mathbb{K}^n)^{k+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Une **solution** de (1.1) est la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction vectorielle $t \in I \mapsto X(t) \in \mathbb{K}^n$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre k en tout point de I, telle que pour tout $t \in I$ on ait $\big(t, X(t), \dots, X^{(k)}(t)\big) \in D$ et l'égalité (1.1). On dit alors que X est une solution de (1.1) sur I.*

Une équation différentielle est donc une relation entre une fonction X (c'est l'*inconnue* de l'équation) d'une variable [1] t et une ou plusieurs de ses dérivées successives.

1. Dans ce livre, la variable t est réelle, mais on pourrait considérer des équations différentielles pour lesquelles l'inconnue X est une fonction d'une variable complexe (dans ce cas, X doit être *holomorphe* sur un ouvert de $\mathbb{C}$).

Lorsque $n = 1$, on dit que (1.1) est une équation différentielle ***scalaire*** d'ordre k. Dans le cas général, (1.1) est un système (d'ordre k) de n équations différentielles scalaires, également appelé ***système différentiel*** (d'ordre k) de n équations, ou équation différentielle vectorielle d'ordre k.

Exemple 1.1. *Considérons l'équation suivante, où l'inconnue est le couple de fonctions (x, y) :*

$$(S) \quad \begin{cases} t^2 x(t) + x(t)y'(t) = 0 \\ x^2(t) + x''(t) + y''(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Avec les notations de la définition 1.1, on a $n = 2$, $k = 2$, $X(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. L'équation (S) est un système de 2 équations différentielles scalaires dont l'une est d'ordre 2, donc (S) est une équation différentielle vectorielle d'ordre 2.

Exemple 1.2. *Considérons l'équation*

$$(E) \qquad y''y + y' - xy^2 + \mathrm{e}^x = 0$$

Ici, la variable est x et la fonction inconnue est y. Il est fréquent de noter improprement y ce qu'on devrait noter $y(x)$, la distinction entre la variable et la fonction inconnue découlant du contexte. On a $n = 1$ et $k = 2$, i.e. (E) est une équation scalaire d'ordre 2.

1.1.3 Quelques situations régies par des équations différentielles

Donnons quelques exemples classiques de situations physiques ou biologiques modélisées par des équations différentielles.

Exemple 1.3. Circuit *RC. On considère un circuit composé d'un générateur de tension, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C.*
Notons $e(t)$ la tension délivrée par le générateur et $v(t)$ la tension aux bornes du condensateur. La fonction v est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad RCv'(t) + v(t) = e(t) \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) est d'ordre 1. En modifiant le circuit, on obtient une équation d'ordre 2.

Exemple 1.4. Circuit *RLC. On ajoute une inductance L entre la résistance et le condensateur. La tension $v(t)$ aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 :*

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = e(t) \tag{1.3}$$

Considérons maintenant un exemple tout aussi classique mais issu de la mécanique :

Exemple 1.5. Oscillateur harmonique. *On considère un mobile ponctuel de masse m soumis à la force de rappel d'un ressort. Notons $x(t)$ la différence entre la position du mobile à l'instant t et sa position d'équilibre (autrement dit, $x(t)$ est l'allongement du ressort). La force de rappel du ressort est proportionnelle à son allongement. Lorsque l'on néglige la force de frottement, en vertu de la relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe du ressort, on obtient l'équation différentielle*

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \tag{1.4}$$

où k est une constante positive caractéristique de la raideur du ressort. Cette équation se rencontre en fait dans des contextes variés. Il s'agit d'un oscillateur harmonique.

Un modèle plus réaliste est le suivant :

Exemple 1.6. Oscillations amorties. *Dans l'exemple précédent, lorsque l'on ne néglige pas la force de frottement, on la considère en général proportionnelle à la vitesse du mobile et dirigée en sens inverse du vecteur vitesse. On a donc l'équation différentielle*

$$mx''(t) + ax'(t) + kx(t) = 0 \tag{1.5}$$

où a est une constante positive.

L'exemple suivant est également issu de la mécanique.

Exemple 1.7. Pendule pesant. *On considère un « pendule simple », i.e. un mobile (considéré ponctuel) de masse m attaché à un fil de masse négligeable et de longueur L constante qui oscille sous l'action de la pesanteur, les frottements étant négligés. On repère la position du mobile par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale descendante. Puisque l'on néglige les frottements (c'est une approximation impliquant que le mouvement devrait être perpétuel, elle n'est donc envisageable que sur un petit intervalle de temps à partir de l'instant initial), les seules forces qui s'exercent sur le mobile sont $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$. Lorsque l'on projette la relation fondamentale de la dynamique sur la tangente à la trajectoire, on obtient l'équation différentielle :*

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\sin\big(\theta(t)\big) \tag{1.6}$$

Dans cette équation $\theta''(t)$ représente l'accélération angulaire du pendule.
On peut également obtenir (1.6) en écrivant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante (car on néglige les frottements) et en dérivant par rapport au temps.

L'équation différentielle suivante modélise la *dynamique d'une population.*

Exemple 1.8. Modèle de Verhulst. *On rencontre en écologie le modèle suivant. Notons $n(t)$ le nombre d'individus d'une espèce donnée à l'instant t, dans un milieu donné. En première approximation, on peut considérer que le taux d'accroissement instantané de $n(t)$ est proportionnel à $n(t)$ (il s'agit de la **loi de Malthus**), i.e. on a l'équation différentielle $n'(t) = an(t)$ où a désigne le taux de croissance propre de l'espèce considérée (cette constante a peut être positive ou négative car elle dépend du taux de natalité et du taux de mortalité de l'espèce). En réalité, les individus interagissent (par exemple ils doivent se partager les ressources disponibles, ou bien il peut survenir des maladies), ce que Verhulst a modélisé en 1840 en diminuant $n'(t)$ d'un facteur proportionnel à la probabilité de rencontre de deux individus. Or, cette probabilité de rencontre est elle-même proportionnelle à $n^2(t)$. Finalement, on obtient l'équation différentielle*[1] *suivante pour $n(t)$:*

$$n'(t) = an(t) - bn^2(t) \tag{1.7}$$

où a et b sont des constantes positives dépendant de l'espèce et du milieu considérés.

1. Bien entendu, comme $n(t)$ doit être un entier naturel, l'équation différentielle (1.7) est nécessairement un modèle mathématique approché.

On peut aussi modéliser par un système différentiel deux populations interagissant :

Exemple 1.9. Modèle proies-prédateurs. *Nous supposons maintenant que deux espèces cohabitent dans un milieu donné : des prédateurs et leurs proies préférées. En négligeant les effets de la cohabitation avec d'autres espèces ainsi que l'influence d'autres facteurs que la reproduction naturelle et la prédation,* ***Lotka*** *et* ***Volterra*** *ont développé (indépendamment l'un de l'autre, respectivement en 1925 et 1926) le modèle suivant. On considère que les proies ont à leur disposition une source quasi-illimitée de nourriture (par exemple de l'herbe pour des herbivores, du plancton pour des petits poissons) alors que la nourriture des prédateurs est évidemment limitée par le nombre de proies. Appelons $x(t)$ (respectivement $y(t)$) le nombre de proies (respectivement de prédateurs) à l'instant t. La nourriture des proies étant considérée illimitée, en l'absence de prédateurs le nombre $x(t)$ de proies augmente suivant la loi de Malthus $x'(t) = ax(t)$ avec $a > 0$. Par contre, en l'absence de proies le nombre de prédateurs ne peut que diminuer en suivant la loi $y'(t) = -by(t)$ avec $b > 0$. Lorsque les deux espèces cohabitent, le nombre de proies est régulé par le nombre de prédateurs. En effet, $x'(t)$ est diminué d'un facteur qui est proportionnel à la probabilité qu'une proie rencontre un prédateur, alors que $y'(t)$ est augmenté d'un facteur proportionnel à la probabilité qu'un prédateur rencontre une proie. Or, la probabilité de rencontre proie-prédateur est elle-même proportionnelle au nombre de proies $x(t)$ et au nombre de prédateurs $y(t)$, donc est proportionnelle à leur produit $x(t)y(t)$.*
Finalement, la situation est régie par le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & ax(t) - cx(t)y(t) \\ y'(t) & = & -by(t) + dx(t)y(t) \end{array} \right. \tag{1.8}$$

où $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ dépendent des espèces et du milieu considérés.

L'exemple suivant modélise la dynamique des lasers.

Exemple 1.10. Dynamique du laser. *En physique des lasers, on s'intéresse au nombre $n(t)$ de photons dans la cavité et à la différence de population $N(t)$ entre le niveau fondamental et le premier niveau excité. Le comportement dynamique du laser est régi par le système d'équations différentielles suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} n'(t) & = & -\frac{1}{\tau_c} n(t) + Kn(t)N(t) \\ N'(t) & = & R_p - \frac{1}{\tau_2} N(t) - Kn(t)N(t) \end{array} \right. \tag{1.9}$$

où K, τ_c, τ_2 et R_p sont des constantes physiques positives (R_p est le taux de pompage, τ_c est le temps de vie moyen des photons dans la cavité et τ_2 est le temps de vie du niveau haut de la transition). Le système (1.9) permet notamment de décrire le régime d'oscillations de relaxation du laser.

Terminons par une modélisation mathématique de la dynamique d'une épidémie.

Exemple 1.11. Modéle épidémiologique SIR**.** *Le système différentiel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S'(t) & = & -\frac{a}{N} S(t)I(t) \\ I'(t) & = & \frac{a}{N} S(t)I(t) - bI(t) \\ R'(t) & = & bI(t) \end{array} \right. \tag{1.10}$$

est l'un des plus simples modèles mathématiques permettant de prévoir l'évolution d'une épidémie. Ces modèles ont largement démontré leur importance pratique et leur efficacité. L'exercice 1.8 page 50 explicite la modélisation. Voir aussi l'exercice 4.7 page 217.

1.1.4 Forme normalisée

Définition 1.2 (*Équation normalisée*)

Une équation différentielle d'ordre k est dite ***normalisée*** *si elle s'écrit*

$$X^{(k)}(t) = f\big(t, X(t), ..., X^{(k-1)}(t)\big) \tag{1.11}$$

où f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^k$, à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Autrement dit, une équation différentielle d'ordre k est normalisée si elle est *résolue en* $X^{(k)}$.

Exemple 1.12. *La forme normalisée de* $y''y + y' - xy^2 + \mathrm{e}^x = 0$ *est* $y'' = -\frac{y'}{y} + xy - \frac{\mathrm{e}^x}{y}$.

Remarque 1.1. *Dans l'exemple 1.12, la forme normalisée interdit de considérer des solutions y s'annulant sur leur intervalle de définition. En général, la forme normalisée d'une équation différentielle* ***n'est pas équivalente*** *à l'équation initiale. Plus précisément, si nous notons (E') la forme normalisée d'une équation différentielle (E), une solution sur un intervalle I de l'équation (E') est évidemment solution sur I de (E) mais la réciproque est fausse.*

1.1.5 Régularité des solutions.

Pour une équation *normalisée*, on peut préciser à l'avance la *régularité* des solutions.

Proposition 1.1 (*Régularité des solutions*)

On considère l'équation différentielle normalisée (1.11) où f est une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^k$, à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ouvert D, alors les solutions de (1.11) sont de classe $\mathcal{C}^{k+p}$ sur leur intervalle de définition.

Rappelons que dire que f est de classe $\mathcal{C}^p$ (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur l'ouvert D signifie que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p (respectivement de tout ordre) continues sur D.

Démonstration. Soit X une solution de (1.11) sur un intervalle I. On raisonne par récurrence sur p.

Initialisation. Le cas $p = 0$ correspond à f continue sur D. Toute solution d'une équation différentielle d'ordre k étant par définition k fois dérivable sur I, la fonction $t \mapsto \big(t, X(t), \dots, X^{(k-1)}(t)\big)$ est dérivable sur I, donc continue sur I. La fonction $t \mapsto f\big(t, X(t), \dots, X^{(k-1)}(t)\big) = X^{(k)}(t)$ est donc continue sur I par composition d'applications continues, *i.e.* X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Progression. Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur D, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$, donc la solution X est par hypothèse de récurrence de classe $\mathcal{C}^{k+p}$ sur I. Cela implique que la fonction $t \mapsto \big(t, X(t), \dots, X^{(k-1)}(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+p-(k-1)} = \mathcal{C}^{p+1}$ sur I. La fonction $t \mapsto f\big(t, X(t), \dots, X^{(k-1)}(t)\big) = X^{(k)}(t)$ est donc de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I, par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. Ainsi, la solution X est de classe $\mathcal{C}^{k+p+1}$ sur I. □

Corollaire 1.1

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert D, alors les solutions de (1.11) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition.

1.1.6 Réduction à un système du premier ordre

En ajoutant des inconnues, il est toujours possible de ramener une équation normalisée d'ordre $k \geq 2$ à une équation normalisée du premier ordre. La réduction au premier ordre est un préalable à l'étude du ***problème de Cauchy***[1], que nous ferons au paragraphe 1.2. L'exemple suivant permet de comprendre cette technique de réduction.

Exemple 1.13. *Considérons le système différentiel d'ordre 2 suivant :*

$$\begin{cases} x''(t) = x^2(t)\, y'(t) \\ y''(t) = tx'(t) + y'(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

On pose $u(t) = x'(t), v(t) = y'(t)$. Le système devient :

$$\begin{cases} x'(t) = u(t) \\ y'(t) = v(t) \\ u'(t) = x^2(t)\, v(t) \\ v'(t) = tu(t) + v(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

Ainsi, on a ramené une équation d'ordre 2 à inconnue $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$ à une équation d'ordre 1 à inconnue $t \mapsto Y(t) = (x(t), y(t), u(t), v(t))$.

Un cas particulier important est celui de la réduction au premier ordre d'une équation **scalaire** d'ordre k normalisée :

$$y^{(k)}(t) = f\big(t, y(t), \dots, y^{(k-1)}(t)\big) \tag{1.12}$$

où l'inconnue y et la fonction f sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. En introduisant $k-1$ inconnues auxiliaires, (1.12) devient le système du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} y'(t) & = & y_1(t) \\ y_1'(t) & = & y_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-2}'(t) & = & y_{k-1}(t) \\ y_{k-1}'(t) & = & f\big(t, y(t), y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)\big) \end{cases} \tag{1.13}$$

Noter que les inconnues introduites sont en fait les $y_j = y^{(j)}$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$.

1.2 Le problème de Cauchy

1.2.1 Formulations du problème

On considère une équation différentielle d'ordre 1 **normalisée** :

$$X'(t) = f\big(t, X(t)\big) \tag{1.14}$$

1. En outre, la réduction au premier ordre permet de mettre en œuvre les techniques de **résolution numérique** des équations différentielles.

Dans (1.14), f est une fonction définie sur un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, et la fonction inconnue $t\mapsto X(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Le fait de considérer seulement une équation d'ordre 1 n'est pas restrictif pour l'étude théorique. En effet, lorsque l'équation est d'ordre supérieur à 1, on peut la ramener au premier ordre par le procédé décrit au paragraphe 1.1.6.

Définition 1.3 (*Problème de Cauchy*)

*Soit $(t_0,X_0)\in\Omega$. Le **problème de Cauchy** est la recherche des solutions de l'équation différentielle (1.14) vérifiant la **condition initiale***

$$X(t_0)=X_0 \tag{1.15}$$

*La condition initiale (1.15) est appelée aussi **condition de Cauchy** et (t_0,X_0) est la **donnée de Cauchy**.*

Remarque 1.2. *Le fait que l'équation différentielle (1.14) soit **normalisée** implique que la donnée de $\big(t_0,X(t_0)\big)$ **détermine** la valeur de $X'(t_0)$:*

$$X'(t_0)=f\big(t_0,X(t_0)\big)=f(t_0,X_0) \tag{1.16}$$

*Par conséquent, se donner une condition $X'(t_0)=Z_0$ **en plus de** $X(t_0)=X_0$ est soit inutile (lorsque $Z_0=f(t_0,X_0)$, car c'est alors une information redondante), soit est un problème sans solution (lorsque $Z_0\neq f(t_0,X_0)$). **La situation est plus compliquée pour une équation non normalisée** $f\big(t,X(t),X'(t)\big)=0$.*

En s'appuyant sur l'intuition physique, on peut espérer que le problème de Cauchy admette « dans les bons cas » une **unique solution**.

Exemple 1.14. Relation fondamentale de la dynamique. *On considère un mobile ponctuel de masse m dont on note $M(t)$ la position instantanée. L'espace $\mathbb{R}^3$ est supposé rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Notons $\overrightarrow{F}(M)$ la somme des forces s'appliquant au mobile.*
*La relation fondamentale de la dynamique $m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}=\overrightarrow{F}(M)$ implique que le mouvement est régi par un système de 3 équations différentielles scalaires d'ordre 2, obtenues par projection sur les 3 axes. Considérer une condition de Cauchy revient ici à choisir un instant initial t_0 et à se donner non seulement la **position initiale** $M(t_0)$ mais aussi la **vitesse initiale** $\vec{v}(t_0)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ (pour le **même instant initial** t_0). En effet, la réduction au premier ordre décrite au paragraphe 1.1.6 revient à poser :*

$$X(t)=\left(\overrightarrow{OM(t)},\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)=\big(x_1(t),x_2(t),x_3(t),v_1(t),v_2(t),v_3(t)\big)$$

ce qui permet d'écrire le système de 3 équations différentielles scalaires d'ordre 2 comme un système de 6 équations différentielles scalaires d'ordre 1. Cette réduction au premier ordre est détaillée page 185 : on obtient le système différentiel (4.10).
La donnée de la valeur de $X(t_0)=\big(x_1(t_0),x_2(t_0),x_3(t_0),v_1(t_0),v_2(t_0),v_3(t_0)\big)$, conjointement à ce système de 6 équations, est un problème de Cauchy.

Or, on considère en mécanique classique (newtonienne) que la connaissance de la position $M(t)$ et de la vitesse $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ à un instant t_0 suffit à ***déterminer le mouvement****, i.e. à connaître la position et la vitesse du mobile à tout instant t. Cela revient à admettre l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy associé à ce système de 6 équations différentielles.*

On donne au paragraphe 1.2.3 des conditions suffisantes permettant de garantir que le problème de Cauchy admet une unique solution. Pour l'exemple 1.14, il s'agirait de vérifier certaines propriétés mathématiques de la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces s'appliquant au mobile. Dans le cas général (f quelconque), le problème de Cauchy peut ne pas avoir de solutions, ou en avoir plusieurs.

La proposition suivante permet d'écrire le problème de Cauchy sous une *forme intégrale* équivalente qui s'avère plus maniable dans des contextes variés.

Proposition 1.2 (*Forme intégrale du problème de Cauchy*)

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$, une fonction $f:\Omega\to\mathbb{K}^n$ continue sur Ω, un point $(t_0,X_0)\in\Omega$ et un intervalle I contenant t_0. Pour qu'une fonction X soit solution sur l'intervalle I de l'équation différentielle (1.14) et vérifie la condition initiale (1.15), il faut et il suffit que X soit continue sur I et vérifie :

$$\forall t\in I \quad X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,X(s)\big)\,\mathrm{d}s \tag{1.17}$$

Autrement dit, si f est continue, alors les solutions éventuelles du problème de Cauchy sont les solutions de *l'équation intégrale* (1.17).

Démonstration. Précisons d'abord le sens de (1.17). Lorsque $G:[a,b]\to\mathbb{K}^n$ est une fonction vectorielle continue sur $[a,b]$, en notant $g_1,\dots,g_n$ les composantes de G, on définit :

$$\int_a^b G(s)\,\mathrm{d}s=\left(\int_a^b g_1(s)\,\mathrm{d}s\,,\dots,\int_a^b g_n(s)\,\mathrm{d}s\right)\in\mathbb{K}^n$$

Soit X une solution sur I du problème de Cauchy de donnée (t_0,X_0). Par définition d'une solution, on a $\big(s,X(s)\big)\in\Omega$ pour tout $s\in I$. La fonction $s\mapsto f\big(s,X(s)\big)$ est continue sur I comme composée de fonctions continues (la fonction X est dérivable sur I et f est continue sur Ω), *i.e.* X' est continue sur I. Pour $t\in I$, on peut donc intégrer la relation $X'(s)=f\big(s,X(s)\big)$ entre t_0 et t. On obtient (1.17).

Réciproquement, soit $X:I\to\mathbb{K}^n$ continue et vérifiant (1.17), ce qui sous-entend que $\big(s,X(s)\big)\in\Omega$ pour tout $s\in I$. On a $X(t_0)=X_0$. Si une fonction vectorielle $G:I\to\mathbb{K}^n$ est continue sur l'intervalle I, alors pour tout $t_0\in I$, la fonction $t\mapsto\int_{t_0}^t G(s)\,\mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et est une primitive sur I de G (théorème fondamental de l'intégration). Puisque f est continue sur Ω et X est continue sur I, la fonction $s\mapsto f\big(s,X(s)\big)$ est continue sur I (comme composée de fonctions continues). Il en résulte que la fonction X, égale sur I à la fonction $t\mapsto X_0+\int_{t_0}^t f\big(s,X(s)\big)\,\mathrm{d}s$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a pour dérivée $t\mapsto f\big(t,X(t)\big)$, *i.e.* est solution de l'équation différentielle (1.14). □

Avant d'étudier le problème de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy, nous allons voir un résultat qui nous sera utile dans la suite.

1.2.2 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall permet d'estimer les solutions d'une « inéquation intégrale » que l'on rencontre fréquemment lors d'une analyse *a priori* des propriétés des solutions de certaines équations différentielles.

Lemme 1.1 (*lemme de Gronwall*)

Soient $K \geq 0$, I un intervalle, u et φ des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs positives, $a \in I$. Si l'on a :

$$\forall x \in I \quad u(x) \leq K + \left| \int_a^x u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \tag{1.18}$$

alors on a :

$$\forall x \in I \quad u(x) \leq K \exp \left| \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \tag{1.19}$$

Démonstration. La continuité sur I de la fonction $u\varphi$ implique que $F : x \mapsto \int_a^x u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $F'(x) = u(x)\varphi(x)$ pour tout $x \in I$.
Soit $x \in I$ tel que $x \geq a$. Pour tout $t \in [a, x]$, on a $u(t) \leq K + F(t)$, d'où l'on déduit en multipliant par $\varphi(t) \geq 0$ que $F'(t) \leq \big(K + F(t)\big)\varphi(t)$.
Si $K > 0$, alors $K + F(t) > 0$ pour tout $t \in [a, x]$ (car $u(t)\varphi(t) \geq 0$ donc $F(t) \geq 0$). On en déduit :

$$\int_a^x \frac{F'(t)}{K + F(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

On a donc $\ln\big(K + F(x)\big) - \ln K \leq \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, *i.e.* $K + F(x) \leq K \exp\big(\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\big)$. Cela donne (1.19) pour $x \geq a$ puisque $u(x) \leq K + F(x)$.
Si $K = 0$, alors l'inégalité (1.18) est *a fortiori* vraie pour tout $K > 0$, donc on a $0 \leq u(x) \leq K \exp\big(\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\big)$ pour tout $K > 0$. On fait tendre K vers 0 dans cet encadrement (x est fixé) et on obtient $u(x) = 0$, *i.e.* (1.19) pour $K = 0$.

Soit $x \in I$ tel que $x \leq a$. On a par hypothèse

$$u(x) \leq K + \int_x^a u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = K + \int_{-a}^{-x} u(-s)\varphi(-s)\,\mathrm{d}s$$

Les fonctions $\check{u} : s \mapsto u(-s)$ et $\check{\varphi} : s \mapsto \varphi(-s)$ sont continues et positives sur l'intervalle $J = \{s \in \mathbb{R}\,;\, -s \in I\}$ et l'on a :

$$\check{u}(-x) \leq K + \int_{-a}^{-x} \check{u}(s)\check{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{avec } -x \in J \quad \text{et } -x \geq -a$$

D'après le cas précédent appliqué à $\check{u}$ sur J en $-x$, on a

$$\check{u}(-x) \leq K \exp\left(\int_{-a}^{-x} \check{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Autrement dit, $u(x) \leq K \exp\big(\int_x^a \varphi(t)\,\mathrm{d}t\big)$, *i.e.* on a encore (1.19). □

Contexte d'utilisation. Le lemme de Gronwall permet, lorsqu'on dispose d'une majoration de u par une expression intégrale dépendant *linéairement* de u (à une constante additive K près), d'en déduire un majorant de u ne dépendant plus de u.
Il existe une version plus générale de ce lemme [1] traitant du cas où K est une fonction positive continue plutôt qu'une simple constante, mais nous ne l'utiliserons pas.

1.2.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous aurons besoin de la notion suivante.

Définition 1.4 (*Fonction localement lipschitzienne*)

Une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite ***localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable*** *si pour tout $(t_0,x_0)\in\Omega$, il existe $h>0$ et $k>0$ tels que pour $t\in[t_0-h,t_0+h]$, $x_1\in B(x_0,h)$, $x_2\in B(x_0,h)$, on ait*

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leq k\,\|x_1-x_2\| \tag{1.20}$$

Dans la définition 1.4, $B(x_0,h)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon h, *i.e.* l'ensemble des $x\in\mathbb{R}^n$ tels que $\|x-x_0\|<h$. On peut remplacer dans la définition 1.4 la boule ouverte $B(x_0,h)$ par la boule *fermée* $\overline{B(x_0,h)}=\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,\|x-x_0\|\leq h\}$.

Remarque 1.3. *Dans la définition 1.4, les constantes h et k dépendent a priori de (t_0,x_0). C'est ce qui se passe dans les deux exemples suivants de fonction localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

Exemple 1.15. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$.*
Si g est continue sur I, alors la fonction f définie sur $\Omega=I\times\mathbb{R}$ par

$$f(t,x)=g(t)\,|x|$$

est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
En effet, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc pour tout $(t_0,x_0)\in\Omega$, il existe $h>0$ tel que le carré fermé $C=[t_0-h,t_0+h]\times[x_0-h,x_0+h]$ soit inclus dans Ω. La fonction g étant continue sur I, elle est bornée sur le segment $[t_0-h,t_0+h]$ (et atteint d'ailleurs ses bornes). Si les réels t, x_1 et x_2 sont tels que $(t,x_1)\in C$ et $(t,x_2)\in C$, alors on a

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|=|g(t)|\,\big||x_1|-|x_2|\big|\leq|x_1-x_2|\max_{s\in[t_0-h,t_0+h]}|g(s)|$$

L'exemple suivant se rencontre très fréquemment dans les applications.

Exemple 1.16. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$.*
Si la fonction $(t,x)\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est définie et continue sur Ω, alors f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
En effet, pour $(t_0,x_0)\in\Omega$ considérons $C=[t_0-h,t_0+h]\times[x_0-h,x_0+h]\subset\Omega$. La fonction $(t,x)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ étant continue sur Ω, elle est bornée sur C (qui est compact). Si les réels t, x_1 et x_2 sont tels que $(t,x_1)\in C$ et $(t,x_2)\in C$, alors on a

$$|f(t,x_2)-f(t,x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}x\right|\leq|x_2-x_1|\max_{(s,x)\in C}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x)\right|$$

1. Voir par exemple (Chambert-Loir et Fermigier, 1996) ou (Dieudonné, 1997).

Nous pouvons maintenant énoncer un important théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. Ce théorème est fondamental parce qu'il permet d'affirmer avant tout calcul que le problème de Cauchy associé à une équation différentielle **normalisée** $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$ possède une unique solution sous des conditions sur f simples à vérifier en pratique. Nous admettons ce théorème [1], mais signalons tout de même que la preuve s'appuie sur la formulation intégrale (1.17) du problème de Cauchy.

Théorème 1.1 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*)

Soit f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si f est ***continue*** *sur Ω et* ***localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable****, alors pour tout $(t_0, X_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I contenant t_0 et une fonction $t \in I \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ définie et dérivable sur I telle que*

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad \big(t, X(t)\big) \in \Omega \quad \text{et} \quad X'(t) = f\big(t, X(t)\big) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

De plus, la solution de (1.21) est ***unique*** *au sens suivant : si I_1 et I_2 sont des intervalles contenant t_0 tels que $X_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $X_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sont des solutions de l'équation différentielle $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0) = X_0$, alors $X_1(t) = X_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$.*

Pour résumer, on dit qu'il y a sous les hypothèses de ce théorème **existence et unicité d'une solution *locale*** du problème de Cauchy (1.21). Dans la suite, lorsque nous parlerons d'unicité de la solution sans précision supplémentaire, il s'agira d'unicité d'une solution locale.

L'exemple 1.16 de fonction localement lipschitzienne se généralise au cas d'une fonction $(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \dots, x_n)$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et admettant des dérivées partielles par rapport aux variables x_j continues sur Ω. Une telle fonction est donc localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et on a le corollaire suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Corollaire 1.2 (*Cauchy-Lipschitz en pratique*)

Soit f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On note $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f. Si pour tout i et tout j dans $[\![1, n]\!]$, les fonctions f_i et les fonctions

$$(t, x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

sont ***définies et continues*** *sur Ω, alors pour tout $(t_0, X_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy (1.21) admet une unique solution X (sur un intervalle I contenant t_0).*

Remarque 1.4. *En pratique, le corollaire 1.2 s'applique fréquemment et ses hypothèses sont très simples à vérifier. Pour cette raison, lorsque l'on voudra s'assurer avant toute autre étude de l'existence et de l'unicité (locale) de la solution du problème de Cauchy, on commencera par regarder si les hypothèses de ce corollaire sont vérifiées, puis à défaut on cherchera à appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz lui-même.*

1. Le lecteur trouvera une démonstration claire et rigoureuse dans (Bernis et Bernis, 2018).

Exemple 1.17. *Considérons l'équation différentielle scalaire du deuxième ordre :*

$$(x-1)\,y''(x) - y(x) = 0 \tag{1.22}$$

On normalise l'équation différentielle (1.22) et on considère le système différentiel du premier ordre équivalent à l'équation normalisée :

$$(S) \quad \begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = \dfrac{y(x)}{x-1} \end{cases} \tag{1.23}$$

Les deux composantes de $f : (x,y,z) \mapsto \left(z, \frac{y}{x-1}\right)$, i.e. les fonctions $f_1 : (x,y,z) \mapsto z$ et $f_2 : (x,y,z) \mapsto \frac{y}{x-1}$ sont continues et admettent des dérivées partielles par rapport aux variables y et z continues sur $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x \neq 1\right\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Le corollaire 1.2 permet donc d'affirmer, avant tout calcul, que pour tout (x_0, y_0, z_0) tel que $x_0 \neq 1$, il existe une unique solution (y,z) du système différentiel (1.23) vérifiant $\big(y(x_0), z(x_0)\big) = (y_0, z_0)$. Autrement dit, il existe une unique solution y de l'équation différentielle (1.22) vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

L'exemple 1.17 traite d'une équation scalaire d'ordre 2. Il se généralise immédiatement. En effet, l'équation différentielle scalaire normalisée (1.12) d'ordre k s'écrit sous la forme équivalente (1.13) d'un système d'ordre 1 de k équations différentielles scalaires. On a donc le corollaire suivant du corollaire 1.2.

Corollaire 1.3

*Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, $\left(t_0, y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(k-1)}\right) \in \Omega$ et une application $f : (t, x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \Omega \mapsto f(t, x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}$ **continue** sur Ω. Si pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ les fonctions $(t, x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \Omega \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ sont **définies et continues** sur Ω, alors le problème suivant :*

$$\begin{cases} y^{(k)}(t) &= f\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)\big) \\ y(t_0) &= y_0^{(0)} \\ y'(t_0) &= y_0^{(1)} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) &= y_0^{(k-1)} \end{cases} \tag{1.24}$$

admet une unique solution y (sur un intervalle I contenant t_0).

Exemple 1.18. *Il existe un unique solution y du problème de Cauchy :*

$$(E) \quad \ln(x) y'''(x) + y''(x) - x y'(x) + y^2(x) - \mathrm{e}^x = 0 \quad ; y(2) = 0,\ y'(2) = 1,\ y''(2) = -1$$

En effet, on peut normaliser (E) sur $I =]1, +\infty[$ (car $\ln(x) \neq 0$ pour $x \in I$). Le corollaire 1.3 s'applique pour $k = 3$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^3$, $\left(t_0, y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}\right) = (2, 0, 1, -1) \in \Omega$. La solution y est définie dans un intervalle $J \subset I$. L'exercice 1.1 traite en détail un exemple similaire mais plus compliqué.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ou celles du corollaire 1.2. L'union des intervalles contenant t_0 sur lesquels on peut définir une solution locale du problème de Cauchy est encore un intervalle contenant t_0. C'est le plus grand intervalle sur lequel on peut définir une solution X du problème (1.21). Démontrons que cet intervalle, que nous noterons $I_{\max}$, est ***ouvert***. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que $I_{\max}$ soit de la forme $]a,b]$. L'application $X : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ est solution à la fois du problème de Cauchy de donnée (t_0, X_0) et du problème de Cauchy de donnée $\big(b, X(b)\big)$. La solution du problème de Cauchy $Y'(t) = f\big(t, Y(t)\big)$ de condition initiale $Y(b) = X(b)$ est définie sur un intervalle de la forme $]b-h, b+h[$ et coïncide avec X sur $]b-h, b]$, par unicité. La fonction $\widetilde{X}$ égale à $X(t)$ pour $t \in I_{\max}$ et à $Y(t)$ pour $t \in]b, b+h[$ est une solution du problème de Cauchy de donnée (t_0, X_0) définie sur $]a, b+h[$, ce qui contredit la définition de $I_{\max}$.

Cette solution $X : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ s'appelle la ***solution maximale***[1] *du problème de Cauchy* (1.21). On peut donc dire que **sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy (1.21)**, définie sur un intervalle **ouvert**.

Remarque 1.5. *Il résulte de la définition de cette solution maximale X que l'on a $\big(t, X(t)\big) \in \Omega$ pour tout $t \in I_{\max}$, de sorte que la notion de solution maximale dépend de l'ouvert Ω sur lequel on a appliqué le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Remarque 1.6. *Dans le cas général, il n'existe malheureusement pas de moyen simple de déterminer à l'avance l'intervalle $I_{\max}$ en considérant uniquement la fonction f. Comme le montre l'exemple de l'équation différentielle (1.25) qui suit, cet intervalle dépend a priori non seulement de f, mais aussi de la donnée de Cauchy (t_0, X_0).*

Supposons les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz satisfaites sur un ouvert Ω. On appelle ***solutions maximales de l'équation différentielle*** (1.1) les solutions maximales des problèmes de Cauchy que l'on obtient en faisant varier la donnée de Cauchy dans Ω. Le graphe $\big\{\big(t, X(t)\big)\,;\, t \in I\big\}$ d'une solution maximale X de (1.1) définie sur I est appelé ***courbe intégrale*** de l'équation (1.1). Pour une équation différentielle scalaire, les courbes intégrales sont donc simplement les courbes représentatives des solutions maximales.

Avec ce vocabulaire, le théorème de Cauchy-Lipschitz exprime que ***par chaque point $(t_0, X_0) \in \Omega$, il passe une unique courbe intégrale***. Si deux courbes intégrales ont un point (t_0, X_0) en commun, alors elles coïncident, puisque les solutions maximales $t \mapsto X(t)$ et $t \mapsto Y(t)$ qu'elles représentent sont égales.

Ainsi, les courbes intégrales ne se coupent pas et la famille des courbes intégrales recouvre l'ouvert Ω, chaque point de Ω appartenant à une courbe intégrale et une seule : ***les courbes intégrales réalisent une partition de Ω***.

1.2.4 Étude d'un exemple

Nous allons voir sur un exemple que le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas seulement un résultat théorique d'existence et d'unicité, mais qu'il permet aussi dans certains cas de résoudre complètement l'équation différentielle.

1. La solution $X : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ est « maximale » au sens où l'on ne peut pas la prolonger en une solution du problème de Cauchy sur un intervalle plus grand que $I_{\max}$.

Exemple 1.19. *Étudions l'équation scalaire du premier ordre :*

$$y'(x) = -2xy^2(x) \tag{1.25}$$

Les fonctions $(x, y) \mapsto f(x, y) = -2xy^2$ *et* $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xy$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$, *donc le corollaire 1.2 s'applique pour toute donnée de Cauchy.*
Pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, *il existe donc une unique solution* y *de (1.25) vérifiant* $y(x_0) = y_0$. *Nous allons constater que le plus grand intervalle sur lequel* y *est définie n'est pas nécessairement* $\mathbb{R}$ *en entier.*

*L'équation (1.25) est « **à variables séparables** » (cf. chapitre 3). Pour la résoudre, on est amené à l'écrire sous la forme* $y'y^{-2} = -2x$, *ce qui est a priori restrictif puisque cela revient à considérer uniquement les solutions* y *ne s'annulant pas sur leur intervalle de définition. La fonction nulle* $y = 0$ *est manifestement solution de* $y' = -2xy^2$ *sur* $\mathbb{R}$. *Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que les autres solutions **ne s'annulent en aucun point** de leur intervalle de définition. En effet, considérons une solution* y *sur un intervalle* I *s'annulant en un point* $x_0 \in I$. *Cette fonction* y *est une solution du problème de Cauchy correspondant à la condition initiale* $y(x_0) = 0$. *Comme la fonction nulle est également une solution de ce problème de Cauchy, on a* $y = 0$, *par unicité.*

Considérons maintenant une solution y ***autre que la fonction nulle***, *définie sur un intervalle* I. *On vient de voir qu'elle ne s'annule pas sur* I *et on peut donc écrire*

$$\forall x \in I \qquad -y'(x)y^{-2}(x) = 2x$$

Par intégration, il existe une constante réelle C *telle que* $y^{-1}(x) = x^2 + C$. *Puisque* $x^2 + C$ *est pour tout* $x \in I$ *égal à* $1/y(x)$, *on a* $x^2 + C \neq 0$ *sur* I, *d'où :*

$$\forall x \in I \qquad y(x) = \frac{1}{x^2 + C} \tag{1.26}$$

Réciproquement, pour toute constante réelle C, *la fonction* $y : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + C}$ *est une solution de l'équation différentielle (1.25) sur chaque intervalle sur lequel* $x^2 + C$ *ne s'annule pas (pour le vérifier, il suffit de comparer* $y'(x)$ *et* $-2xy^2(x)$*).*

*On dit souvent dans cette situation que la « **solution générale** » de l'équation différentielle (1.25) est donnée par (1.26), mais c'est (légèrement) incorrect dans la mesure où il existe une solution qui n'est pas de cette forme : la fonction nulle. On a en tout cas complètement résolu l'équation différentielle. Il est important de noter le rôle qu'a joué le théorème de Cauchy-Lipschitz dans cette résolution.*

*Il est ici facile de déterminer les **solutions maximales**. Il y a d'abord la solution nulle sur* $\mathbb{R}$, *correspondant à la condition initiale* $y(x_0) = 0$. *Pour une condition initiale de la forme* $y(x_0) = y_0$ *avec* $y_0 \neq 0$, *on a* $C = y_0^{-1} - x_0^2$ *et la solution maximale du problème de Cauchy est définie sur **le plus grand intervalle contenant** x_0 **sur lequel** $x^2 + C$ **ne s'annule pas**. Pour* $C > 0$, *on a* $x^2 + C > 0$ *pour tout réel* x, *donc cet intervalle* $I_{\max}$ *est égal à* $\mathbb{R}$. *Pour* $C \leq 0$, $I_{\max}$ *est le plus grand intervalle contenant* x_0 *sur lequel on a* $x^2 < -C$ *ou* $x^2 > -C$.

Ainsi, pour $y_0 \neq 0$, *la solution maximale du problème de Cauchy est la fonction :*

$$y : x \in I_{\max} \mapsto \frac{1}{x^2 + y_0^{-1} - x_0^2}$$

L'intervalle $I_{\max}$ dépend de (x_0, y_0) de la façon suivante :

- $I_{\max} =]-\infty, +\infty[$ *lorsque* $x_0 \neq 0$ *et* $0 < y_0 < \dfrac{1}{x_0^2}$, *ou lorsque* $x_0 = 0$ *et* $y_0 > 0$;
- $I_{\max} = \left]-\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}\,,\, \sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}\right[$ *lorsque* $y_0 < 0$;
- $I_{\max} = \left]-\infty\,,\, -\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}\right[$ *lorsque* $x_0 < 0$ *et* $y_0 \geq \dfrac{1}{x_0^2}$;
- $I_{\max} = \left]\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}\,,\, +\infty\right[$ *lorsque* $x_0 > 0$ *et* $y_0 \geq \dfrac{1}{x_0^2}$.

Le premier cas est celui où $C > 0$, les trois autres cas correspondent à $C \leq 0$. On a représenté sur le premier schéma de la figure 1.1 une courbe intégrale pour chacun de ces quatre cas, ainsi que la courbe intégrale $y = 0$. C'est la position de (x_0, y_0) par rapport à la droite d'équation $y = 0$ et la courbe d'équation $y = 1/x^2$ qui détermine le type de l'unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0).

Nous dirons que la droite d'équation $y = 0$ et la courbe d'équation $y = 1/x^2$ sont des ***séparatrices****. Dans les régions délimitées par ces deux séparatrices, les courbes intégrales de l'équation (1.25) n'ont pas la même allure (voir le deuxième schéma de la figure 1.1). De plus, les deux séparatrices sont elles-mêmes des courbes intégrales : $y = 0$ est la solution du problème de Cauchy correspondant à une donnée de Cauchy de la forme $(x_0, 0)$, et $y = 1/x^2$ est la solution correspondant à une donnée de Cauchy de la forme $\big(x_0, 1/x_0^2\big)$ (i.e. le cas $C = 0$). Autrement dit, la courbe intégrale passant par un point d'une séparatrice est la séparatrice elle-même.*

On remarque sur la figure 1.1 que, comme prévu par la théorie, les différentes courbes intégrales ne se coupent pas et constituent une partition de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1.7. *L'étude de l'équation (1.25) montre que l'intervalle de définition d'une solution maximale dépend a priori de la condition initiale. Il est parfois possible de prévoir quel est cet intervalle et comment se comporte la solution à ses bornes. Le paragraphe suivant traite de ces questions.*

1.2.5 Propriétés des solutions maximales

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, si l'intervalle $I_{\max} =]a, b[$ de définition d'une solution maximale X est tel que a (respectivement b) est **finie**, alors on peut préciser le comportement de X à droite de a (respectivement à gauche de b).

Proposition 1.3 (*Limites aux bornes des solutions maximales*)

On considère l'équation différentielle $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$, où f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et X une solution **maximale** *de l'équation différentielle définie sur $]a, b[$ avec a (respectivement b)* **finie***. Si X admet une limite $L \in \mathbb{R}^n$ lorsque t tend vers a^+ (respectivement vers b^-), alors le point (a, L) (respectivement (b, L)) est sur la frontière de Ω.*

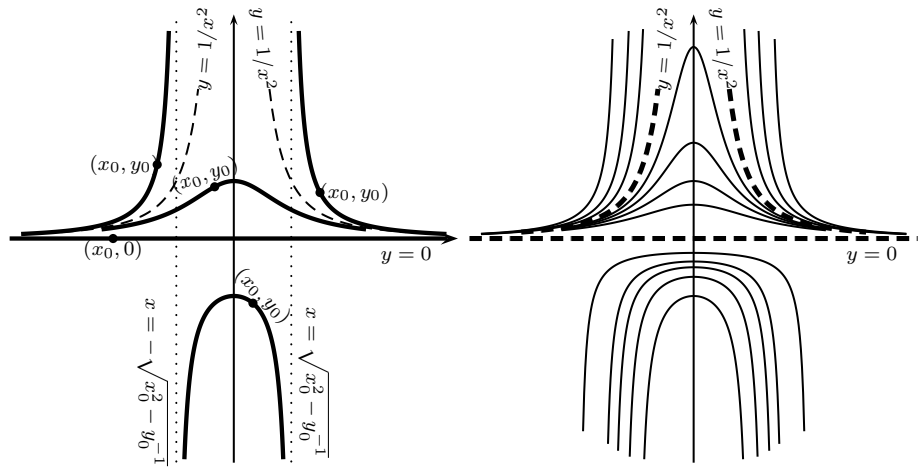


FIGURE 1.1 – *Les 5 types de courbes intégrales de l'équation $y' = -2xy^2$ et leurs asymptotes (les 2 arcs $y = 1/x^2$ en pointillé sont des cas particuliers). Forme des courbes intégrales dans les 4 régions délimitées par les séparatrices.*

Démonstration. Supposons que la solution maximale X vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$ soit définie sur $I_{\max} =]a, b[$ avec a fini (le cas b fini se traite de façon analogue) et que l'on ait $\lim_{t \to a^+} X(t) = L \in \mathbb{R}^n$. Puisque X est une solution de l'équation différentielle $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$, on a $\big(t, X(t)\big) \in \Omega$ pour tout $t \in]a, b[$, ce qui implique que le point (a, L) est élément de l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Le point (a, L) est donc un élément de l'ouvert Ω ou un élément de la frontière de Ω.

Supposons que $(a, L) \in \Omega$ et considérons la fonction $\widetilde{X}$ prolongeant X par continuité en a (définie sur $[a, b[$ par $\widetilde{X}(t) = X(t)$ pour $t \in]a, b[$ et $\widetilde{X}(a) = L$). Par continuité de f sur Ω, donc en (a, L), $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$ tend vers $f\big(a, L\big)$ quand t tend vers a^+. Le fait que X' admette une limite en a^+ implique que $\widetilde{X}$ est dérivable à droite en a, grâce au raisonnement classique suivant : pour tout $h > 0$ tel que $a + h < b$, chaque composante $t \mapsto x_j(t)$ de la fonction vectorielle $\widetilde{X}$ est continue sur $[a, a + h]$ et dérivable sur $]a, a + h[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_{j,h} \in]a, a + h[$ tel que $\frac{1}{h}\big(x_j(a + h) - x_j(a)\big) = x_j'(c_{j,h})$. Or, $c_{j,h}$ tend vers a^+ quand h tend vers 0^+, donc $\frac{1}{h}\big(x_j(a + h) - x_j(a)\big)$ tend vers la j-ème coordonnée du vecteur $f\big(a, L\big)$ quand h tend vers 0^+. Ainsi, $\widetilde{X}'(a)$ existe et vaut $f(a, L)$. On a donc $\widetilde{X}'(t) = f\big(t, \widetilde{X}(t)\big)$ pour tout $t \in [a, b[$.

La fonction $\widetilde{X}$ est une solution du problème de Cauchy de donnée (t_0, X_0) définie sur un intervalle contenant strictement $I_{\max}$, ce qui contredit la définition de $I_{\max}$. Le point (a, L) est donc sur la frontière de Ω. □

Pour une équation *scalaire* telle que l'ouvert Ω contienne une « bande verticale » de la forme $]a, a+h[\times]-\infty, c[$, nous avons un corollaire très utile de la proposition 1.3.

Corollaire 1.4 (*Comportement en une borne finie d'une solution monotone*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω et y une solution ***maximale*** *de l'équation différentielle* ***scalaire*** *$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ définie sur $]a, b[$ avec a* ***fini****. On suppose qu'il existe $h > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $]a, a+h[\times]-\infty, c[\subset \Omega$ et que y est* ***croissante*** *sur $]a, a+h[$. On a alors l'un des cas suivants, s'excluant mutuellement :*

- *soit $\lim_{t\to a^+} y(t) = -\infty$;*
- *soit $\lim_{t\to a^+} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et le point (a, ℓ) est sur la frontière de Ω.*

Bien entendu, on a des énoncés analogues en a^+ pour y décroissante, et, lorsque b est fini, en b^- pour y croissante ou décroissante.

Démonstration. Si une solution maximale y définie sur $]a, b[$ est croissante dans un voisinage à droite de a et si y ne tend pas vers une valeur finie en a^+, alors y tend vers $-\infty$. La proposition 1.3 implique par ailleurs que que si y tend vers une valeur finie ℓ en a^+, alors (a, ℓ) est sur la frontière de Ω. □

Exemple 1.20. *Illustrons le corollaire 1.4 par l'équation différentielle (1.25) sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

Avant tout calcul, en notant y une solution maximale définie sur un intervalle I, la relation $y'(x) = -2xy^2(x)$ nous donne le sens de variation de y :

- *$y'(x) \geq 0$ pour $x \in I$ et $x \leq 0$, donc y est croissante sur $I \cap]-\infty, 0]$;*
- *$y'(x) \leq 0$ pour $x \in I$ et $x \geq 0$, donc y est décroissante sur $I \cap [0, +\infty[$.*

Comme $\mathbb{R}^2$ n'a aucun point frontière, si l'une des extrémités de l'intervalle de définition de la solution maximale y est finie, on est nécessairement au voisinage de cette extrémité dans le premier cas du corollaire 1.4. Les résultats trouvés lors de la résolution de (1.25) sont bien en accord avec les conclusions de ce corollaire (voir figure 1.1). En effet :

- *lorsque $y_0 < 0$, la solution de (1.25) telle que $y(x_0) = y_0$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}$ ou vers $\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}$;*
- *lorsque $x_0 < 0$ et $y_0 \geq 1/x_0^2$, la solution telle que $y(x_0) = y_0$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}$;*
- *lorsque $x_0 > 0$ et $y_0 \geq 1/x_0^2$, la solution telle que $y(x_0) = y_0$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\sqrt{x_0^2 - y_0^{-1}}$.*

Exemple 1.21. *Illustrons la proposition 1.3 par l'équation différentielle scalaire suivante :*

$$y'(x) = \frac{1}{2\,y(x)} \tag{1.27}$$

Notons tout d'abord que la forme de l'équation (1.27) interdit aux solutions y de s'annuler sur leur intervalle de définition.

Les fonctions $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto -\frac{1}{2y^2}$ sont définies et continues sur l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On en déduit que pour tout (x_0, y_0) tel que $y_0 \neq 0$, il existe une unique solution maximale y vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Cette solution maximale se calcule aisément : en notant I son intervalle de définition, on a $2y'(t)y(t) = 1$ pour tout $t \in I$, d'où l'on déduit (en intégrant entre $x_0 \in I$ et $x \in I$) la relation $y^2(x) - y_0^2 = x - x_0$. Comme $y^2(x)$ est positif et ne s'annule pas sur I, on a $x - x_0 + y_0^2 > 0$ pour tout $x \in I$, i.e. $I \subset]x_0 - y_0^2, +\infty[$, et pour tout $x \in I$ on a soit $y(x) = \sqrt{x - x_0 + y_0^2}$, soit $y(x) = -\sqrt{x - x_0 + y_0^2}$.

Réciproquement, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x - x_0 + y_0^2}$ et $x \mapsto -\sqrt{x - x_0 + y_0^2}$ sont des solutions de (1.27) sur $]x_0 - y_0^2, +\infty[$ et cet intervalle I est le plus grand sur lequel ces solutions peuvent être définies. On a donc :

$$I =]x_0 - y_0^2, +\infty[$$

Finalement, la solution maximale y de (1.27) vérifiant $y(x_0) = y_0$ est définie par :

- $\forall x \in]x_0 - y_0^2, +\infty[\quad y(x) = \sqrt{x - x_0 + y_0^2}$ *lorsque* $y_0 > 0$;
- $\forall x \in]x_0 - y_0^2, +\infty[\quad y(x) = -\sqrt{x - x_0 + y_0^2}$ *lorsque* $y_0 < 0$.

On remarque que l'extrémité gauche de I est finie et que y tend vers 0 lorsque x tend vers $x_0 - y_0^2$ à droite. Le point $(x_0 - y_0^2, 0)$ est bien un élément de la frontière de Ω, qui est constituée des points de la forme $(x, 0)$. On peut prolonger y par continuité en $x_0 - y_0^2$ en posant $\tilde{y}(x_0 - y_0^2) = 0$, mais alors $\tilde{y}$ n'est pas dérivable en $x_0 - y_0^2$. Autrement dit, y est prolongeable par continuité mais pas par dérivabilité. C'était prévisible : avant tout calcul on peut dire que si une solution maximale y tend vers ℓ ***finie*** *en un extrémité a* ***finie*** *de son intervalle de définition, alors (a, ℓ) est sur la frontière de Ω, i.e. $\ell = 0$, ce qui implique que $y'(x) = \frac{1}{2\,y(x)}$ tend vers l'infini en a.*

Lorsque l'ouvert Ω sur lequel on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz est de la forme $I \times \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle ouvert, on peut compléter le résultat de la proposition 1.3 grâce au théorème suivant, que nous admettons.

Théorème 1.2 (*« Explosion en temps fini »*)

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On considère l'équation différentielle $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$. Soit X une solution maximale définie sur $]a, b[\subset I$. Si $a > \inf I$ (respectivement si $b < \sup I$), alors $\|X(t)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers a^+ (respectivement vers b^-).

Remarque 1.8. *Remarquons que $a > \inf I$ (respectivement $b < \sup I$) implique que a (respectivement b) est* ***finie****. Le nom imagé que l'on a donné au théorème 1.2 prend tout son sens dans le cas où I est* ***non borné****. Par exemple si $I = \mathbb{R}$, le théorème dit qu'une solution maximale non définie sur $\mathbb{R}$ en entier « explose en temps fini » (i.e. la norme du vecteur $X(t)$ tend vers l'infini en a ou en b).*

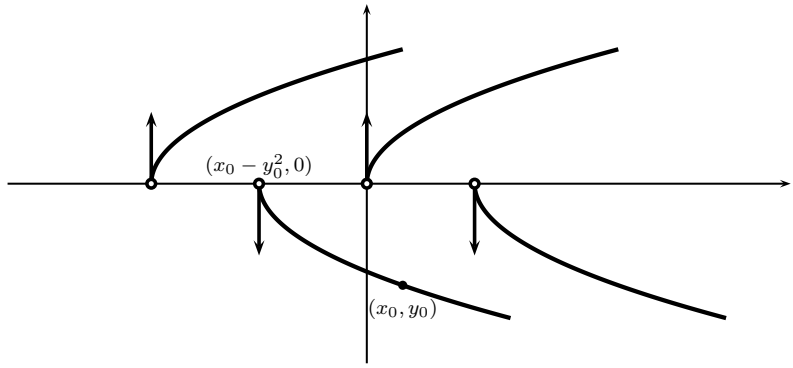


FIGURE 1.2 – *Courbes intégrales de l'équation* $y'(x) = \dfrac{1}{2\,y(x)}$.

Le théorème 1.2 dit notamment que dans le cas $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, la seule façon pour* X *de « cesser d'être une solution à un instant fini* a *», c'est « d'exploser en* a *». Un comportement tel que « rester borné mais cesser d'être dérivable en* a *» (ce que nous avons observé pour l'exemple (1.27) au voisinage de* $a = x_0 - y_0^2$*) n'est pas possible dans ce cas de figure. Pour l'exemple (1.27), le théorème 1.2 ne s'applique pas car l'ouvert* $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *n'est pas de la forme* $I \times \mathbb{R}$*.*

Remarque 1.9. *Pour* $\Omega =]c, d[\times \mathbb{R}$ *avec* c *fini, le phénomène de prolongement par continuité mais pas par dérivabilité observé dans l'exemple (1.27) peut se produire en* c*, mais pas en* $a \in]c, d[$ *en vertu du théorème 1.2.*

Lorsque $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, une solution définie sur I en entier est dite ***globale***. D'après le théorème 1.2, si une solution maximale X définie sur $]a, b[$ est **bornée**, alors $a = \inf I$ et $b = \sup I$, *i.e.* X est une solution globale. Nous pouvons donc énoncer le corollaire suivant du théorème 1.2, très utile pour démontrer dans certaines situations qu'une solution maximale est définie sur le plus grand intervalle possible.

Corollaire 1.5 (*Condition suffisante pour qu'une solution soit globale*)

Soit I *un intervalle ouvert. On considère l'équation différentielle* $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$*, où* f *est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur* $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$*. Si une solution maximale* X *est* **bornée** *sur son intervalle de définition* $]a, b[$*, alors* $]a, b[= I$*.*

Pour un exemple d'application, voir l'exercice 1.5.

1.2.6 Cas d'échec du théorème de Cauchy-Lipschitz

Lorsque les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont pas vérifiées, aussi bizarre que cela puisse paraître d'un point de vue physique, il n'est pas garanti que l'on ait existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.

L'exemple ci-dessous montre qu'un problème de Cauchy peut posséder plusieurs solutions.

Exemple 1.22. *Soit x_0 un réel. On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2}\, y^{1/3}(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{3}{2}\, y^{1/3} = \frac{3}{2}\, \sqrt[3]{y}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ mais la fonction $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}\, y^{-2/3}$ n'est pas définie aux points de la forme $(x, 0)$, et n'est prolongeable par continuité en aucun de ces points. Le corollaire 1.2 ne s'applique donc pas pour la donnée de Cauchy $(x_0, 0)$ du problème (1.28).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (dont les hypothèses sont moins restrictives que celles du corollaire 1.2) ne s'applique pas non plus. En effet, pour tout $y \neq 0$, on a

$$\left| \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} \right| = \frac{3}{2} \left| y^{-2/3} \right|$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ quand y tend vers 0, donc :

$$\big(\forall k > 0\big) \quad \big(\exists \eta > 0\big) \quad \big(\forall y \neq 0\big) \quad \big(|y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x_0, y) - f(x_0, 0)| > k\, |y - 0|\ \big)$$

Ainsi, il n'existe aucun ouvert contenant $(x_0, 0)$ sur lequel f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Nous allons construire plusieurs solutions du problème de Cauchy (1.28), ce qui montrera qu'en général la continuité de la fonction f ne suffit pas à garantir l'unicité locale d'une solution de (1.21).

Soit y une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{3}{2}\, y^{1/3}$ ne s'annulant pas sur son intervalle I de définition. Pour tout $x \in I$, on a $\frac{2}{3} y'(x) y^{-1/3}(x) = 1$. Par intégration, il existe une constante réelle c telle que $y^{2/3}(x) = x + c$ pour tout $x \in I$. Puisque $y^{2/3}(x) = \big(y^{1/3}(x)\big)^2$, on a $x + c > 0$ et $y^2(x) = (x + c)^3$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement, pour toute constante réelle c, les fonctions $y_{1,c}$ et $y_{2,c}$ définies sur un intervalle $I \subset]-c, +\infty[$ par :

$$\forall x \in I \quad y_{1,c}(x) = (x + c)^{3/2} \quad \text{et} \quad y_{2,c}(x) = -(x + c)^{3/2}$$

sont des solutions sur I de l'équation différentielle $y' = \frac{3}{2}\, y^{1/3}$, ne s'annulant pas sur I.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas au voisinage d'une donnée de Cauchy de la forme $(x_0, 0)$, mais pour les autres conditions initiales il n'y a pas de souci : le corollaire 1.2 s'applique sur l'ouvert $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, y \neq 0\big\}$. Pour cet ouvert Ω, les solutions maximales de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{3}{2}\, y^{1/3}(x)$ ne s'annulent pas. Ce sont donc les fonctions $y_{1,c}$ et $y_{2,c}$ définies sur $]-c, +\infty[$ lorsque c varie dans $\mathbb{R}$, car ces intervalles sont les plus grands sur lesquels des solutions ne s'annulant pas peuvent être définies. On remarque que $y_{1,c}(x)$ et $y'_{1,c}(x) = \frac{3}{2}\, (x + c)^{1/2}$ d'une part, $y_{2,c}(x)$ et $y'_{2,c}(x) = -\frac{3}{2}\, (x + c)^{1/2}$ d'autre part, tendent vers 0 quand x tend vers $-c^+$. Autrement dit, $y_{1,c}$ et $y_{2,c}$ sont **prolongeables par continuité et dérivabilité** *en $x = -c$ et leurs courbes représentatives admettent une tangente horizontale au point $(-c, 0)$.*

Le premier schéma de la figure 1.3 rend compte de ce phénomène.

Il en résulte que les fonctions $\tilde{y}_{1,c}$ et $\tilde{y}_{2,c}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{y}_{1,c}(x) = \begin{cases} (x+c)^{3/2} & pour \quad x > -c \\ 0 & pour \quad x \leq -c \end{cases} \quad , \quad \tilde{y}_{2,c}(x) = \begin{cases} -(x+c)^{3/2} & pour \quad x > -c \\ 0 & pour \quad x \leq -c \end{cases}$$

sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = \frac{3}{2}\, y^{1/3}$. De plus, lorsque $-c \geq x_0$, elles vérifient $\tilde{y}_{1,c}(x_0) = \tilde{y}_{2,c}(x_0) = 0$.

Ainsi, le problème de Cauchy (1.28) admet une infinité de solutions maximales (toutes définies sur $\mathbb{R}$) :

- *la fonction nulle ;*
- *toutes les fonctions $\tilde{y}_{1,c}$ et $\tilde{y}_{2,c}$ pour $-c \geq x_0$.*

La situation est représentée sur le deuxième schéma de la figure 1.3.

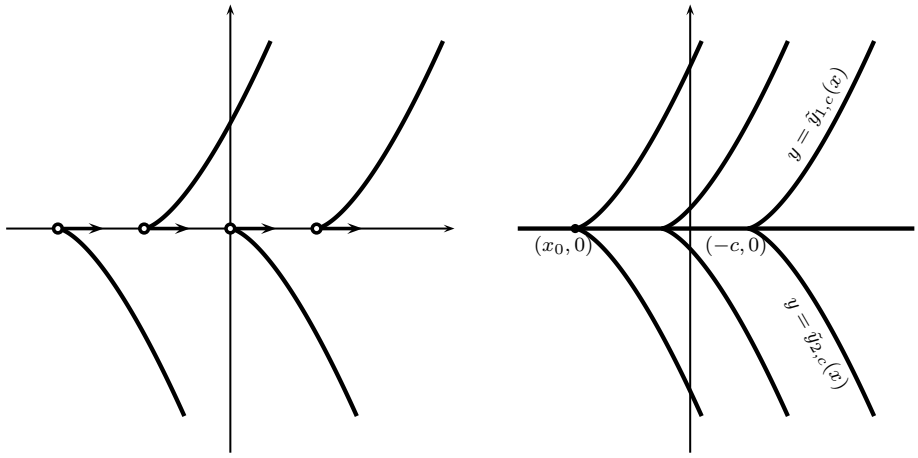


FIGURE 1.3 – *Courbes intégrales de $y'(x) = \frac{3}{2}\, y^{1/3}(x)$. Non-unicité de la solution du problème de Cauchy pour la condition initiale $y(x_0) = 0$*

L'exemple du problème de Cauchy (1.28) montre que **la continuité de f ne garantit pas l'unicité** de la solution de (1.21). Néanmoins, nous admettrons [1] qu'elle suffit à garantir **l'existence** d'une solution au problème de Cauchy. Énonçons ce théorème.

Théorème 1.3 (*Théorème de Cauchy-Peano-Arzelà*)

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, X_0) \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction **continue** sur Ω. Le problème de Cauchy (1.21) admet au moins une solution définie sur un intervalle I contenant t_0.*

1. Le lecteur intéressé trouvera une démonstration dans (Queffélec et Zuily, 2013).

1.2.7 Notion d'étude qualitative

Dans les trois exemples que nous avons traités (équations (1.25) et (1.27), problème de Cauchy (1.28)), nous avons su résoudre les équations différentielles considérées. Ce n'est pas toujours le cas. Très souvent, on a seulement accès à des solutions *approchées* d'une équation différentielle, via le calcul numérique. Néanmoins, même si la résolution exacte est impossible, on peut tenter une étude *qualitative* des solutions maximales d'une équation différentielle normalisée $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$.
Une « étude qualitative » comporte si possible :

- l'étude *a priori* de la régularité des solutions lorsque s'applique la proposition 1.1 ou le lemme 1.1 ;
- l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy lorsque s'applique le corollaire 1.2 ou le théorème de Cauchy-Lipschitz (ou le corollaire 1.3 pour une équation scalaire d'ordre k) ;
- la détermination de l'intervalle de définition des solutions maximales, notamment lorsque s'applique le corollaire 1.5, ou l'un des résultats établis dans les exercices 1.4 page 45 et 1.6 page 47 ;
- l'étude du comportement des solutions aux extrémités des intervalles de définition, lorsque s'applique la proposition 1.3, le corollaire 1.4 ou le théorème 1.2.

Les deux premiers points ont déjà été illustrés dans les exemples précédents. Les points suivants seront illustrés dans les exercices de fin de chapitre.

Il arrive également souvent que l'on ait avant tout calcul une information sur le sens de variation des solutions. C'est ce qui se passe dans les cas suivants.

1. On a déjà vu que pour l'équation (1.25) on peut dire avant tout calcul qu'une solution y sur un intervalle I est croissante sur $I \cap]-\infty, 0]$ et décroissante sur $I \cap [0, +\infty[$. Par ailleurs, toutes les solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Pour les équations différentielles (1.27) et (1.28), il est clair que $y'(x)$ est du signe de $y(x)$, donc y est croissante là où elle est positive, décroissante là où elle est négative. Comme par ailleurs pour ces deux exemples, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur les deux ouverts $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y > 0\big\}$ et $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y < 0\big\}$, on peut affirmer avant tout calcul que les solutions maximales sont soit strictement positives et croissantes, soit strictement négatives et décroissantes. Elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. On ne voit pas comment résoudre l'équation [1] :

   $$y'(x) = x^2 + y^2$$

   Néanmoins, puisque $x^2 + y^2 \geq 0$, on peut dire que les solutions sont croissantes sur leurs intervalles de définition. Par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il passe un unique courbe intégrale (corollaire 1.2). En vertu des résultats sur le comportement d'une solution maximale y aux bornes de son intervalle de définition I, on peut affirmer que l'on a soit $I = \mathbb{R}$, soit $I =]a, b[\subsetneq \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \to a^+} y(x) = -\infty$ si a est fini, $\lim_{x \to b^-} y(x) = +\infty$ si b est fini. Toutes les solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Nous verrons au chapitre 3 que c'est une équation de Riccati. On sait la résoudre si on en trouve une solution particulière, mais ici cela ne semble pas facile.

4. On ne voit pas comment résoudre l'équation :

$$y'(x) = -\sin^2\big(xy(x)\big)$$

On peut toutefois dire que les solutions sont $\mathcal{C}^\infty$ et décroissantes sur leurs intervalles de définitions. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, le résultat de l'exercice 1.4 permet d'affirmer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier, car $|-\sin^2(xy)| \leq 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2.8 Cas d'une équation non normalisée

Nous nous intéressons ici au problème constitué d'une équation différentielle **non normalisée** et d'une condition initiale. Pour simplifier nous traitons le cas d'une équation **scalaire** du premier ordre :

$$f\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \quad \text{avec} \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.29}$$

Nous supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, à valeurs réelles.

L'équation n'étant pas normalisée, la valeur de $y'(x_0)$ n'est pas forcément déterminée par (1.29). La valeur z_0 de $y'(x_0)$ doit être une racine de l'équation d'inconnue z suivante :

$$f(x_0, y_0, z) = 0 \tag{1.30}$$

Il peut bien sûr arriver que :

- l'équation (1.30) n'ait pas de racine, auquel cas le problème (1.29) n'a pas de solution,
- l'équation (1.30) ait plusieurs racines z_1, z_2, …, auquel cas le problème (1.29) peut avoir plusieurs solutions.

Exemple 1.23. *Le problème :*

$$\mathrm{e}^{y'(x)} - y(x) = 0 \quad \textit{et} \quad y(1) = 0$$

n'a aucune solution, ni à valeurs réelles, ni même à valeurs complexes car la fonction exp *ne s'annule pas sur* $\mathbb{C}$*, donc l'équation ne peut pas être vérifiée en* $x = 1$*.*

Exemple 1.24. *Le problème :*

$$y'(x)^2 - y(x)^2 = 0 \quad \textit{et} \quad y(0) = 1$$

possède (au moins) deux solutions, à savoir les solutions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ *et* $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ *des problèmes de Cauchy* $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *.*

En présence d'un problème de la forme (1.29), on doit donc chercher, si possible, les racines z de l'équation (1.30). Supposons qu'il en existe au moins une, notée z_0. On a supposé que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et l'on a $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. On regarde si le ***théorème des fonctions implicites***[1] s'applique au voisinage du point (x_0, y_0, z_0). C'est le cas lorsque :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \tag{1.31}$$

1. Voir annexe A page 508.

Sous cette condition, il existe un ouvert V contenant (x_0, y_0), un intervalle ouvert J contenant z_0 et une fonction $\varphi : V \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'on ait l'équivalence suivante :

$$(x, y, z) \in V \times J \text{ et } f(x, y, z) = 0 \iff (x, y) \in V \text{ et } z = \varphi(x, y) \tag{1.32}$$

Comme cas particulier de (1.32), on a $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$.

Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' = \varphi\big(x, y(x)\big)$, *i.e.* u dérivable vérifiant :

$$\forall x \in I \quad \big(x, u(x)\big) \in V \ \text{ et } \ u'(x) = \varphi\big(x, u(x)\big)$$

D'après l'équivalence (1.32), on a :

$$\forall x \in I \quad \big(x, u(x), u'(x)\big) \in V \times J \ \text{ et } \ f\big(x, u(x), u'(x)\big) = 0$$

Autrement dit, u est une solution de l'équation différentielle $f\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$. De plus, d'après la proposition 1.1, puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, u est de classe $\mathcal{C}^2$.
Si nous supposons de plus que $u(x_0) = y_0$, alors $u'(x_0) = \varphi\big(x_0, u(x_0)\big) = z_0$. Ainsi, toute solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = \varphi\big(x, y(x)\big) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.33}$$

est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème (1.29) vérifiant $y'(x_0) = z_0$.

Réciproquement, si $v : L \to \mathbb{R}$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation différentielle $f\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$ vérifiant $v(x_0) = y_0$ et $v'(x_0) = z_0$, alors par continuité de v et v', il existe un intervalle $I \subset L$ tel que $\big(x, v(x)\big) \in V$ et $v'(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Grâce à l'équivalence (1.32), v est solution sur I de l'équation $y'(x) = \varphi\big(x, y(x)\big)$. Ainsi, toute solution $\mathcal{C}^1$ de (1.29) vérifiant de plus $y'(x_0) = z_0$ est solution du problème de Cauchy (1.33). Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, ce problème de Cauchy a une unique solution, ce qui montre qu'il y a au plus une solution $\mathcal{C}^1$ de (1.29) vérifiant $y'(x_0) = z_0$. Comme une solution $\mathcal{C}^2$ de (1.33) existe, la première partie montre qu'il y en a une.

Ce raisonnement montre que **pour chaque racine z_0 de (1.30) vérifiant (1.31), on a une solution locale, de classe $\mathcal{C}^2$, du problème (1.29)**. Pour les racines z_0 telles que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$, on ne peut rien dire dans le cas général.

Exemple 1.25. *Considérons le problème :*

$$(\mathcal{P}) \quad xy^4 - y'^2 = 0 \quad \textit{et} \quad y(x_0) = y_0$$

où l'on ne considère que des solutions y à valeurs réelles.
La fonction $f : (x, y, z) \mapsto xy^4 - z^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. L'équation $x_0 y_0^4 - z^2 = 0$ possède :

- *deux racines distinctes $z_1 = y_0^2\sqrt{x_0}$ et $z_2 = -y_0^2\sqrt{x_0}$ si $y_0 \neq 0$ et $x_0 > 0$;*
- *une racine $z_0 = 0$ si $y_0 = 0$ ou $x_0 = 0$;*
- *pas de racine si $y_0 \neq 0$ et $x_0 < 0$.*

Dans le premier cas, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z$ *ne s'annule ni en* (x_0, y_0, z_1)*, ni en* (x_0, y_0, z_2)*, donc le problème* $(\mathcal{P})$ *possède deux solutions* y_1 *et* y_2*, définies dans un intervalle contenant* x_0 *et vérifiant respectivement* $y_1'(x_0) = y_0^2\sqrt{x_0}$ *et* $y_2'(x_0) = -y_0^2\sqrt{x_0}$*.*

Dans le deuxième cas, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -2z_0 = 0$*, donc on ne peut rien dire sans étude complémentaire.*

Dans le dernier cas, le problème $(\mathcal{P})$ *n'a pas de solution.*

1.2.9 Trajectoires

Définition 1.5 (*Trajectoire*)

Soit $X : I \to \mathbb{R}^n$ *une solution de l'équation différentielle (1.14). On appelle* ***trajectoire*** *de cette solution l'ensemble* $X(I) = \big\{X(t)\,;\, t \in I\big\}$*.*

Plaçons nous sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.
Il ne faut pas confondre la notion de trajectoire avec celle de courbe intégrale. La courbe intégrale associée à une solution maximale $X : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ est une courbe de $\mathbb{R}^{n+1}$, alors que la trajectoire correspondante est une courbe de $\mathbb{R}^n$. Courbe intégrale et trajectoire sont toutes deux **paramétrées** [1] **par** t **variant dans** $I_{\max}$, mais **« l'axe des temps » n'apparaît pas dans la représentation graphique d'une trajectoire**. Quand on considère la trajectoire, on perd en quelque sorte l'information sur le temps.

Remarque 1.10. *En pratique, on dessine les courbes intégrales pour* $n = 1$ *(cas des équations différentielles scalaires) et on dessine plutôt les trajectoires pour* $n = 2$ *ou* $n = 3$*. En effet, le dessin des trajectoires pour* $n = 1$ *ne présente pas beaucoup d'intérêt : la trajectoire* $X(I)$ *est dans ce cas un intervalle (car c'est l'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles).*

Par contre, pour $n = 2$ *ou* $n = 3$*, la notion de trajectoire prend tout son sens : on peut par exemple l'interpréter comme celle d'un mobile ponctuel se déplaçant sous l'action d'une force.*

Exemple 1.26. *Pour l'équation (1.25) :*

- *La trajectoire de la solution nulle (pour* x_0 *quelconque et* $y_0 = 0$*) est un intervalle réduit à un point :* $y(\mathbb{R}) = \{0\}$*.*
- *Pour* $y_0 \neq 0$ *et* $x_0^2 < 1/y_0$*, i.e.* $C = y_0^{-1} - x_0^2 > 0$*, la trajectoire de la solution* $y : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + C}$ *est l'intervalle* $y(\mathbb{R}) =]0, 1/C[$*.*
- *Lorsque* $C = 0$*, i.e.* $y_0 = 1/x_0^2$*, la trajectoire de la solution* $y : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ *est l'intervalle* $y(]-\infty, 0[) =]0, +\infty[$ *si* $x_0 < 0$*, l'intervalle* $y(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ *si* $x_0 > 0$*.*

On laisse le lecteur déterminer la trajectoire dans les cas où $C < 0$ *et visualiser ces trajectoires réduites à des intervalles sur la figure 1.1.*

1. On trouvera des rappels sur la notion de paramétrage dans l'annexe A au paragraphe A.3.

Remarque 1.11. *Nous avons déjà remarqué que dans le cas du mouvement d'un mobile ($n = 2$ ou $n = 3$), la visualisation de la trajectoire ne fait pas apparaître le temps t. Toutefois, l'on peut préciser par une flèche le sens de parcours de la trajectoire quand t croît. On « récupère » ainsi une partie de « l'information temporelle » que l'on avait perdue en considérant la trajectoire plutôt que la courbe intégrale.*

Remarque 1.12. *On prendra garde à l'erreur suivante : sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, les courbes intégrales ne se coupent pas, mais il n'y a aucune raison que les trajectoires, elles, ne se coupent pas. En effet, la trajectoire de la solution X est obtenue en « projetant » la courbe intégrale correspondante sur $\mathbb{R}^n$. Deux courbes intégrales ne se coupant pas peuvent se projeter suivant deux trajectoires se coupant.*

Exemple 1.27. *Considérons le système différentiel :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & t^{-1}\, x(t) - t y(t) \\ y'(t) & = & t^{-1}\, x(t) \end{array} \right. \tag{1.34}$$

Il est immédiat de vérifier que, pour toute valeur du paramètre réel a, la fonction

$$X_a \,:\, t \mapsto \big(a\, t \cos(t), a \sin(t)\big) \in \mathbb{R}^2$$

est une solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ du système (1.34). Le corollaire 1.2 du théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur l'ouvert $\Omega = \big\{(t, x, y)\,;\, t \neq 0\big\}$. En restriction à l'un des intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, les fonctions X_a sont des solutions maximales. Pour fixer les idées, travaillons dans la suite sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Vérifions, comme l'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz, que si l'on fait varier a, les ***courbes intégrales*** *ne se coupent pas.*

Les courbes intégrale sont les courbes de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\big\{\big(t, a\, t \cos(t), a \sin(t)\big)\,;\, t > 0\big\}$$

Pour $a \neq b$, supposons qu'il existe $t > 0$ tel que

$$\big(t, a\, t \cos(t), a \sin(t)\big) = \big(t, b\, t \cos(t), b \sin(t)\big)$$

On a alors $a \sin(t) = b \sin(t)$ avec $a \neq b$, donc $\sin(t) = 0$, d'où $t = k\pi$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ car $t > 0$). On déduit de $a\, t \cos(t) = b\, t \cos(t)$ l'égalité $k\pi(-1)^k = 0$, ce qui est impossible puisque $k \neq 0$.

Le fait que ces courbes intégrales « se coupent » toutes en $(0, 0, 0)$ n'est pas contradictoire car $(0, 0, 0)$ est un point frontière de Ω, donc n'appartient pas aux courbes intégrales. On voit l'importance de travailler avec une équation normalisée lorsque l'on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Toutefois, les ***trajectoires*** *correspondantes*

$$X_a(]0, +\infty[) = \Big\{ \big(a\, t \cos(t), a \sin(t)\big)\,;\, t > 0 \Big\}$$

(qui sont des courbes de $\mathbb{R}^2$) peuvent se couper lorsque l'on fait varier a. Par exemple pour $a = 1$ et $b = 2$, il est possible de montrer qu'il existe $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$ tels que $t_1 \cos(t_1) = 2\, t_2 \cos(t_2)$ et $\sin(t_1) = 2 \sin(t_2)$. On a représenté la situation sur la figure 1.4, où il apparaît que les courbes intégrales sont des « spirales » de $\mathbb{R}^3$ (sur le deuxième schéma l'axe des t pointe vers le lecteur) ne se coupant qu'au point frontière $(0, 0, 0)$ mais se projetant suivant des trajectoires planes se coupant (en plusieurs points).

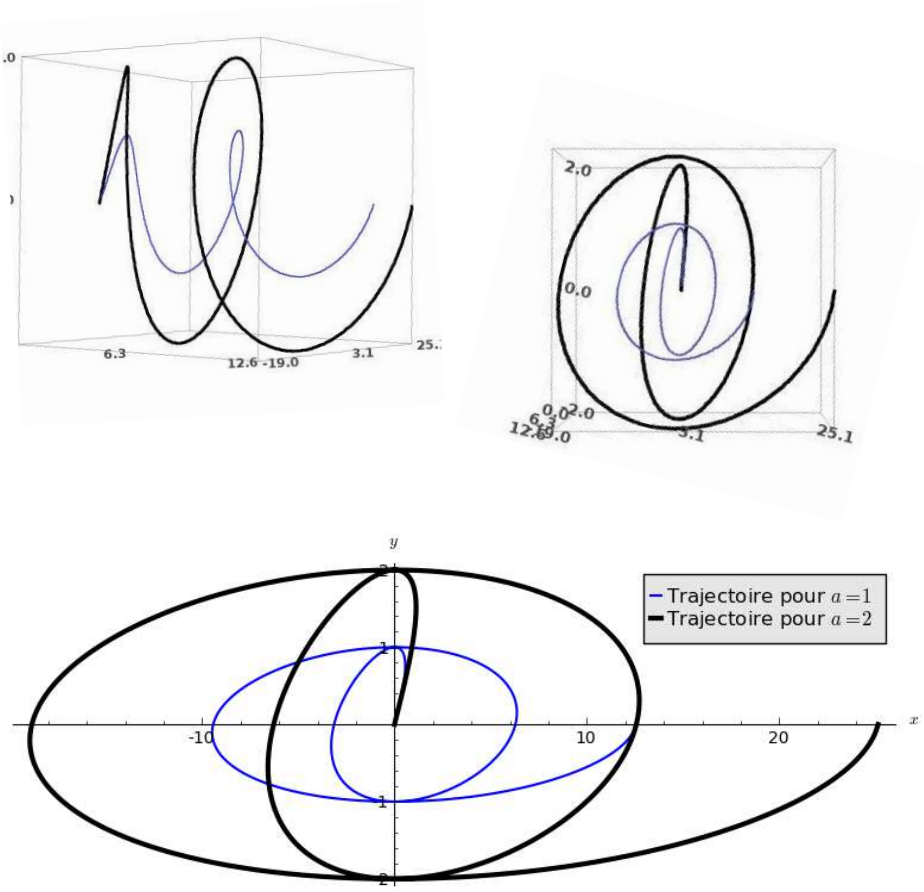


FIGURE 1.4 – *2 courbes intégrales de (1.34), sous deux angles de vue distincts (courbes de $\mathbb{R}^3$). Les 2 trajectoires correspondantes (courbes de $\mathbb{R}^2$).*

Remarque 1.13. *Soit $X : t \mapsto \big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Rappelons que* ***s'il n'est pas nul****, le vecteur*

$$X'(t) = \big(\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t)\big)$$

dirige la tangente *à la courbe paramétrée*

$$\begin{cases} x_1 &= \varphi_1(t) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_n &= \varphi_n(t) \end{cases}$$

Il en résulte que si X est une solution de l'équation différentielle (1.14) sur un intervalle I où $f\big(t, X(t)\big) \neq 0$, l'égalité $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$ exprime que ***la trajectoire correspondante est la courbe où la tangente est en tout point $X(t)$ dirigée par $f\big(t, X(t)\big)$.***

Exemple 1.28. *Dans l'exemple 1.27, si nous interprétons la trajectoire comme celle d'un point* $X(t) = \big(a\,t\cos(t), a\sin(t)\big)$ *se déplaçant dans le plan, alors le vecteur*

$$X'(t) = (a\,\cos t - a\,t\sin t, a\cos t)$$

est tangent à la trajectoire et représente la ***vitesse instantanée*** *à l'instant* t *de ce mobile ponctuel.*

1.2.10 Régularité par rapport aux données initiales

Pour le problème de Cauchy (1.14)(1.15), avec f continue et localement lipschitzienne, il se pose une question naturelle : comment varie la solution du problème de Cauchy de donnée (s, Y) lorsque (s, Y) tend vers (t_0, X_0) ? Tend-elle, en un sens à préciser, vers la solution du problème de Cauchy de donnée (t_0, X_0) (continuité par rapport aux données initiales) ? Si oui, a-t-on plus de régularité de la solution par rapport aux données initiales ?

Il existe un théorème de continuité et de dérivabilité par rapport aux données initiales que nous énonçons sans démonstration [1].

Théorème 1.4 (*Régularité de la solution par rapport aux données initiales*)

On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour chaque $(t_0, X_0) \in \Omega$, *il existe un voisinage* $V \subset \Omega$ *de* (t_0, X_0) *et* $T > 0$ *tels que, pour tout* $(s, Y) \in V$, *la solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale* $X(s) = Y$, *notée* $t \mapsto \phi\big(t;(s,Y)\big)$, *est solution sur* $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. *De plus, l'application* $\big(t,(s,Y)\big) \mapsto \phi\big(t;(s,Y)\big)$ *est continue sur* $I \times V$.
Si de plus, f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω, *alors l'application* $\big(t,(s,Y)\big) \mapsto \phi\big(t;(s,Y)\big)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $I \times V$.

Ce théorème est très utile dans certaines applications. Pour notre part nous l'utiliserons au chapitre 5.

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1.1

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''' \ln(x-1) - xyy'' - \sqrt{y'} + \mathrm{e}^x = 0$$

Que dit le théorème de Cauchy-Lipschitz pour cette équation ? Que dire des solutions ?

Solution. Il faut bien sûr interpréter x comme une variable, y, y', y'' et y''' comme respectivement $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ et $y'''(x)$, de sorte que (E) est une équation différentielle scalaire d'ordre 3, la fonction inconnue étant y.

1. Le lecteur intéressé trouvera la démonstration dans (Queffélec et Zuily, 2013).

Une solution de (E) est une fonction y définie et 3 fois dérivable sur un intervalle inclus dans $]1,+\infty[$, vérifiant sur cet intervalle $y'(x) \geq 0$ et l'égalité (E). Toutefois, pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, on doit **normaliser** l'équation différentielle, ce qui nécessite de diviser par $\ln(x-1)$, de sorte que (E) n'est *a priori* pas équivalente à sa « version normalisée » (E') :

$$(E') \quad y'''(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}\left(xy(x)y''(x) + \sqrt{y'(x)} - \mathrm{e}^x\right)$$

car les intervalles sur lesquels sont définies les solutions de (E') sont inclus dans $]1,2[$ ou dans $]2,+\infty[$, et non dans $]1,+\infty[$.

On pourrait naturellement directement appliquer le corollaire 1.3 du théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation (E') dans le cas de l'ordre $k=3$. Ce corollaire a en effet justement été introduit pour traiter le cas des équations scalaires normalisées d'ordre quelconque. Dans un souci d'appropriation de la méthode, on va plutôt refaire dans ce cas particulier l'intégralité du raisonnement permettant de déduire ce corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz. On commence par écrire le système différentiel normalisé d'ordre 1 associé à l'équation (E') en introduisant des inconnues supplémentaires telles que $y_1 = y'$ et $y_2 = y''$. On obtient immédiatement :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & y_1(x) \\ y_1'(x) & = & y_2(x) \\ y_2'(x) & = & \frac{1}{\ln(x-1)}\left(xy(x)y_2(x) + \sqrt{y_1(x)} - \mathrm{e}^x\right) \end{array} \right.$$

Le système (S) est de la forme $Y'(x) = f\big(x, Y(x)\big)$, où l'inconnue est :

$$Y(x) = \big(y(x), y_1(x), y_2(x)\big)$$

et f la fonction de 4 variables réelles (et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) définie par :

$$f(x,y,y_1,y_2) = \left(y_1, y_2, \frac{1}{\ln(x-1)}\big(xyy_2 + \sqrt{y_1} - \mathrm{e}^x\big)\right)$$

Il est important de comprendre que dans cette définition de f (uniquement introduite dans le but de vérifier les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz), on doit considérer x, y, y_1, y_2 comme des **variables indépendantes** (et non y comme une fonction de x ou y_1 comme la dérivée de y).

On note que f est définie et continue sur l'ensemble :

$$D_f = \big\{(x,y,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x \in]1,2[\cup]2,+\infty[\text{ et } y_1 \geq 0\big\}$$

Pour appliquer le corollaire 1.2 du théorème de Cauchy-Lipschitz, on doit trouver un ouvert de $\mathbb{R}^4$ inclus dans D_f (d'ailleurs, D_f n'est pas ouvert) sur lequel les dérivées partielles des trois composantes de f par rapport aux variables y, y_1, y_2 sont définies et continues. Il est clair que les dérivées partielles des deux premières composantes, définies par $f_1(x,y,y_1,y_2) = y_1$ et $f_2(x,y,y_1,y_2) = y_2$, sont définies et continues sur D_f. Pour la troisième composante, définie sur D_f par $f_3(x,y,y_1,y_2) = \frac{1}{\ln(x-1)}\big(xyy_2 + \sqrt{y_1} - \mathrm{e}^x\big)$, on note que $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f_3}{\partial y_2}$ sont définies et continues sur D_f mais que $\dfrac{\partial f_3}{\partial y_1}$ est une fonction définie et continue *a priori* seulement sur l'ouvert :

$$\Omega = \big\{(x,y,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x \in]1,2[\cup]2,+\infty[\text{ et } y_1 > 0\big\}$$

En effet, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

Ainsi, pour tout $(x_0,y_0,u_0,v_0) \in \Omega$, il existe une unique solution $Y=(y,y_1,y_2)$ du système (S) tel que $Y(x_0)=(y_0,u_0,v_0)$. Autrement dit, il existe une unique solution y de l'équation (E') telle que :

$$y(x_0)=y_0\ ,\quad y'(x_0)=u_0\ ,\quad y''(x_0)=v_0$$

Nous supposons dans la suite que l'intervalle $I_{\max}$ contenant x_0 sur lequel cette solution est définie est le plus grand possible, *i.e.* nous considérons la solution maximale du problème de Cauchy. Cet intervalle $I_{\max}$ est inclus dans $]1,2[$ (respectivement inclus dans $]2,+\infty[$) lorsque $x_0 \in]1,2[$ (respectivement lorsque $x_0 \in]2,+\infty[$). La quantité $\ln(x-1)$ ne s'annule donc pas sur l'intervalle $I_{\max}$, de sorte qu'il est équivalent de dire que y vérifie (E') sur $I_{\max}$ ou que y vérifie (E) sur $I_{\max}$.

Nous avons donc finalement la situation suivante :

- Pour $1<x_0<2$, y_0 réel quelconque, $u_0>0$, v_0 réel quelconque, il existe un intervalle $I_{\max} \subset]1,2[$ et une fonction $y : I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable, vérifiant l'égalité (E) pour tout $x \in I_{\max}$ (ce qui impose en particulier que l'on a $y'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I_{\max}$) ainsi que les conditions initiales $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=u_0$ et $y''(x_0)=v_0$. Cette solution du problème de Cauchy est unique si $I_{\max}$ est choisi le plus grand possible (toute autre solution $z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ du problème de Cauchy est alors telle que $I \subset I_{\max}$ et $z(x)=y(x)$ pour $x \in I$).

- Pour $x_0>2$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $u_0>0$, $v_0 \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle $I_{\max} \subset]2,+\infty[$ et une unique solution $y : I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}$ de (E) vérifiant les conditions initiales $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=u_0$ et $y''(x_0)=v_0$.

Insistons sur le fait que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne permet de conclure ni sur l'existence, ni sur l'unicité de la solution lorsque les conditions initiales associées à (E) sont $y(2)=y_0$, $y'(2)=u_0$, $y''(2)=v_0$ (l'équation (E) n'est pas normalisable dans un voisinage de $x_0=2$). On a vu que, pour une autre raison, il ne permet pas non plus de conclure pour des conditions initiales de la forme $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=0$, $y''(x_0)=v_0$, même pour $x_0 \in]1,2[\cup]2,+\infty[$.

Que peut-on dire d'autre des solutions (sans calcul) ?

- On peut préciser que l'on a $y'(x)>0$ pour tout $x \in I_{\max}$, car on a appliqué le théorème de Cauchy-Lipschitz sur Ω, ce qui implique *par définition* de ce qu'est une solution du système (S) que pour tout $x \in I_{\max}$, on a $\big(x,y(x),y_1(x),y_2(x)\big) \in \Omega$. La solution maximale y du problème de Cauchy est donc **strictement croissante**.

- On peut remarquer que l'application f sur laquelle on a basé notre raisonnement est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert Ω. On déduit donc du corollaire 1.1 page 17 que la solution maximale du problème de Cauchy est en fait indéfiniment dérivable.

Exercice 1.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle scalaire :

$$(E_n) \qquad y' = y^n$$

1. *Sur quel ouvert peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz ?*
2. *Résoudre (E_n) et constater que lorsque $n \neq 0$ et $n \neq 1$, les solutions maximales ne sont pas toutes définies sur $\mathbb{R}$.*
3. *Détailler les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.*
4. *Soit $n \geq 2$. Que dit le corollaire 1.4 pour (E_n) ? Vérifier ce résultat directement.*

Solution.

1. L'équation (E_n) est de la forme $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, s) = s^n$. L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe donc une unique solution maximale y de (E_n) telle que $y(x_0) = y_0$.

2. L'équation s'intègre immédiatement lorsqu'on l'écrit sous la forme $y'(x)y^{-n}(x) = 1$. Mais cette écriture suppose que les solutions ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition. Or, la fonction nulle est une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, solution unique du problème de Cauchy de condition initiale $y(x_0) = 0$. Cela montre que si une solution s'annule en un point x_0, alors c'est la fonction nulle. Ainsi, une solution y non identiquement nulle sur son intervalle de définition I ne s'annule en aucun point de I. On a donc $y'(x)y^{-n}(x) = 1$ pour tout $x \in I$, d'où l'existence d'une constante réelle c telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I \quad \frac{1}{-n+1}\, y^{-n+1}(x) = x + c & \text{lorsque } n \neq 1 \\ \forall x \in I \quad \ln|y(x)| = x + c & \text{lorsque } n = 1 \end{cases}$$

   On en déduit l'étude de cas suivante pour les solutions autres que la fonction nulle :

   (a) Pour $n = 0$, les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = x + c$$

   C'était prévisible puisque dans ce cas l'équation différentielle est $y'(x) = 1$.

   (b) Pour $n = 1$, on trouve que $|y(x)| = \exp(x + c)$. Comme y ne s'annule pas sur son intervalle de définition I, cela implique que soit l'on a $y(x) = \mathrm{e}^c\, \mathrm{e}^x$ sur I en entier, soit l'on a $y(x) = -\mathrm{e}^c\, \mathrm{e}^x$ sur I en entier (la valeur de c et le choix du signe dépendant de la donnée de Cauchy (x_0, y_0)). On remarque que ces expressions définissent sur $\mathbb{R}$ des fonctions ne s'annulant jamais.

   Réciproquement, pour toute constante réelle K, les fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^x$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y$. La solution maximale vérifiant $y(x_0) = y_0$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et K s'obtient en résolvant l'équation $K\mathrm{e}^{x_0} = y_0$, donc la solution est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{x - x_0}$$

On constate effectivement que la seule solution s'annulant est la fonction nulle, correspondant à $y_0 = 0$, ce qui donne $K = 0$. Les autres solutions sont du signe de $K = y_0 \mathrm{e}^{-x_0}$, *i.e.* du signe de y_0 (autrement dit, avec les notations précédentes, on a $K = \mathrm{e}^c$ lorsque $y_0 > 0$ et $K = -\mathrm{e}^c$ lorsque $y_0 < 0$).

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ correspondent en fait au cas d'équations ***linéaires***, qui seront étudiées au chapitre 2. Nous verrons que le fait que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ était prévisible.

(c) Pour $n \geq 2$, on a :

$$\forall x \in I \qquad y(x)^{1-n} = (1-n)(x+c)$$

Pour $y_0 \neq 0$, cherchons la solution maximale y telle que $y(x_0) = y_0$, en notant encore I son intervalle de définition. Puisque la solution y ne s'annule pas sur I, elle est du signe de y_0, et l'on a :

$$y_0^{1-n} = (1-n)(x_0+c) \quad i.e. \quad c = \frac{y_0^{1-n}}{1-n} - x_0$$

Si $y_0 > 0$, alors $y(x)^{1-n} > 0$ sur I, de sorte que I est contenu dans le plus grand intervalle contenant x_0 sur lequel $(1-n)(x+c) > 0$. Notons que puisque $n \geq 2$, on a $1 - n \leq -1$. Ainsi, I est contenu dans le plus grand intervalle contenant x_0 sur lequel $x + c < 0$, *i.e* $I \subset]-\infty, -c[$. La solution y est définie par :

$$\forall x \in I \qquad y(x) = \big((1-n)(x+c)\big)^{\frac{1}{1-n}} = \big((1-n)(x-x_0) + y_0^{1-n}\big)^{\frac{1}{1-n}} \quad (1.35)$$

Réciproquement, par vérification directe, y définie par (1.35) est en fait solution sur $]-\infty, -c[$ en entier, donc on a :

$$I =]-\infty, -c[= \left]-\infty, x_0 + \frac{y_0^{1-n}}{n-1}\right[$$

Si $y_0 < 0$, alors $y(x) < 0$ sur I et le signe de $y(x)^{1-n}$ dépend de la parité de n.

- Si n est pair, alors $1 - n$ est impair donc $y(x)^{1-n} < 0$ sur I, donc $x + c > 0$ sur I, ce qui nous donne :

$$I =]-c, +\infty[= \left]x_0 + \frac{y_0^{1-n}}{n-1}, +\infty\right[$$

  La solution y est définie sur cet intervalle I par (1.35).
- Si n est impair, alors $1 - n$ est pair donc $y(x)^{1-n} > 0$ sur I, donc $x + c < 0$ sur I, ce qui nous donne :

$$I =]-\infty, -c[= \left]-\infty, x_0 + \frac{y_0^{1-n}}{n-1}\right[$$

  Dans ce cas, on a $y(x) < 0$. On a, puisque $1 - n$ est pair :

$$y(x)^{1-n} = \big(-y(x)\big)^{1-n} = (1-n)(x+c) > 0$$

  De $-y(x) > 0$, on déduit que $-y(x) = \big((1-n)(x+c)\big)^{\frac{1}{1-n}}$. La solution y est donc définie sur l'intervalle I par :

$$y(x) = -\big((1-n)(x-x_0) + y_0^{1-n}\big)^{\frac{1}{1-n}} \quad (1.36)$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, les solutions maximales de cette équation, pourtant de la forme $y' = F(y)$ avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ lorsque $y_0 \neq 0$: l'intervalle de définition dépend de la condition initiale.

3. **Cas particuliers $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.**

   (a) La solution maximale de l'équation $y' = y^2$ telle que $y(x_0) = y_0$ est définie sur l'intervalle $I = \left]-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0}\right[$ si $y_0 > 0$, sur $I = \left]x_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty\right[$ si $y_0 < 0$.
   Dans les deux cas, on a $y(x) = \dfrac{1}{x_0 + \frac{1}{y_0} - x}$ pour tout $x \in I$.

   (b) La solution maximale de l'équation $y' = y^3$ telle que $y(x_0) = y_0$ est définie sur $I = \left]-\infty, x_0 + \frac{1}{2y_0^2}\right[$. Pour tout $x \in I$, on a :
   $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x_0 + \frac{1}{y_0^2} - 2x}}$ si $y_0 > 0$ et $y(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2x_0 + \frac{1}{y_0^2} - 2x}}$ si $y_0 < 0$.

   (c) La solution maximale de l'équation $y' = y^4$ telle que $y(x_0) = y_0$ est définie sur $I = \left]-\infty, x_0 + \frac{1}{3y_0^3}\right[$ si $y_0 > 0$, sur $I = \left]x_0 + \frac{1}{3y_0^3}, +\infty\right[$ si $y_0 < 0$.
   Dans les deux cas $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x_0 + \frac{1}{y_0^3} - 3x}}$ pour tout $x \in I$.

4. Lorsque n est pair et $y_0 \neq 0$, on a $y'(x) = y^n(x) > 0$, donc y est strictement croissante sur son intervalle de définition.

   Pour $y_0 > 0$, l'intervalle I de définition de la solution maximale y est limité à droite par $-c = x_0 + \frac{y_0^{1-n}}{n-1}$. Le corollaire 1.4 affirme que lorsque x tend vers $-c^-$, on a deux possibilités : soit $y(x)$ tend vers $+\infty$, soit $y(x)$ tend vers une valeur réelle ℓ telle que $(-c, \ell)$ soit un point frontière de l'ouvert Ω sur lequel on a appliqué le théorème de Cauchy-Lipschitz. Or, ici $\Omega = \mathbb{R}^2$ n'a aucun point frontière, donc on a nécessairement :

   $$\lim_{x \to -c^-} y(x) = +\infty$$

   Pour $y_0 < 0$, l'intervalle I est limité à gauche par $-c$, donc on a :

   $$\lim_{x \to -c^+} y(x) = -\infty$$

   Dans les deux cas, c'est bien ce qu'on observe sur l'écriture (1.35) de la solution.

   Lorsque n est impair, on a $y'(x) = y^n(x)$ du signe de $y(x)$, donc y est strictement croissante sur I lorsque $y_0 > 0$, strictement décroissante lorsque $y_0 < 0$. On doit donc avoir

   $$\lim_{x \to -c^-} y(x) = +\infty \text{ lorsque } y_0 > 0\ , \quad \lim_{x \to -c^-} y(x) = -\infty \text{ lorsque } y_0 < 0$$

   On le vérifie sur (1.35) pour $y_0 > 0$ et sur (1.36) pour $y_0 < 0$.

Exercice 1.3

On considère une équation différentielle scalaire (E) de la forme :

$$x'(t) = g(t)\,|x(t)|$$

où g est continue sur un intervalle I. Résoudre (E).

Solution. Il s'agit d'un exemple pour lequel le corollaire 1.2 du théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas sur $I \times \mathbb{R}$ en entier car la fonction $(t,x) \mapsto g(t)\,|x|$ n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(t_0, 0)$. Par contre, le théorème de Cauchy-Lipschitz lui-même (qui est un énoncé plus général) s'applique sur l'ouvert $I \times \mathbb{R}$. En effet, la fonction $(t,x) \mapsto g(t)\,|x|$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à x sur $I \times \mathbb{R}$ (cf. exemple 1.15 page 21). Nous allons résoudre l'équation (E) en déterminant pour chaque $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ l'unique solution maximale telle que $x(t_0) = x_0$ (c'est une façon de décrire l'ensemble des solutions).

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction nulle est clairement l'unique solution de (E) telle que $x(t_0) = 0$. Cela montre qu'une solution x autre que la fonction nulle ne s'annule pas sur son intervalle de définition $J \subset I$.

Considérons une solution $x : J \to \mathbb{R}$ non nulle. Par continuité de x, on a soit $x(t) > 0$ pour tout $t \in J$, soit $x(t) < 0$ pour tout $t \in J$. Ainsi, une solution maximale y telle que $y(t_0) = y_0 > 0$ vérifie $y'(t) = g(t)y(t)$, et une solution maximale z telle que $z(t_0) = z_0 < 0$ vérifie $z'(t) = -g(t)z(t)$. De plus, y et z ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition, toujours noté J dans la suite (mais ne perdons pas de vue que J dépend *a priori* de la solution y ou z). Pour y on a $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = g(t)$, et pour z on a $\dfrac{z'(t)}{z(t)} = -g(t)$. En notant G une primitive de g sur J (qui existe car g est continue sur l'intervalle J), on obtient :

$$\ln\big(y(t)\big) - \ln y_0 = G(t) - G(t_0) \quad , \quad \ln\big(-z(t)\big) - \ln(-z_0) = -G(t) + G(t_0)$$

On a donc nécessairement, pour $t \in J$:

$$y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{G(t)-G(t_0)} \quad , \quad z(t) = z_0\,\mathrm{e}^{-G(t)+G(t_0)}$$

À titre de vérification, on a bien $y(t_0) = y_0$ et $y(t) > 0$ (car $y(t)$ est du signe de y_0), ainsi que $z(t_0) = z_0$ et $z(t) < 0$ (car $z(t)$ est du signe de z_0). Réciproquement, les expressions précédentes définissent bien une solution de (E) sur tout intervalle $J \subset I$. Les solutions maximales sont donc définies sur I en entier et sont les fonctions de l'une des formes suivantes :

$$t \in I \mapsto x(t) = C\,\mathrm{e}^{\int g(t)\,\mathrm{d}t} \text{ où } C \geq 0 \quad , \quad t \in I \mapsto x(t) = K\,\mathrm{e}^{-\int g(t)\,\mathrm{d}t} \text{ où } K \leq 0$$

La solution nulle s'obtient avec l'une ou l'autre forme, en prenant C ou K égal à 0.

Exercice 1.4

On considère une équation différentielle $X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$ avec f continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On suppose que f est ***bornée*** *sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Démontrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.*

Solution. Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que pour tout $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale X telle que $X(t_0) = X_0$, définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.
On va démontrer que $b = +\infty$ (preuve analogue pour montrer que $a = -\infty$). Raisonnons par l'absurde en supposant que b est fini.

Comme f est bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto X'(t) = f\big(t, X(t)\big)$ est bornée sur I. En notant $M = \sup_{t \in I} \|X'(t)\|$, l'inégalité des accroissements finis nous donne :

$$\forall (t, t') \in I^2 \qquad \|X(t) - X(t')\| \leq M|t - t'|$$

Cela implique que X admet une limite L en b^-. En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si t et t' sont dans l'intervalle $]b - \eta, b[$, alors $\|X(t) - X(t')\| < \varepsilon$ (choisir $\eta = \varepsilon/M$). Le critère de Cauchy est donc vérifié pour la fonction X au voisinage de b^-. Comme $\mathbb{R}^n$ est complet [1], cela implique que $L = \lim_{t \to b^-} X(t)$ existe dans $\mathbb{R}^n$.

On a donc aussi l'existence d'une limite $L' = f(b, L)$ pour $X'(t)$ en b^-, car f est continue. D'après le théorème des accroissements finis (revoir si nécessaire le raisonnement de la preuve de la proposition 1.3), cela implique que la fonction $\tilde{X}$ qui prolonge X par continuité (définie par $\tilde{X}(t) = X(t)$ pour $t \in I$ et $\tilde{X}(b) = L$) est dérivable à gauche en b avec $\tilde{X}'(b) = L'$. On a de plus la relation $\tilde{X}'(t) = f\big(t, \tilde{X}(t)\big)$ pour tout $t \in]a, b]$, ce qui montre que $\tilde{X}$ est une solution prolongeant strictement X et contredit le caractère maximal de la solution X. Ainsi, $b = +\infty$.

Par exemple, on ne voit pas comment résoudre les équations différentielles scalaires $y'(x) = \sin\big(xy^2(x)\big)$ et $y'(x) = \arctan\big(\exp(x^2y^3(x))\big)$, mais on peut affirmer que leurs solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$, car :

$$\big|\sin\big(xy^2\big)\big| \leq 1 \quad \text{et} \quad \big|\arctan\big(\exp(x^2y^3)\big)\big| < \pi/2$$

Exercice 1.5

On considère l'équation différentielle scalaire $y'(x) = y^3(x) \sin^2\big(y(x)\big)$.

1. *Remarquer qu'il y a des solutions évidentes.*
2. *Démontrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.*
3. *Étudier le sens de variation des solutions.*

Solution.

1. Les fonctions constantes $x \mapsto k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Un espace vectoriel normé est complet lorsque toute suite de Cauchy est convergente. Une suite (x_n) est de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n' \geq N$ alors $\|x_n - x_{n'}\| < \varepsilon$. Ici, pour toute suite (t_n) de réels de $]a, b[$ convergente vers b, la suite $\big(X(t_n)\big)$ est de Cauchy. Puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, la suite $\big(X(t_n)\big)$ est donc convergente vers un certain vecteur $L \in \mathbb{R}^n$.

2. Il passe par tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ une unique solution maximale (le théorème de Cauchy-Lipschitz, ou plus simplement le corollaire 1.2, s'appliquent sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Si y_0 est de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors cette solution est la fonction constante $y = k\pi$. Sinon, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\pi < y_0 < (k+1)\pi$ et la courbe intégrale passant par (x_0, y_0) ne coupe ni la droite $y = k\pi$, ni la droite $y = (k+1)\pi$, car ces droites sont elles-mêmes des courbes intégrales. On a donc pour la solution maximale $x \mapsto y(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ la propriété :

$$\forall x \in J \quad k\pi < y(x) < (k+1)\pi$$

en notant J son intervalle de définition. Ainsi y est bornée et il suffit d'appliquer le corollaire 1.5 (avec ici $I = \mathbb{R}$) pour conclure que y est définie sur $\mathbb{R}$.

On peut en fait aussi conclure sans faire appel au corollaire 1.5 : comme y est bornée sur J, il en est de même de $x \mapsto y^3(x)\sin^2\big(y(x)\big)$. Ainsi y' est bornée sur J. Il suffit d'utiliser le raisonnement de l'exercice 1.4 pour en déduire que si l'une des bornes a ou b de J est finie, alors y, puis y', admettent une limite finie en a^+ ou en b^-, et cela contredit le caractère maximal de la solution y.

3. Notons d'abord que les seules solutions constantes sont de la forme $y(x) = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

En effet, si $x \mapsto c$ est une solution, alors $0 = c^3\sin^2(c)$, donc $c = 0$ ou $\sin^2(c) = 0$, *i.e.* il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k\pi$.

Notons y une solution maximale non constante. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = y^3(x)\sin^2\big(y(x)\big)$ est du signe de $y^3(x)$, donc du signe de $y(x)$. De plus, y ne s'annule pas puisque la fonction nulle est l'une des solutions constantes.

On en déduit immédiatement que :

- les solutions prenant une valeur $y_0 \in]k\pi, (k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$;
- les solutions prenant une valeur $y_0 \in]k\pi, (k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq -1$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6

On considère une équation différentielle scalaire de la forme :

$$y'(t) = y(t)g\big(t, y(t)\big)$$

où $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ainsi que $\dfrac{\partial g}{\partial y}$. On suppose que g est ***bornée*** *sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ (utiliser le lemme de Gronwall).*

Solution. La fonction $(t, y) \mapsto yg(t, y)$ vérifie sur $\mathbb{R}^2$ les hypothèses du corollaire 1.2, donc pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale y vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.
Notons $I =]a, b[$ l'intervalle de définition de y et démontrons que $b = +\infty$ (raisonnement analogue pour prouver que $a = -\infty$). On va utiliser la formulation intégrale du problème de Cauchy et le lemme de Gronwall.

On a $y(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} y(s)g\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}s$ pour tout $t \in I$.

On en déduit la majoration $|y(t)| \leq |y_0| + \left|\displaystyle\int_{t_0}^{t} \big|y(s)g\big(s, y(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s\right|$.

En notant M une borne pour $|g|$, on a donc $|y(t)| \leq |y_0| + \left|\displaystyle\int_{t_0}^{t} M\,\big|y(s)\big|\,\mathrm{d}s\right|$.

On applique le lemme de Gronwall (page 20) avec $u = |y|$, $\phi = M$ et $K = |y_0|$. Cela donne :

$$|y(t)| \leq |y_0|\, e^{\left|\int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}s\right|} = |y_0|\, e^{M\,|t-t_0|}$$

Pour conclure, on raisonne par l'absurde en supposant que b est fini. On peut procéder de deux façons.

Première méthode. La fonction $t \mapsto |y_0|\, e^{M\,|t-t_0|}$ est continue, donc bornée sur le segment $[t_0, b]$, ce qui implique que y est bornée sur $[0, b[$. La fonction $y' : t \mapsto y(t)g\big(t, y(t)\big)$ est donc elle aussi bornée sur $[t_0, b[$: $|y'(t)| \leq M \displaystyle\sup_{t\in[t_0,b[} |y(t)|$.

Le raisonnement de l'exercice 1.4 utilisant l'inégalité des accroissements finis montre que y admet une limite en b^-, donc y' aussi par continuité de $(t, y) \mapsto yg(t, y)$. On conclut comme dans l'exercice 1.4 que ceci contredit le caractère maximal de la solution y.

Deuxième méthode. L'ouvert sur lequel on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz étant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le théorème 1.2 (« explosion en temps fini ») s'applique, avec ici $I = \mathbb{R}$. Puisque b est fini, on doit avoir $\displaystyle\lim_{t\to b^-} |y(t)| = +\infty$. Or, ceci est en contradiction avec l'inégalité démontrée car $\displaystyle\lim_{t\to b^-} |y_0|\, e^{M\,|t-t_0|} = |y_0|\, e^{M(b-t_0)} < +\infty$.

Exercice 1.7 (*Système proies-prédateurs*)

On considère le système Proies-Prédateurs (1.8) page 15.

1. *Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale $X : t \in J \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ vérifiant $\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0)$.*
2. *Calculer cette solution lorsque $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$.*
3. *Justifier que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ (situation biologique), alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in J$.*
4. *Démontrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors $J = \mathbb{R}$. On pourra utiliser le lemme de Gronwall.*

Solution.

1. L'application $f : (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (ax - cxy, -by + dxy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
   A fortiori le corollaire pratique du théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique pour tout $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$, en particulier pour $t_0 = 0$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. On peut se laisser guider par la situation biologique pour deviner la solution.
   Pour $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$ (absence de prédateurs à l'instant 0), en supposant le modèle mathématique adapté, le nombre de prédateurs devrait rester nul et la première équation se réduirait alors à $x'(t) = ax(t)$ (autrement dit, le nombre de proies devrait augmenter suivant la loi de Malthus).

On devrait donc avoir $x(t) = x_0 e^{at}$ et $y(t) = 0$. Maintenant que l'on a deviné un candidat pour $\big(x(t), y(t)\big)$, il est immédiat de vérifier directement que $t \mapsto (x_0 e^{at}, 0)$ est bien une solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel (1.8) et que cette solution vaut $(x_0, 0)$ en $t = 0$. Par unicité de la solution maximale du problème de Cauchy de donnée $(0, x_0, 0)$, c'est la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto (x_0 e^{at}, 0)$. Cette forme de la solution est encore valable si $x_0 < 0$ et $y_0 = 0$.

De même, si $x_0 = 0$ (absence de proies à l'instant 0), alors $x(t)$ devrait rester nul et le nombre de prédateurs devrait décroitre exponentiellement. On vérifie directement que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto (0, y_0 e^{-bt})$ est la solution maximale du problème de Cauchy de donnée $(0, 0, y_0)$.

Enfin, si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors on vérifie directement que la solution maximale est la fonction constante $t \in \mathbb{R} \mapsto (0, 0)$.

3. Supposons $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ et raisonnons par l'absurde. Si $\big(x(t), y(t)\big)$ sort du quadrant $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, alors par continuité de (x, y) il existe $t_1 \in J$ tel que $x(t_1) = 0$ ou $y(t_1) = 0$. Si l'on a $\big(x(t_1), y(t_1)\big) = (0, y_1)$ avec $y_1 > 0$, alors on a trouvé deux solutions distinctes du problème de Cauchy de donnée $(t_1, 0, y_1)$, à savoir (x, y) et $t \mapsto (0, y_1 \mathrm{e}^{-b(t-t_1)})$, ce qui contredit l'unicité de la solution de ce problème de Cauchy. Si l'on a $\big(x(t_1), y(t_1)\big) = (0, 0)$, alors on a encore deux solutions distinctes du problème de Cauchy de donnée $(t_1, 0, 0)$, à savoir (x, y) et $t \mapsto (0, 0)$. Enfin, si l'on a $\big(x(t_1), y(t_1)\big) = (x_1, 0)$, alors on a deux solutions distinctes du problème de Cauchy de donnée $(t_1, x_1, 0)$, à savoir (x, y) et $t \mapsto (x_1 \mathrm{e}^{a(t-t_1)}, 0)$.

Ainsi, la solution maximale (x, y) prend ses valeurs dans le quadrant ouvert D (ce qui est d'ailleurs cohérent avec la situation biologique modélisée).

4. On va démontrer que la solution maximale $X : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ ne peut pas « exploser en temps fini ». D'après le théorème 1.2 (qui s'applique avec ici $I = \mathbb{R}$), cela prouvera qu'aucune des deux bornes de l'intervalle J de définition de X n'est finie.

Notons $J =]\alpha, \beta[$.

D'après la question précédente, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in J$.

On a $x'(t) = ax(t) - cx(t)y(t)$ pour tout $t \in J$. Comme $-cx(t)y(t) \leq 0$, car $c > 0$, on en déduit $x'(t) \leq ax(t)$. En notant t_0 un élément de J (par exemple $t_0 = 0$), on en déduit par intégration :

$$\forall t \in [t_0, \beta[\qquad x(t) \leq x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a x(s) \, \mathrm{d}s$$

On applique le lemme de Gronwall avec $u(t) = x(t) \geq 0$, $K = x(t_0) \geq 0$ et φ la fonction constante égale à $a > 0$. On obtient :

$$\forall t \in [t_0, \beta[\qquad 0 \leq x(t) \leq x(t_0) \, \exp\left(\int_{t_0}^{t} a \, \mathrm{d}s \right) = x(t_0) e^{a(t-t_0)}$$

De même, de $y'(t) = -by(t) + dx(t)y(t)$ pour tout $t \in J$, on déduit $y'(t) \leq dx(t)y(t)$ (car $-by(t) \leq 0$). Par intégration, on a donc pour tout $t \in J$:

$$\forall t \in [t_0, \beta[\qquad y(t) \leq y(t_0) + \int_{t_0}^{t} d \, x(s) y(s) \, \mathrm{d}s$$