

# *Toute la licence* **PROFESSORAT DES ÉCOLES**

**LE MANUEL POUR DEVENIR ENSEIGNANT !**

# Maths

**Christophe Billy**

Professeur de mathématiques, Inspé Toulouse Occitanie Pyrénées, IRES de Toulouse

**Cédric Fruchon**

Professeur de mathématiques, Inspé Toulouse Occitanie Pyrénées, IRES de Toulouse

**Isabelle Laurençot Sorgius**

Professeure de mathématiques, Inspé académie de Grenoble, IRES de Toulouse

**Madeleine Vultrín Pereira**

Professeure de mathématiques

**Marie-Hélène Lallement Dupouy**

Professeure de mathématiques

**Marc Cailhol**

Professeur de mathématiques, Inspé Toulouse Occitanie Pyrénées, IRES de Toulouse

**DUNOD**

## Remerciements

Les auteurs de l'équipe actuelle remercient Jean-François Bergeaut qui a initié ce projet d'écriture de livre et fortement contribué à la rédaction et aux riches discussions. Ils remercient ceux qui ont participé à la production des premiers ouvrages de préparation au CRPE de Mathématiques, Michèle Couderette, Pierre Danos, Romy Delbreil Deblaize, Nicolas Ros, Valentina Celi et Floriane Wozniak.

Les auteurs tiennent à remercier également Cathy Babel, Éliane Berthon, Monique Combeaud, Hervé Depecker, Marie-Paule Fournier, Valérie Frède, Danièle Gérard, Éric Laguerre, Georges Madar et Jean-Luc Mordwa pour leurs précieux conseils et leurs relectures de certains chapitres. Nous avons une pensée émue pour Éric Laguerre qui nous a quittés prématurément.

Les auteurs expriment une reconnaissance toute particulière à Jeanine Duverneuil et Rose Palanque ainsi qu'aux collègues formateurs de l'IUFM de Midi-Pyrénées, puis de l'ÉSPÉ Toulouse Midi-Pyrénées et de l'INSPÉ Toulouse Occitanie-Pyrénées, qui ont fourni l'ancrage fondamental de ce travail.

Les auteurs remercient enfin toutes les personnes de leur entourage qui les ont soutenus dans la réalisation de ce projet.

Les éditeurs ont entrepris les démarches usuelles afin de contacter les détenteurs des droits et obtenir les autorisations de reproduction des extraits de textes et des images sous droits d'auteur utilisés dans ce livre. Si, malgré nos efforts, un contenu a échappé à notre vigilance, nous invitons ces ayants droit à prendre contact avec nous.

Couverture : Studio graphique Dunod  
Concept de maquette intérieure : Domino

Mise en page : Lumina Datamatics

© Dunod, 2026

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-089845-9

# Table des matières

|                                                      |      |
|------------------------------------------------------|------|
| La licence et le CRPE                                | VIII |
| Conseils méthodologiques                             | X    |
| 1. Conseils pour une épreuve en mathématiques        | X    |
| 2. Répondre aux questions mathématiques de l'épreuve | XIII |

## Partie 1 Nombres et calculs

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Systèmes de numération</b>                            | <b>2</b>  |
|          | 1. Généralités                                           | 2         |
|          | 2. Désignation des nombres entiers naturels              | 3         |
|          | <b>Je fais le point</b>                                  | <b>14</b> |
| <b>2</b> | <b>Les ensembles de nombres</b>                          | <b>21</b> |
|          | 1. Ensembles de nombres et écritures des nombres         | 21        |
|          | 2. Ensemble $\mathbb{R}$ , intervalles                   | 23        |
|          | 3. Ensemble $\mathbb{Q}$                                 | 27        |
|          | 4. Ensemble $\mathbb{D}$                                 | 32        |
|          | 5. Valeur approchée, arrondi, troncature                 | 35        |
|          | 6. Écriture scientifique                                 | 39        |
|          | <b>Je fais le point</b>                                  | <b>41</b> |
|          | <b>Entraînement, approfondissement, vers le concours</b> | <b>47</b> |
| <b>3</b> | <b>Arithmétique</b>                                      | <b>59</b> |
|          | 1. Division euclidienne, division                        | 59        |
|          | 2. Multiples et diviseurs                                | 62        |
|          | 3. Nombres premiers                                      | 67        |
|          | 4. Recherche des diviseurs d'un nombre entier            | 68        |
|          | 5. Diviseurs communs, plus grand commun diviseur         | 71        |
|          | 6. Plus petit commun multiple                            | 73        |
|          | <b>Je fais le point</b>                                  | <b>74</b> |

|                                                                                   |                                                                                  |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
|  | <b>Entraînement, approfondissement, vers le concours</b>                         | <b>81</b>  |
|  | <b>4 Opérations, calculs avec des fractions, puissances, radicaux</b>            | <b>90</b>  |
|                                                                                   | 1. Propriétés des opérations                                                     | 90         |
|                                                                                   | 2. Calculs avec des fractions                                                    | 95         |
|                                                                                   | 3. Puissances                                                                    | 98         |
|                                                                                   | 4. Radicaux                                                                      | 101        |
|                                                                                   | <b>Je fais le point</b>                                                          | <b>104</b> |
|  | <b>5 Problèmes numériques (se modélisant éventuellement de façon algébrique)</b> | <b>113</b> |
|                                                                                   | 1. Modélisations                                                                 | 113        |
|                                                                                   | 2. Résoudre une équation                                                         | 116        |
|                                                                                   | 3. Résoudre un système d'équations                                               | 121        |
|                                                                                   | 4. Résoudre une inéquation                                                       | 126        |
|                                                                                   | <b>Je fais le point</b>                                                          | <b>132</b> |
|  | <b>Entraînement, approfondissement, vers le concours</b>                         | <b>142</b> |

## Partie 2 Géométrie

|                                                                                     |                                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
|   | <b>6 Angles, cercles et disques</b>                                               | <b>160</b> |
|                                                                                     | 1. Rappels sur les notations et codes en géométrie                                | 160        |
|                                                                                     | 2. Positions relatives de droites                                                 | 161        |
|                                                                                     | 3. Problèmes de constructions                                                     | 163        |
|                                                                                     | 4. Définitions et propriétés caractéristiques utilisant les distances             | 164        |
|                                                                                     | 5. Compléments sur les angles                                                     | 167        |
|                                                                                     | 6. Cercles et disques                                                             | 172        |
|                                                                                     | <b>Je fais le point</b>                                                           | <b>175</b> |
|  | <b>7 Polygones</b>                                                                | <b>181</b> |
|                                                                                     | 1. Polygones                                                                      | 181        |
|                                                                                     | 2. Triangles                                                                      | 183        |
|                                                                                     | 3. Quadrilatères particuliers                                                     | 190        |
|                                                                                     | <b>Je fais le point</b>                                                           | <b>194</b> |
|  | <b>8 Outils en géométrie : théorèmes de Pythagore et de Thalès, trigonométrie</b> | <b>201</b> |
|                                                                                     | 1. Introduction                                                                   | 201        |
|                                                                                     | 2. Théorème de Pythagore                                                          | 202        |

3. Théorème de Thalès 206

4. Trigonométrie 212

**Je fais le point 215**

## **9 Transformations du plan, triangles isométriques, triangles semblables 220**

1. Rappels théoriques sur les transformations 220

2. Symétrie axiale 221

3. Symétrie centrale 224

4. Translation 225

5. Rotation 229

6. Homothétie 232

7. Triangles isométriques, triangles semblables 234

**Je fais le point 239**

## **Entraînement, approfondissement, vers le concours 247**

## **10 Solides de l'espace 266**

1. Généralités 266

2. Classifications des solides 267

3. Représentations des solides 268

4. Descriptions de polyèdres 273

5. Cylindres et prismes 278

6. Cônes et pyramides 281

7. Boules et sphères 285

**Je fais le point 289**

## **Entraînement, approfondissement, vers le concours 301**

# **Partie 3 Grandeurs et mesures**

## **11 Grandeurs et mesures 318**

1. Introduction à la notion de grandeur 318

2. Plusieurs types de grandeurs 319

3. Comparer deux objets du point de vue d'une grandeur 320

4. Mesurer 321

**Je fais le point 324**

## **12 Grandeurs : exemples 332**

1. Longueurs 332

2. Aires 336

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| 3. Volumes, contenances                                  | 343        |
| 4. Durées et instants                                    | 346        |
| 5. Masses                                                | 351        |
| 6. Grandeurs-quotients                                   | 352        |
| 7. Agrandissement-réduction et grandeurs                 | 353        |
| <b>Je fais le point</b>                                  | <b>354</b> |
| <b>Entraînement, approfondissement, vers le concours</b> | <b>363</b> |

## Partie 4 Organisation et gestion de données et probabilités

|                                                                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>13 L'outil tableur</b>                                                                                         | <b>378</b> |
| 1. Qu'est-ce qu'un tableur ?                                                                                      | 378        |
| 2. Les formules                                                                                                   | 379        |
| 3. Copier une formule                                                                                             | 381        |
| 4. Divers types de graphiques                                                                                     | 383        |
| 5. Vers le CRPE                                                                                                   | 384        |
| <b>Je fais le point</b>                                                                                           | <b>388</b> |
| <b>14 Algorithmique et éléments de programmation</b>                                                              | <b>393</b> |
| 1. Introduction                                                                                                   | 393        |
| 2. Algorithmique et programmation                                                                                 | 394        |
| 3. Exemples                                                                                                       | 396        |
| 4. Types de questions en algorithmique et programmation                                                           | 402        |
| <b>Je fais le point</b>                                                                                           | <b>409</b> |
| <b>15 Fonctions, proportionnalité</b>                                                                             | <b>415</b> |
| 1. Fonctions                                                                                                      | 415        |
| 2. Proportionnalité                                                                                               | 420        |
| 3. Pourcentages                                                                                                   | 429        |
| <b>Je fais le point</b>                                                                                           | <b>439</b> |
| <b>Entraînement, approfondissement, vers le concours</b>                                                          | <b>450</b> |
| <b>16 Dénombrement</b>                                                                                            | <b>461</b> |
| 1. Résolution de problèmes d'énumération et de dénombrement sans explicitation du modèle mathématique sous-jacent | 461        |
| 2. Modèles mathématiques et techniques pour la résolution de problèmes d'énumération et de dénombrement           | 468        |

**Je fais le point****479****17 Statistiques****485**

- 1. Le vocabulaire de la statistique 485
- 2. Des indicateurs statistiques 486
- 3. Propriétés de la moyenne et techniques de calcul 493
- 4. Représentations graphiques 495
- 5. Cas des séries statistiques regroupées en classes 496

**Je fais le point****498****18 Probabilités****502**

- 1. Vocabulaire 502
- 2. Approche « classique » de la probabilité 503
- 3. Approche « fréquentiste » de la probabilité 506
- 4. Utilisation d'un arbre 507

**Je fais le point****510****Entraînement, approfondissement, vers le concours****515****Partie 5 Les problèmes****19 Les problèmes en mathématiques****530****Entraînement, approfondissement, vers le concours****531****Index****550****Ressources numériques. Comment y accéder ?**

Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté pour réussir, des compléments, approfondissements et sujets corrigés sont disponibles sur le site [www.dunod.com](http://www.dunod.com).

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil). Sur la page de l'ouvrage, cliquez sur le logo « Les + en ligne ».



# La licence et le CRPE

La licence Professorat des écoles<sup>1</sup> (LPE) est une formation pluridisciplinaire et professionnalisante, préparant au métier de professeur des écoles en articulation avec les masters Métiers de l'enseignement et de l'éducation (M2E).

À partir de la rentrée 2026, cette licence est proposée sur tout le territoire. Elle permet aux étudiants engagés dans cette formation de suivre un parcours exigeant, professionnalisant et portant sur l'ensemble des enseignements dispensés à l'école primaire.

Plus largement, **les concours du premier et du second degré, ainsi que celui de conseiller principal d'éducation (CPE), sont ouverts à partir de la troisième année de licence.**

Cette évolution vise trois objectifs :

1. Attirer davantage de candidats en instaurant après le concours **deux années de master enseignement et éducation (M2E) rémunérées** (environ 1 400 € nets/mois la première année et environ 1 800 € nets/mois au moins la seconde année).
2. **Préparer plus tôt** au métier de professeur.
3. **Élever le niveau de formation** des enseignants.

(Les concours bac + 5 continuent d'être organisés lors des sessions 2026 et 2027, afin de permettre aux étudiants actuellement en master de s'y présenter.)

Au terme de la licence, l'étudiant présente le concours de professeur des écoles.

Les épreuves du concours portent un éclairage sur les attendus de la licence PE : il s'agit de former de futurs enseignants non seulement généralistes (cf. socles disciplinaires travaillés en licence), mais également susceptibles d'appréhender les élèves dans toutes leurs diversités sociales, culturelles, linguistiques et psycho-affectives, et ce afin de les ouvrir et préparer au mieux aux grands enjeux du monde contemporain et à venir : lutte contre toutes les discriminations et stéréotypes, promotion de l'égalité notamment entre les filles et les garçons, sensibilisation à l'écologie et la citoyenneté.

La licence PE se poursuit par un master M2E<sup>2</sup> dont les objectifs sont essentiellement professionnalisants : il s'agit de permettre l'acquisition des compétences professionnelles du référentiel commun aux professeurs et personnels d'éducation et du référentiel propre aux enseignants<sup>3</sup>. Il consiste donc en des enseignements théoriques et pratiques

1. <https://www.devenirenseignant.gouv.fr/avant-le-concours-preparer-une-licence-pour-devenir-enseignant-1542>

2. <https://www.devenirenseignant.gouv.fr/reforme-du-recrutement-et-de-la-formation-initiale-des-professeurs-les-reponses-vos-questions-1523>

3. <https://www.education.gouv.fr/le-referentiel-de-competences-des-metiers-du-professorat-et-de-l-education-454473>



articulés avec des stages d'observation, de pratique accompagnée et éventuellement en responsabilité qui assurent une formation en alternance.

Les enseignements du master M2E professeur des écoles visent la formation d'enseignants polyvalents, car cette polyvalence des professeurs d'école doit favoriser la continuité et la cohésion du parcours des apprentissages de la maternelle à la fin de l'école élémentaire.

La formation s'articule autour de plusieurs grands axes :

- une formation professionnelle portant sur les aspects disciplinaires, didactiques et pédagogiques du métier, en lien avec les travaux de recherche ;
- la construction d'une culture commune permettant l'acquisition des compétences transversales des professeurs des écoles ;
- l'accompagnement au plus près des étudiants pendant les stages (d'abord en observation puis en responsabilité) qui ponctuent la formation sur les deux années du master et conduisent à l'acquisition des gestes professionnels.

Les enseignements dispensés visent l'autonomie progressive des étudiants afin de leur permettre d'adopter une *posture réflexive*, c'est-à-dire d'acquérir la capacité à évaluer des pratiques (dont la leur) et de se construire une première identité professionnelle.

En master, les étudiants pourront être en responsabilité de classe et poursuivre leur formation tout au long de leur carrière via leurs académies d'appartenance.

Les métiers de l'enseignement se construisent tout au long de la vie professionnelle de l'enseignant, mais il est fondamental que les aspirants soient solides dans leurs connaissances disciplinaires (objectif de la licence) et dans leurs connaissances des principes de leur profession (objectif du master). Ce parcours qui commence donc dès la licence 1 vise à accompagner au mieux les futurs enseignants.

# Conseils méthodologiques

## Cours et méthodes

- |                                               |      |
|-----------------------------------------------|------|
| 1. Conseils pour une épreuve en mathématiques | X    |
| 2. Répondre à des questions en mathématiques  | XIII |



Dans toute la suite nous nommerons épreuve en mathématiques un examen de licence ou l'écrit du concours CRPE et sujet le texte d'une telle épreuve. Nous nommerons candidat une personne passant un examen ou le concours du CRPE.

## 1 Conseils pour une épreuve en mathématiques

Les connaissances mathématiques à maîtriser pour le concours CRPE L3 sont globalement de niveau du collège. Les programmes de la licence Professeurs des écoles sont définis au niveau de chaque université, en s'appuyant sur le référentiel de compétences du professeur des écoles. Les contenus en licence seront davantage approfondis que ce qu'il est nécessaire de connaître pour le CRPE. Il s'agit de « Mathématiques pour l'enseignement ». Par exemple, en résolution de problèmes, des énoncés de problèmes que l'on peut proposer à l'école « pour apprendre à chercher » seront résolus avec des techniques dites « expertes ». Dans cet ouvrage, nous proposerons fréquemment les deux types de techniques, des techniques accessibles à l'école et d'autres nécessitant des connaissances ou raisonnements d'un niveau supérieur.

Il s'agit donc pour tout candidat de consolider, approfondir, prendre du recul, voire redécouvrir les notions et techniques relatives aux domaines mathématiques de l'école et du collège, auxquelles il faudra ajouter les savoirs relatifs aux bases et systèmes de numération, sans oublier l'apprentissage éventuel d'outils informatiques (tableur, logiciel de programmation comme Scratch, logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra, etc.).

Cette prise de recul sera profitable à la fois pour l'écrit du concours, pour l'oral (en particulier pour les questions de l'entretien avec le jury) et aussi pour le métier de professeur (analyse d'énoncés, de productions d'élèves, modification d'énoncés de problèmes, etc.).

Dans la résolution de certains exercices du CRPE, des connaissances de niveau supérieur à celles de l'école et du collège peuvent être utilisées, toutefois leur maîtrise n'est pas indispensable à la résolution de l'exercice.

Pour s'entraîner, on pourra consulter des annales des sujets CRPE licence mais aussi des annales du concours CRPE master, dont de nombreux énoncés correspondent à la définition du nouveau concours (il y avait en général un énoncé plus long avec plusieurs parties, ce qui n'est plus le cas dans le concours licence). On pourra aussi consulter les rapports de jury qui ne proposent pas de corrigé de l'épreuve mais donnent des conseils à la fois généraux et spécifiques pour chaque exercice.

Que ce soit pour les épreuves ou pour le métier de professeur des écoles, de bonnes compétences en calcul mental (que ce soit du calcul automatisé ou du calcul réfléchi avec un support écrit éventuel pour noter des étapes) sont à entretenir et développer, cela permet de perdre moins de temps dans les calculs, de vérifier des résultats obtenus par une calculatrice ou un tableur, mais aussi de percevoir rapidement des procédures de résolution efficaces pour de nombreux problèmes. Des exemples de procédures de calcul réfléchi seront donnés dans cet ouvrage dans de nombreux corrigés d'exercices.

Travailler un exercice, un problème, un sujet d'annales signifie chercher à le résoudre en y passant du temps, sans avoir recours dès la première difficulté à son corrigé. La lecture d'un corrigé peut s'avérer dans un premier temps rassurante, mais si le temps de recherche du problème et d'appropriation des contraintes de l'énoncé n'a pas été suffisant, les techniques et connaissances présentées dans le corrigé seront très vite oubliées et face à une situation identique le candidat sera à nouveau démuni.

## 1. Quelques conseils généraux pour préparer une épreuve

- S'exercer en **calcul mental** ; de nombreux sites de calcul mental ou destinés aux professeurs des écoles, de collège peuvent vous aider à reconstruire des automatismes oubliés ; il existe aussi de nombreux jeux du commerce
- S'entraîner à la manipulation de sa propre **calculatrice** (celle qui sera utilisée lors de l'épreuve). Une calculatrice de niveau collège est suffisante<sup>1</sup>. Avec cette calculatrice, il convient d'être capable de : savoir calculer une expression avec des puissances ; savoir calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne ; savoir simplifier une fraction ; savoir enchaîner plusieurs calculs en utilisant les touches mémoires ou les parenthèses... ; savoir afficher le nombre en écriture scientifique. Certaines calculatrices permettent aussi de calculer une moyenne, une médiane, etc.
- Pour le jour de l'épreuve, sélectionner le **matériel** nécessaire : crayons à papier, gomme, règle graduée, équerre ou instrument pour tracer des perpendiculaires, compas, rapporteur (par exemple pour tracer des angles dans un diagramme circulaire), ciseaux, etc.

1. Vérifier avant une épreuve le type de calculatrice autorisé.

## 2. Quelques conseils pour s'approprier un sujet

De manière à bien gérer votre temps pendant une épreuve il est conseillé de :

- percevoir la globalité du sujet ou d'un exercice avant de commencer à rédiger :
  - parcourir rapidement l'ensemble du sujet afin de repérer les exercices ou les questions qui paraissent facilement solubles car vous les avez déjà vus sous cette forme ou sous une autre et qui pourront alors être traités en premier ;
  - lire toutes les questions d'un même exercice avant de commencer à le résoudre, certaines réponses pouvant figurer dans les questions ultérieures.
- appliquer vos méthodes personnelles de lecture active comme par exemple :
- identifier les points importants du sujet (en les surlignant ou soulignant...) ;
- repérer les contraintes dans les questions de l'énoncé (unités, format de réponse...) en les surlignant par exemple. Il est à noter que la forme sous laquelle la réponse est attendue peut être formulée tout à la fin des questions posées.

Des conseils spécifiques à la résolution de problèmes sont proposés dans la partie « Problèmes ».

### a. Conseils d'ordre général à partir de ceux donnés par des rapports de jury

- Faire une lecture attentive des énoncés ;
- Proposer une argumentation concise ;
- Faire preuve d'esprit de synthèse ;
- Rechercher la clarté de l'expression écrite ;
- S'imposer une grande rigueur dans l'argumentation ;
- Rechercher la précision de l'expression ;
- Proposer des démonstrations suffisamment argumentées pour être convaincantes ;
- Faire preuve de bon sens ;
- Faire preuve de rigueur scientifique ;
- Ne pas recopier inutilement les consignes ;
- Éviter les contradictions flagrantes.

Le rapport de jury du concours Grenoble 2025 (CRPE master 2) indique : « *Les candidats doivent veiller à ne pas négliger les consignes : bien lire l'énoncé jusqu'au bout, répondre aux questions dans leur intégralité et structurer leurs réponses* ».

### b. Conseils relatifs aux différents domaines mathématiques, à partir de ceux donnés par des rapports de jury

- Avoir de bonnes connaissances en logique ;
- Bien utiliser divers raisonnements (contre-exemple, disjonction de cas, par l'absurde...) ;
- Maîtriser les fonctions de base du tableur ;
- Bien utiliser le raisonnement déductif ;
- Justifier tous les calculs ; être vigilant sur les priorités opératoires ;
- Vérifier les résultats obtenus ;

- Faire des schémas (dont les modèles en barre) ;
- Connaître les formules de volume ;
- Maîtriser les conversions d'unités ;
- Maîtriser les ordres de grandeur ;
- Garder les valeurs exactes dans les calculs, n'arrondir qu'en fin de procédure, distinguer valeur exacte et valeur approchée ;
- Étudier les fondamentaux de géométrie : reconnaître des figures, démontrer des propriétés (présence d'un angle droit, égalité de longueurs, d'angles, etc.), démontrer des relations entre objets géométriques (droites sécantes (cas particulier des droites perpendiculaires) ou parallèles, points alignés, points appartenant à un même cercle, etc.) en utilisant des outils variés.
- Savoir déterminer dans quel cas on additionne des probabilités, dans quel cas on les multiplie (des confusions signalées dans des rapports de jury)

## 2 Répondre aux questions mathématiques de l'épreuve

### 1. Généralités

#### a. Raisonnement

##### *Les erreurs à éviter*

En général dans une épreuve en mathématiques,

- constater n'est pas démontrer ;
- mesurer n'est pas démontrer ;
- expérimenter sur des exemples n'est pas démontrer (sauf à explorer tous les cas possibles – comme dans certains exercices d'arithmétique notamment – ou dans le cas du contre-exemple).

Le rapport de jury Grenoble 2025 (CRPE Master 2) mentionne : « *De nombreuses copies présentent des affirmations non justifiées, ou des raisonnements incomplets. Il est important de rappeler qu'un exemple n'est pas une démonstration. Les conditions d'application des théorèmes sont souvent ignorées ou mal précisées. Le manque de clarté dans les justifications nuit à la validité des réponses, même si le résultat final est correct.* »

##### *Les techniques à adopter*

- Utilisez un **contre-exemple** pour démontrer qu'une proposition universelle du type « pour tout  $b$  dans l'ensemble  $E$ , on a  $C$  » est fausse (on trouve un  $b$  dans  $E$  pour lequel  $C$  est fausse).

**Ex. :** Si l'on veut montrer que l'assertion : « Tout nombre premier est impair » est fausse, il suffit de trouver un nombre premier qui soit pair, le nombre 2 est premier et pair : on dit que le nombre 2 est un contre-exemple à l'assertion proposée. Si l'on veut montrer que l'assertion : « Tout losange a exactement deux axes de symétrie »

est fausse, il suffit d'indiquer qu'un carré est un losange particulier qui a quatre axes de symétrie : un carré est un contre-exemple à l'assertion proposée.

- Pour démontrer qu'une assertion est vraie : structurez avec des chaînons déductifs (en géométrie, arithmétique...) en utilisant à propos les connecteurs : « si », « alors », « donc », « or », « puisque », « car »...

**Ex. :** Je sais que...

Selon le théorème... : Si... alors...

Donc...

L'expression française « si P alors Q » (où P et Q sont des propositions) correspond d'un point de vue logique à « P implique Q ».

Pour montrer que « P implique Q », on peut partir de P et avec des implications successives arriver à Q. Si on ne voit pas les implications successives, on peut au brouillon essayer de travailler par « chaînage arrière », c'est-à-dire partir de la fin, à savoir la proposition Q et essayer de voir ce qui implique Q. Par exemple si on doit montrer que des nombres sont égaux, on peut se remémorer les techniques permettant de montrer que des nombres sont égaux (voir ci-après).

Dans certains cas, on pourra utiliser le raisonnement par équivalence, soit en deux phases « si P alors Q » et « si Q alors P », soit en utilisant des équivalents, par exemple dans la résolution d'équations, inéquations. Il est nécessaire cependant d'être très prudent dans l'utilisation des équivalents.

- Définissez de façon précise toutes les variables et inconnues nécessaires ; utiliser si besoin du calcul littéral (avec des lettres).

**Ex. :** On n'écrira pas : «  $c$  : chevaux » mais « On appelle  $c$  le nombre de chevaux ».

- Pour démontrer l'égalité  $A = B$ , plusieurs techniques sont possibles :
  - partir de  $A$  (respectivement de  $B$ ), transformer son écriture plusieurs fois jusqu'à obtenir  $B$  (respectivement  $A$ ) :  $A = \dots = \dots = B$ , (respectivement  $B = \dots = \dots = A$ ) ;
  - montrer que  $A$  et  $B$  sont égaux à un même nombre  $C$  :  $A = \dots = \dots = C$  et  $B = \dots = \dots = C$  ;
  - montrer que leur différence est nulle :  $A - B = 0$  ;
  - montrer que leur quotient est égal à 1 :  $A : B = 1$  (en sachant que  $B$  est non nul) ;
  - quand  $A$  et  $B$  sont des nombres de même signe, montrer qu'ils ont même carré :  $A^2 = B^2$ . L'égalité  $A^2 = B^2$  et  $A$  et  $B$  ont le même signe implique que  $A = B$ .
- On peut utiliser un **raisonnement par contraposée** pour montrer que « P implique Q ». Au lieu de montrer que « P implique Q », on montre que « non Q implique non P », où « non P » est la négation de P ; par exemple, si P est l'assertion « le triangle est rectangle », « non P » est l'assertion « le triangle n'est pas rectangle ».

## Exemple de raisonnement par contraposée

### Thème : grandeurs

*D'autres raisonnements sont possibles pour cet exercice, on présente ici uniquement celui utilisant un raisonnement par contraposée, à partir d'une production d'élève de collège, en explicitant la rédaction pour faire apparaître le raisonnement.*

#### Énoncé

« Sur la route des vacances, Audrey a roulé pendant 1 h 30 sur route nationale à une vitesse moyenne de 70 km/h. Le reste du trajet, effectué sur autoroute à vitesse supposée constante, lui a pris 45 min. À la fin du trajet, l'ordinateur de bord indique que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours était de 100 km/h. Audrey a-t-elle respecté la limite de vitesse sur autoroute, qui était de 130 km/h ? »

**Solution :** La distance parcourue sur la route nationale est égale à  $70 \text{ km/h} \times 1,5 \text{ h}$ , c'est-à-dire 105 km. La distance parcourue sur autoroute, si on roule à la vitesse maximum de 130 km/h pendant 45 min, c'est-à-dire  $\frac{3}{4} \text{ h}$  est égale à :  $130 \text{ km/h} \times \frac{3}{4} \text{ h} = 97,5 \text{ km}$ .

Si Audrey roule à une vitesse inférieure ou égale à 130 km/h, alors la distance totale parcourue sera inférieure ou égale à la somme de la distance parcourue sur route nationale et sur autoroute lorsqu'on roule à 130 km/h, c'est-à-dire inférieure ou égale à 202,5 km ( $105 \text{ km} + 97,5 \text{ km} = 202,5 \text{ km}$ ). La vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours sera alors inférieure ou égale à  $\frac{202,5 \text{ km}}{2,25 \text{ h}}$ , qui est égal à 90 km/h. Or la vitesse moyenne

d'Audrey est égale à 100 km/h. La réponse à la question est donc le non-respect de la vitesse sur autoroute. Analysons le raisonnement mis en œuvre :

on a montré que : Si Audrey roule sur autoroute à une vitesse inférieure ou égale à 130 km/h (nommons « P » la proposition « Audrey roule sur autoroute à une vitesse inférieure ou égale à 130 km/h »), alors la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours sera inférieure ou égale à 90 km/h (nommons « Q » la proposition « la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours sera inférieure à 90 km/h »). On en déduit en utilisant la contraposée de « P implique Q » que : Si « non Q », c'est-à-dire « la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est strictement supérieure à 90 km/h », alors « non P », c'est-à-dire « Audrey roule sur l'autoroute à une vitesse strictement supérieure à 130 km/h ».

Remarque : on peut aussi employer la notation  $\text{km.h}^{-1}$  pour km/h.

- Dans certains cas (assez rares), vous pouvez utiliser le **raisonnement par l'absurde** : on suppose la négation de ce que l'on veut démontrer et en utilisant des chaînons déductifs, on aboutit à une « absurdité ». Plus précisément, pour montrer que la proposition P est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à supposer que c'est sa « négation » qui est vraie, négation notée « non P ». On montre ensuite que la proposition « non P » implique une autre proposition R.

On fait apparaître que l'on ne peut pas avoir « non P » et R vraies simultanément (d'où le mot « absurde ») ; on conclut que « non P » est fausse et donc que P est vraie.

## Exemples de raisonnement par l'absurde

**Dans le domaine numérique montrer que le nombre  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.**

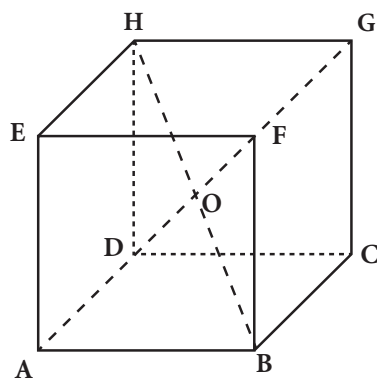
On suppose que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel, on peut l'écrire avec la fraction irréductible  $\frac{p}{q}$ , c'est-à-dire avec  $p$  et  $q$  sans diviseur commun autre que le nombre 1. En l'élevant au carré, on a  $\frac{p^2}{q^2} = 2$ , d'où  $p^2 = 2 \times q^2$  ; on en déduit que  $p^2$  est pair, d'où  $p$  est pair et s'écrit  $2k$ , avec  $k$  entier ; en remplaçant dans l'égalité  $p^2 = 2q^2$ , on a :  $4 \times k^2 = 2 \times q^2$  ; on en déduit en divisant par 2 :  $2 \times k^2 = q^2$ , ce qui signifie que  $q^2$  est pair, d'où  $q$  est pair ;  $p$  et  $q$  ont donc 2 comme diviseur commun, ce qui est en contradiction avec «  $p$  et  $q$  sans diviseur commun autre que le nombre 1 ». La proposition «  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel » est donc fausse.

## Dans le domaine géométrique

### Énoncé

« On considère un cube ABCDEFGH, la face du “bas” est ABCD et EFGH a la même disposition que ABCD. Montrer que le centre O du cube n'appartient pas au plan (ACH) nommé P ((AC) est une diagonale de la face du bas et H le sommet “au-dessus” de D). »

Solution : on suppose que le point O appartient au plan P, alors la droite (HO) est incluse dans le plan P puisque le point H appartient au plan P ; la droite (HO) contient le point B, donc le point B appartient au plan P, ce plan (ACH) est donc le même que le plan (ABC) (ce sont bien des plans car A, B, C ne sont pas alignés, respectivement A, C, H), c'est-à-dire que la face du bas contient le point H qui est un sommet de la face du haut. Or on sait que le point H n'appartient pas à ce plan, par conséquent l'hypothèse de départ est fausse. Ce raisonnement par l'absurde prouve que le point O n'appartient pas au plan (ACH).



## b. Pendant la recherche

- Dans tout exercice, il y a toujours des questions plus simples que d'autres et ce ne sont pas nécessairement les premières : il vous faut les repérer car elles constituent des points facilement accessibles ; ne limitez cependant pas votre travail à résoudre ce type de questions.
- En l'absence de piste ou de technique disponible d'emblée, revenez aux définitions des notions mathématiques présentes dans l'énoncé et au sens lié au contexte de la situation.



- Plusieurs méthodes sont parfois possibles, si vous en voyez plusieurs, optez pour celle qui vous semble la plus convaincante ou que vous arrivez facilement à rédiger et servez-vous de l'autre méthode comme moyen de vérification.

**Ex. :** Pour montrer que des droites sont perpendiculaires, on peut montrer qu'elles sont chacune parallèles à des droites perpendiculaires, ou utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

### c. Pour la rédaction

Il est mentionné dans le sujet zéro du concours CRPE L3 paru en 2025 sur le site [devenirenseignant.gouv.fr](http://devenirenseignant.gouv.fr) : « *Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.* » L'épreuve du concours CRPE 2026 groupement 1 indique : « *[L'épreuve] sollicite les capacités de raisonnement et d'expression écrite du candidat.* » Le rapport de jury Grenoble 2025 (CRPE Master 2) indique : « *La maîtrise de l'orthographe, de la syntaxe et du vocabulaire spécifique (mathématique et géométrie) est un atout.* »

- La résolution d'un exercice ne se fait pas complètement au brouillon (pour des questions de durée de l'épreuve) et vous allez devoir mener en parallèle la recherche sur le brouillon et la rédaction de votre réponse sur votre copie.
- Pour faciliter la lecture et la recherche d'information dans votre copie, il est important d'aérer votre copie et de structurer vos écrits en utilisant des paragraphes distincts :
  - n'hésitez pas à utiliser plusieurs feuilles (les figures sur des feuilles séparées) ;
  - lorsque vous n'arrivez pas à répondre à une question, laissez un espace suffisamment important ; vous pourrez y revenir éventuellement par la suite ; il est important de bien indiquer le numéro des questions traitées afin que le correcteur se repère sans peine ;
  - mettez en valeur vos conclusions (soulignées ou encadrées).
- Faites attention à la présentation, à l'orthographe, à la rédaction.
- Donnez le (ou un) bon argument et uniquement celui-ci. Ce n'est pas au lecteur/correcteur de trier parmi une liste d'arguments celui qui convient le mieux à l'explication. On lit dans le rapport de jury Toulouse 2019 (CRPE master 2) : « *[Le jury] recommande d'éviter les explications trop longues* ».
- Attention aux erreurs de rédaction mathématique : soyez rigoureux dans l'utilisation des symboles  $=$  ou  $\approx$ , (AB), [AB] ou AB. Le rapport de jury Grenoble 2025 (CRPE Master 2) indique : « *L'utilisation appropriée des symboles mathématiques (égalité, approximation, unités) est valorisée. [...] La rédaction mathématique reste souvent approximative : confusion entre « = » et «  $\approx$  », absence d'unités, emploi maladroit du vocabulaire spécifique.* »
- Le rapport de jury Toulouse 2025 (CRPE Master 2) signale comme erreur de notation : « *confusion entre longueur et segment (notation incorrecte comme  $[AS] = 4\text{ cm}$  au lieu de  $AS = 4\text{ cm}$ ).* »
- N'utilisez pas les symboles mathématiques (par exemple  $\perp$  ou  $//$  etc.) comme abréviations dans un texte en langage courant.

## d. Après la rédaction

Après avoir résolu une question, avant de passer à la question suivante, il est important de relire la question et de vérifier que la réponse proposée correspond bien aux attentes sur la forme (valeur exacte ou arrondie ou écriture scientifique...), qu'elle est complète et surtout que vous avez bien répondu à la question telle qu'elle est posée. Le rapport de jury Grenoble 2025 (CRPE Master 2) indique : « Une rédaction claire, précise, structurée, incluant des phrases-réponses, témoigne d'un effort de communication mathématique. [...] Certaines copies manquent de concision ou à l'inverse se contentent de réponses sans explicitation. »

## 2. Vrai-faux

Certains sujets de concours peuvent comporter un exercice de ce type qui nécessite de disposer de méthodes de résolution mettant en œuvre un raisonnement mathématique dont l'élaboration est à la charge du candidat (pas de questions intermédiaires).

C'est en testant sur quelques exemples que l'on peut conjecturer<sup>1</sup> la valeur de vérité d'une proposition universelle du type « tout nombre... » ou « pour tout quadrilatère... ».

Pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de produire un contre-exemple, c'est-à-dire d'exhiber un cas pour lequel cette proposition est fausse.

En revanche pour montrer qu'elle est vraie, il faut travailler dans le cas général ; utiliser une lettre représentant un nombre quelconque facilite souvent la démonstration. Pour montrer qu'une proposition existentielle « il existe  $b$  appartenant à  $B$  tel que  $P(b)$  » est vraie il suffit d'exhiber un exemple. Pour montrer qu'elle est fausse il faut montrer le cas général : « pour tout  $b$  appartenant à  $B$ ,  $P(b)$  est fausse ».

Attention à la formulation des affirmations : bien distinguer les formulations « pour tout », « il existe ». Fréquemment la formulation comporte de façon implicite le quantificateur « pour tout ».

**Ex. :** « Les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires », à reformuler de façon explicite « Pour tout rectangle, les diagonales sont perpendiculaires » est une affirmation fausse tandis que « Il existe des rectangles dont les diagonales sont perpendiculaires » est une affirmation vraie (ce sont les carrés).

Attention aux négations éventuelles qui peuvent inverser vrai et faux.

Dans tous les cas, n'oubliez pas d'écrire explicitement sur la copie si l'affirmation est vraie ou fausse.

## 3. Questions à choix multiples

Il s'agit de faire la différence dans les QCM entre les énoncés vrais, et les énoncés qui sont faux ou vrais dans un domaine plus restreint que celui de l'énoncé (gare aux cas particuliers pour lesquels l'énoncé est faux).

---

1. Une conjecture est une proposition anticipée qui attend sa vérification, soit d'un raisonnement (souvent en mathématiques), soit de l'expérience (souvent en sciences expérimentales).

**Ex. :** « Tout nombre premier est impair. » est une affirmation fausse même si tous les nombres premiers sauf « 2 » sont impairs.

Les QCM exigent une lecture très attentive des énoncés.

- Vous pouvez procéder par élimination en écartant les propositions qui sont clairement fausses.
- Attention, selon la formulation de l'énoncé, votre choix doit porter sur la réponse juste ou sur la réponse fausse.
- Relisez complètement la question pour chacun des choix de réponse proposée.
- Comme dans les Vrai/Faux, soyez attentifs aux négations ; si des expressions comme « aucun », « ne... pas », « jamais », « non » etc. sont présentes dans l'énoncé, cela en inverse le sens (on peut aussi parfois rencontrer des doubles-négations).
- Soyez attentif aux mots tels que « tous », « chacun », « chaque », « aucun », « toujours », « seulement », « parfois », « rarement », « jamais » etc. qui restreignent, généralisent ou inversent le sens de l'énoncé et donc changent les réponses attendues.

**Ex. :** « Tous les nombres pairs non nuls ne sont pas premiers » est une proposition fausse.

« Chaque nombre pair non nul n'est pas premier » est fausse.

« Aucun nombre pair non nul n'est un nombre premier » est fausse.

« Il existe des nombres pairs non nuls qui sont des nombres premiers » est vraie.

« Les losanges ont toujours leurs diagonales de même longueur » est fausse.

« Les losanges n'ont jamais leurs diagonales de même longueur » est fausse.

« Les losanges ont parfois leurs diagonales de même longueur » est vraie.

- Attention aux conjonctions de coordination « et », « ou », « ni ». Quand l'énoncé contient « et », si une partie de l'énoncé est faux, tout l'énoncé est faux même si les autres parties sont vraies.

**Ex. :** « 80 est multiple de 10 et de 4 et de 6 » est fausse car 80 n'est pas multiple de 6.

« 80 est multiple de 4 ou de 6 » est vraie car l'une des deux affirmations est vraie.

*Remarque 1 :* le « ou » du langage courant est souvent exclusif, par exemple au restaurant c'est fromage ou dessert mais pas les deux ! Le « ou » mathématique est inclusif, par exemple « un carré est un losange ou un rectangle » est une affirmation vraie.

*Remarque 2 :* l'affirmation, « 8 est un nombre inférieur ou égal à 10 » est vraie même si 8 n'est jamais égal à 10 !

## 4. Selon les thèmes

### a. Pour la numération

Les rapports de jury mentionnent l'importance de compétences en numération.

- Passez par la décomposition canonique des nombres lorsque les contraintes portent sur des chiffres, c'est-à-dire écrivez le nombre donné sous forme d'une somme de puissances de la base :

**Ex. :** Le nombre  $\overline{cdu}$  en base dix se décompose en  $10^2c + 10d + u$ , soit  $100c + 10d + u$ .

- Pour certains exercices, en organisant bien son travail, il est parfois possible de passer en revue tous les cas à traiter (raisonnement par disjonction de cas) ou d'arriver à réduire le nombre de cas à examiner.

**Ex. :** Pour dénombrer l'ensemble des nombres à au plus trois chiffres que l'on peut réaliser avec les chiffres 1, 2 et 3, en utilisant une fois au plus chacun de ces chiffres, il est possible de rechercher les nombres à un chiffre puis les nombres à deux chiffres puis les nombres à trois chiffres possibles.

- Certaines descriptions en langage courant appellent des traductions littérales.

**Ex. :** « Trois entiers consécutifs » se traduit formellement par :  $n - 1, n, n + 1$  ou bien  $n, n + 1, n + 2$  (où  $n$  est un entier)... il n'est cependant pas toujours évident de choisir laquelle des écritures est la plus adaptée au problème.

Un entier pair s'écrit  $2p$  (où  $p$  est un entier naturel) ; un entier impair s'écrit  $2p + 1$  (où  $p$  est un entier naturel) ;

Un nombre dont le reste dans la division par 7 est 2 s'écrit  $7n + 2$  (où  $n$  est un entier naturel) ;

La différence des carrés de deux entiers pairs consécutifs s'écrit  $(2p)^2 - (2p - 2)^2$  ou  $(2p + 2)^2 - (2p)^2$  (où  $p$  est un entier naturel).

### b. Pour les calculs

- Aérez les calculs.
- Alignez les signes opératoires, les barres de fractions principales et les signes de comparaison ( $<, \leq, =, \geq, >, \approx$ ).

**Ex. :** Un alignement mal placé peut être source d'erreur :

$$\frac{10}{\frac{5}{2}} \neq \frac{10}{\frac{5}{2}}, \text{ soit } 1 \neq 4$$

- Ne coupez pas, si possible, une expression sur deux lignes. Si besoin, nommez l'expression par une lettre et alignez les signes d'égalité.

**Ex. :**  $A = \dots$   
 $= \dots$

- N'oubliez pas que, sans autre mention, c'est toujours la valeur exacte qui est attendue. Une valeur approchée peut aider à se représenter le nombre trouvé mais elle ne peut pas remplacer la valeur exacte ; en particulier, pour les calculs intermédiaires, on reprendra les valeurs exactes trouvées dans les calculs précédents et non les valeurs approchées ; en effet les écarts à la valeur exacte peuvent se « cumuler » (ou « se compenser ») au fur et à mesure des calculs successifs. Attention, en général, la calculatrice ne fournit que des valeurs approchées des résultats.
- Pensez à l'homogénéité d'une expression.

**Ex. :** Si  $f$  désigne une fonction, l'écriture : «  $f = 2x + 3$  » ne peut être correcte : pas de  $x$  dans le membre de gauche qui désigne une fonction, alors que le membre de droite représente un nombre. L'expression correcte est :  $f(x) = 2x + 3$ .

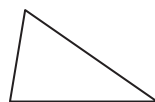
### c. Pour la gestion des données

- S'il est demandé de construire la représentation graphique d'une fonction affine dans le plan muni d'un repère, précisez d'abord qu'il s'agit d'une droite et indiquez aussi les coordonnées des points que vous choisissez pour effectuer ce tracé (deux points suffisent !).
- Indiquez clairement les unités, les échelles et les légendes dans un graphique.
- Marquez en couleur les points importants des graphiques, par exemple les points lus pour répondre à une question. Attention : utilisez des couleurs de base comme vert, rouge ou bleu, en excluant des couleurs pouvant être reconnues comme marque distinctive.
- N'hésitez pas à tracer des droites en pointillé pour permettre la lecture des coordonnées de points.
- Si vous utilisez un tableau de proportionnalité comme représentation d'une situation de proportionnalité, mentionnez par des phrases la technique utilisée, ne vous contentez pas de mettre des flèches sur le tableau.
- Justifiez les calculs ; lors de l'utilisation de formules, commencez par donner la formule avant de remplacer par des valeurs numériques, mettre certaines des étapes de calcul, ce qui vous permet de vérifier.

### d. Pour la géométrie plane

- Faites les figures complexes – qu'elles soient demandées ou non – sur une feuille séparée de manière à avoir toujours la figure en vue lors de la rédaction. Dans ce cas, il vaut mieux indiquer au correcteur que cette figure existe (en indiquant « voir figure sur la feuille n° »).
- Pour des questions de géométrie du type « cette figure admet deux axes de symétrie », vous pouvez refaire la figure et faire des essais éventuellement à main levée au brouillon.
- Commencez toujours par traduire l'énoncé grâce à une figure réalisée à main levée (pas trop petite !) sur le brouillon ; veillez à ne pas faire une figure ayant des propriétés particulières.

**Ex. :** Lorsque l'énoncé mentionne un triangle quelconque, tracez un triangle comme ci-contre qui ne soit pas « presque » isocèle ou « presque » rectangle. Sinon, la figure risquerait d'induire un raisonnement erroné.



- Pour les constructions détaillées dans l'énoncé, faites les figures avec les instruments de géométrie, en les codant (on peut utilement coder le parallélisme avec des couleurs de base) ; mentionnez les points par des croix (intersections de lignes) ; vous pouvez aussi nommer les différents éléments : points, droite, cercle.
- En géométrie une figure doit être un support aidant : lorsqu'elle devient trop complexe, il est important de focaliser sur la partie relative à la question traitée (on peut pour cela repasser les éléments importants en couleur ou même extraire au brouillon ou sur la copie une figure plus simple).

- Pour rechercher les étapes d'une construction, analysez la figure finie (faites-la éventuellement « à l'envers ») et recherchez en son sein des configurations connues, des propriétés et enfin les étapes de la construction. Si vous ne trouvez pas de configuration à l'intérieur de la figure, n'hésitez pas à compléter la figure pour les faire apparaître (en rajoutant des segments, des diagonales, des milieux...).
- Pour les programmes de construction : utilisez un paragraphe numéroté pour chaque étape de la construction en utilisant le langage de la géométrie.

**Ex. :** À la place de « tracer le cercle en pointant le compas en A », écrire « tracer le cercle de centre A » ...

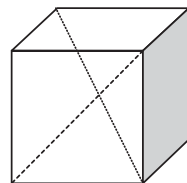
- Si l'on demande de conjecturer une propriété à partir de la figure, construisez la figure de façon précise avec les instruments et n'hésitez pas à refaire une deuxième figure pour tester si la conjecture dépend de la figure tracée initialement.
- Vérifiez systématiquement (et explicitement sur la copie) les conditions d'application des théorèmes utilisés.
  - Triangle **rectangle** pour le théorème de **Pythagore** ;
  - Triangle **rectangle** pour les lignes **trigonométriques** ;
  - Alignements et **parallélisme** pour le théorème de **Thalès**.

Le rapport Grenoble 2025 (CRPE M2) indique : « *La justification explicite des théorèmes utilisés (Pythagore, Thalès et leurs réciproques) est essentielle* ».

## e. Pour la géométrie dans l'espace

- Ne pas hésiter à découper et plier pour fabriquer grossièrement le solide.
- Si besoin, tracer au brouillon plusieurs vues du solide.
- Ne pas se laisser influencer par les relations entre les représentations des objets vus sur une perspective cavalière.

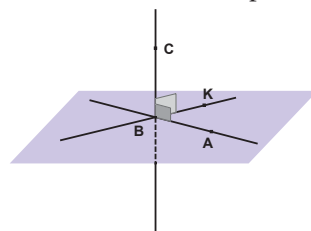
**Ex. :** Deux droites apparemment sécantes sur une perspective ne le sont pas forcément dans la réalité comme par exemple la diagonale du cube et la diagonale de sa face avant sur la représentation ci-contre.



Remarque : à l'instar de la représentation ci-dessus, une représentation en perspective cavalière ne comporte pas nécessairement les arêtes cachées.

- Ne pas oublier que certaines questions d'un exercice relatif à la géométrie dans l'espace se ramènent à des questions de géométrie plane, mais il faut absolument mentionner le plan dans lequel on se place et vérifier que les objets étudiés appartiennent tous à ce plan.
- Faites attention aux nombreux théorèmes vrais en géométrie plane mais pas en géométrie dans l'espace. Par exemple dans le plan, si deux droites sont perpendiculaires à un même troisième, elles sont parallèles entre elles. C'est faux dans l'espace.

**Ex. :** Sur la figure ci-contre (BK) et (BA) sont perpendiculaires à (CB) mais, elles ne sont pas parallèles entre elles puisqu'elles ont un point commun B.



## f. Pour les grandeurs

- Ne pas confondre grandeur et mesure.

**Ex. :** 2 m est la longueur d'une baguette, 2 est la mesure de la longueur de cette même baguette si l'on choisit le mètre comme unité de longueur.

- Pour le calcul d'une aire ou d'un volume, préciser d'abord la formule utilisée, la contextualiser ensuite avec les données de l'énoncé, puis enfin passer à l'application numérique.
- Pour le calcul d'une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final, le recours à un axe gradué (nommé axe chronologiquement orienté dans les programmes 2025) pour représenter ces instants peut être un outil pertinent pour ce calcul d'écart.
- Pour les durées, interpréter correctement la partie décimale de leurs mesures. Une bonne connaissance des changements d'unité de durée est attendue. Une confusion du type « 4 minutes 16 secondes = 4,16 minutes » est à éviter.

**Ex. :** 2,4 h représente 2 h + 0,4 h, soit 2 h +  $0,4 \times (60 \text{ min})$ , soit 2 h + 24 min que l'on écrit 2 h 24 min.

- Les unités doivent être mentionnées en accord avec les exigences de l'énoncé.
- Dans une égalité, les unités doivent se retrouver des deux côtés du signe d'égalité (homogénéité).

**Ex. :** On peut écrire  $2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$  mais pas  $2 + 3 = 5 \text{ cm}$ .

- Pour les calculs complexes, on peut faire les calculs numériques sans unité puis rédiger une phrase de conclusion en utilisant l'unité adaptée.

**Ex. :** L'aire est égale à  $125 \text{ cm}^2$  ; le volume est égal à  $18 \text{ mm}^3$ .

## 5. Des confusions et des erreurs classiques à éviter

### a. Confusions

- Ne pas confondre multiple et diviseur ;

**Ex. :** 0 est un multiple de 3 mais 0 n'est pas un diviseur de 3.

$0 = 0 \times 3$  et 0 ne divise aucun nombre non nul.

Les deux formulations suivantes sont correctes : « 0 est un multiple de 3 » et « 3 est un diviseur de 0 ».

- Ne pas confondre nombres premiers et nombres premiers entre eux ;

**Ex. :** 21 et 8 ne sont pas des nombres premiers mais 21 et 8 sont premiers entre eux. En effet 21 admet d'autres diviseurs que 1 et lui-même, par exemple 3 ; de la même manière 8 admet d'autres diviseurs que 1 et lui-même par exemple 2 ; en revanche 21 et 8 n'admettent qu'un seul diviseur commun, il s'agit de 1.

- Ne pas confondre nombre et écriture du nombre, ne pas confondre écriture décimale et partie décimale d'un nombre ;

**Ex. :**  $\frac{4}{3}$  est un nombre admettant plusieurs écritures fractionnaires :

$$\frac{4}{3} \quad \frac{8}{6} \quad \frac{40}{30}.$$

- Ne pas confondre arrondi, troncature et ordre de grandeur ;
- Ne pas utiliser dans la preuve la conclusion à démontrer ou des propriétés non encore démontrées.

**Ex. :** Évocation de l'hypoténuse d'un triangle avant de démontrer que celui-ci est rectangle ou écriture de l'égalité relative aux carrés des longueurs avant de savoir si l'égalité est vraie ou fausse (une erreur que l'on trouve dans l'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore - idem pour la réciproque du théorème de Thalès).

### b. Conseils

- Vérifier la présence d'unités pour votre réponse ;
- Utiliser les unités dans les calculs pour détecter les erreurs, ou pour déterminer l'unité de la réponse ;

**Ex. :** Lors du calcul de l'aire d'un disque de rayon 5 cm, si vous confondez les formules d'aire et périmètre, en écrivant les unités dans les calculs vous pouvez détecter votre erreur de confusion de formule : si vous écrivez  $\mathcal{A} = 2\pi R = 2\pi \times 5 \text{ cm}$  vous pouvez vous rendre compte que le résultat est une longueur et non une aire.

- Vérifier la conformité du format de réponse demandé (fraction non irréductible, valeur exacte ou valeur approchée...) ;
- Être rigoureux dans l'utilisation du vocabulaire ou des conventions ;

**Ex. :** Ne pas utiliser le vocabulaire « nombre à virgule » à la place de « nombre décimal ».  $AB \parallel CD$ , milieu d'une droite, d'un axe, milieu ou diagonale d'un cercle... au lieu de, respectivement,  $(AB) \parallel (CD)$ , milieu d'un segment, centre et diamètre d'un cercle qui sont les formulations correctes ;

- Ne pas utiliser un théorème sans le citer.

### Sujets corrigés

Nous proposons des sujets d'annales récents corrigés sur notre site [dunod.com](http://dunod.com)

Vous pourrez les consulter et vous entraîner en vous rendant sur la page de l'ouvrage.





# Nombres et calculs

## Cours et méthodes

|                                             |   |
|---------------------------------------------|---|
| 1. Généralités                              | 2 |
| 2. Désignation des nombres entiers naturels | 3 |

Pour pouvoir enseigner le nombre à l'école primaire, il est nécessaire de comprendre qu'il se construit « dans une dialectique outil/objet », concept de didactique introduit par Régine Douady. Ainsi, le nombre permettant de mémoriser, comparer, anticiper (l'anticipation amenant éventuellement à calculer) peut être considéré comme outil pour résoudre des problèmes alors que le nombre étudié pour lui-même (dans ses différentes désignations, décompositions, propriétés...) devient nombre objet de l'étude. Il s'agit alors de comprendre comment il a été construit et notamment quels sont les éléments et les procédés de codage (groupements d'unités et échanges, les chiffres et leur signification dans le nombre suivant leur position). D'un point de vue didactique, pour comprendre les difficultés des élèves avec l'écriture et la lecture des nombres, avec les algorithmes de calcul posé, il faut s'être soi-même confronté à ces difficultés dans des bases autres que la base dix.

*Dans cet ouvrage, pour les multiplications, on utilisera le symbole  $\times$  ou parfois un point entre les nombres dont on effectue le produit.*

## 1 Généralités

Pour désigner oralement ou par écrit les nombres (entiers naturels dans un premier temps), il a été nécessaire de trouver des systèmes de désignation.

Pour l'écriture verbale des nombres nous respecterons l'écriture telle qu'elle est indiquée dans les *Rectifications de l'orthographe proposée par le conseil supérieur de la langue française*<sup>1</sup> (1990).

### Exemples

Exemple : le nombre 524 est désigné par son écriture chiffrée composée des signes 5 puis 2 puis 4. Des représentations verbales de ce nombre sont aussi :

- cinq centaines, deux dizaines et quatre unités ;
- cinq-cent-vingt-quatre (désignation verbale écrite) ;
- cinq-cent-vingt-quatrième (désignation donnant une fonction dite ordinale) ;
- cinquante-deux dizaines et quatre unités (décomposition en dizaines et unités).

1. site de l'Académie française.

Un système de désignation doit être efficace, c'est-à-dire permettre de désigner de manière univoque le plus possible de nombres, voire tous les nombres, avec un minimum de signes à mémoriser.

### DÉFINITION

Un **système de numération** est un système de représentation des nombres comportant :

- un lexique composé de signes (oraux, écrits, gestuels, matériels...) ;
- une syntaxe, ensemble de règles de combinaison des signes.

Un certain nombre de civilisations ont conçu des systèmes utilisant des groupements, réguliers ou non.

### DÉFINITION

Lorsque les groupements sont réguliers, la valeur du groupement est appelée **base**.

### Exemples

- Notre numération écrite est une numération en base dix.
- Les Mayas avaient une numération où les groupements étaient irréguliers avec des groupements par vingt sauf le deuxième groupement de valeur dix-huit.
- On retrouve de même des irrégularités dans notre système de mesure des durées : on groupe 60 secondes en une minute, 60 minutes en une heure puis 24 heures en un jour.

## 2 Désignation des nombres entiers naturels

### DÉFINITION

Un **chiffre** est un signe servant à écrire les nombres dans un système de numération donné. Il peut être écrit avec des symboles (différents suivant les numérations, par exemple le caractère d'écriture 5 en numération écrite de position en base 10 ou V en numération romaine) ou des lettres (par exemple « cinq »).

### Exemple

- « Dans mon panier, il y a 9 pommes et 15 châtaignes. »

Le nombre de pommes est le nombre 9 qui s'écrit avec un seul chiffre (le chiffre « 9 ») et le nombre de châtaignes est le nombre 15 qui s'écrit avec deux chiffres (les chiffres « 1 » et « 5 »).

- « Le <sup>xxi</sup>e siècle a commencé le 1<sup>er</sup> janvier 2001 et se terminera le 31 décembre 2100. » Dans cette phrase, le siècle est désigné dans la numération romaine avec les chiffres « X » et « I ».



**Les chiffres sont aux nombres ce que les lettres sont aux mots.**

Ainsi, de même qu'il y a des mots qui s'écrivent avec une seule lettre (comme c'est le cas dans cette phrase), il y a des nombres qui s'écrivent avec un seul chiffre.

## 1. Décomposition canonique

On utilise dans la suite de ce chapitre la notation  $b^n$  pour  $b$  à la puissance  $n$ , c'est-à-dire que l'on effectue un produit de  $n$  facteurs égaux à  $b$ . On pourra lire au préalable le paragraphe 3 du chapitre « Opérations, calculs avec des fractions, puissances, radicaux ».

Dans le cas de groupements réguliers, tout entier naturel  $N$  peut se décomposer de manière unique, à l'ordre près, en somme de puissances du naturel  $b$  ( $b > 1$ , base),

$N = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \dots + c_n b^n$  avec  $c_0, \dots, c_n$  entiers positifs tous strictement inférieurs à  $b$ .

Ici,  $c_0, \dots, c_n$  sont appelés coefficients ; dans le cas d'une écriture de position ils serviront de signes et seront nommés « chiffres ». Cette décomposition sera nommée décomposition canonique.

### Exemple

En base dix,  $1789 = 9 + 8 \times 10 + 7 \times 10^2 + 10^3 = 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 9$ . 1789 se décompose de manière unique, à l'ordre près, comme somme de multiples de puissances de dix (que l'on peut écrire sous forme de puissances ou sous la forme 1 000, 100, 10, etc., forme que l'on retiendra à l'école primaire).

1789 admet d'autres décompositions, comme par exemple :

$1789 = 1000 + 789 = 17 \times 100 + 89 = 178 \times 10 + 9$  ; ces trois décompositions ne sont pas la décomposition canonique car certains coefficients des puissances de 10 sont supérieurs à 10. Le nombre de milliers contenus dans 1789 est 1, le nombre de centaines est 17, le nombre de dizaines est 178, le nombre d'unités est 1789.



Suivant l'usage que l'on en fait, on écrira cette décomposition soit suivant les puissances croissantes de  $b$  comme ci-dessus, soit suivant les puissances décroissantes de  $b$  comme ci-dessous :

$$N = c_n b^n + \dots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0.$$

L'intérêt d'une telle décomposition est d'explicitier le lien entre le nombre et les chiffres de son écriture en base  $b$ .

On écrira :  $N = \overline{c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0}^b$ .

L'écriture d'un nombre dépend de la base dans laquelle on travaille.