

**A - E - I - O - U**  
**DA MATEMÁTICA**  
VOL. 3

**ANDERSON LUIZ DOS SANTOS**



FICHA CATALOGRÁFICA:

SANTOS. A. L., A-E-I-O-U DA MATEMÁTICA VOL. 3, São Paulo, Agbook, 2016, 552  
Páginas

**Livro de Matemática Básica direcionado aos principiantes.**

**ANDERSON LUIZ DOS SANTOS**



## **INTRODUÇÃO**

Este livro é composto dos principais fundamentos da Matemática Básica, dando continuidade ao volume 1 e ao volume 2, fornecendo uma aprendizagem imediata e definitiva dos principais conceitos da Matemática.

A U L A

1

# Recordando operações

## Introdução

Vamos iniciar nosso curso de matemática do 2º grau recordando as quatro operações:

- adição
- subtração
- multiplicação
- divisão

Vamos lembrar como essas operações são feitas e, principalmente, quando devemos utilizá-las na solução de um problema.

Muita gente pensa que quem faz contas com rapidez é bom em matemática. É engano! Fazer contas rapidamente é uma habilidade que se adquire com a prática. Muito mais importante que fazer contas com rapidez é descobrir quais são as operações que devemos usar para resolver um problema. Portanto, em matemática, ***o mais importante é o raciocínio.***

Para começar, leia os quatro problemas abaixo e tente descobrir quais são as contas que devem ser feitas.

- Um motorista de táxi andou 180 km em certo dia e 162 km no dia seguinte. No total, quanto ele andou nesses dois dias?
- Uma mercadoria que custa R\$37,00 foi paga com uma nota de R\$50,00. De quanto foi o troco?
- Uma caixa de leite tipo “longa vida” possui 16 litros de leite. Quantos litros existem em 12 caixas?
- Devo repartir 24 balas igualmente entre meus três filhos. Quantas balas deve receber cada um?

Em todos os exemplos desta aula, usaremos apenas números inteiros. Eles são os nossos conhecidos 0, 1, 2, 3, ... e também os negativos - 1, - 2, - 3, ... .

## A adição

Podemos pensar na operação de adição quando queremos **juntar** as coisas que estão separadas.

### EXEMPLO 1

Em uma pequena escola, existem 3 turmas: uma com 27 alunos, outra com 31 alunos e outra com 18 alunos. Quantos alunos existem ao todo nessa escola?

Para reunir os alunos das 3 turmas, devemos somar a quantidade de alunos de cada turma. A operação que devemos fazer é:

$$27 + 31 + 18 = 76$$

Existem, portanto, **76 alunos** nessa escola.

Cada um dos números de uma soma chama-se **parcela**. Na operação de adição, podemos somar as parcelas em qualquer ordem. Por isso, temos certeza de que  $18 + 27 + 31$  também dá **76**.

Devemos ainda lembrar que números negativos também podem ser somados. Por exemplo, a soma de - 12 com - 5 dá - **17**. Para escrever essa operação fazemos assim:

$$- 12 + (- 5) = - 17$$

Observe que colocamos - 5 entre parênteses para evitar que os sinais de + e de - fiquem juntos. Mas existe outra maneira, mais simples, de escrever a mesma operação. Veja:

$$- 12 - 5 = - 17$$

## A subtração

Podemos pensar na operação de subtração quando queremos tirar uma quantidade de uma outra para ver quanto sobra. Veja o exemplo.

### EXEMPLO 2

Uma secretária recebeu a tarefa de preparar 90 envelopes de correspondência. Até a hora do almoço, ela já tinha feito 52. Quantos ela ainda tem de fazer?

Temos aqui um exemplo claro de operação de subtração. A operação que devemos fazer é:

$$90 - 52 = 38$$

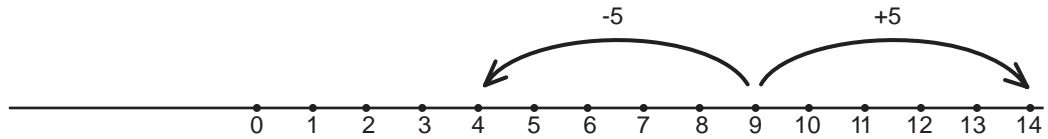
Assim, depois do almoço, a secretária deverá preparar ainda **38 envelopes**.

AULA  
1

Observe agora que, em uma subtração, quando o segundo número é maior que o primeiro, o resultado é negativo. Veja:

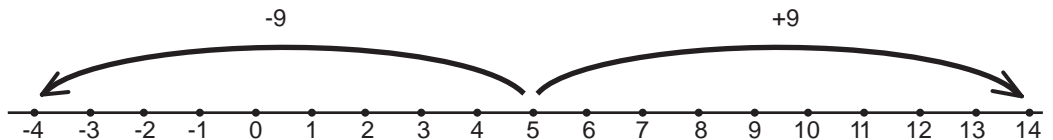
$$\begin{aligned} 9 - 5 &= 4 \\ 5 - 9 &= -4 \end{aligned}$$

Para visualizar as operações de adição e subtração, representamos os números inteiros como pontos de uma reta.



Na operação  $9 + 5 = 14$ , partimos do número 9, andamos 5 unidades para a **direita** e chegamos ao número 14.

Na operação  $9 - 5 = 4$ , partimos do número 9, andamos 5 unidades para a **esquerda** e chegamos ao número 4.



Na operação  $5 + 9 = 14$ , partimos do número 5, andamos 9 unidades para a **direita** e chegamos ao número 14.

Na operação  $5 - 9 = -4$ , partimos do número 5, andamos 9 unidades para a **esquerda** e chegamos ao número -4.

Para resumir, as regras são as seguintes:

- Escrever **5** ou **+ 5** é a mesma coisa.
- Quando sinais de números e sinais de operações aparecerem juntos, então:

$$\begin{aligned} (+) (+) &= (+) \\ (+) (-) &= (-) \\ (-) (+) &= (-) \\ (-) (-) &= (+) \end{aligned}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} 5 + (+ 3) &= 5 + 3 = 8 \\ 5 + (- 3) &= 5 - 3 = 2 \\ 5 - (+ 3) &= 5 - 3 = 2 \\ 5 - (- 3) &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Veja, a seguir, como devemos proceder numa situação em que há soma e subtração de diversos números.

## EXEMPLO 3

João abriu uma conta bancária. Depois de algum tempo, essa conta apresentou o seguinte movimento:

DIA	SALDO INICIAL	DEPÓSITO	RETIRADA
10	00,00		
10		53,00	
12			25,00
15		65,00	
18			30,00
21			18,00

Qual será o saldo de João após essas operações?

Vamos representar os depósitos por números positivos e as retiradas por números negativos. Devemos então fazer a seguinte conta:

$$53 - 25 + 65 - 30 - 18$$

O resultado dessa operação será a quantia que João ainda tem no banco. A melhor forma de fazer esse cálculo é **somar** os números positivos (os depósitos), **somar** os números negativos (as retiradas) e depois **subtrair** o segundo resultado do primeiro. Assim:

$$\begin{aligned} & 53 - 25 + 65 - 30 - 18 = \\ & = (53 + 65) - (25 + 30 + 18) = \\ & = 118 - 73 = \\ & = 45 \end{aligned}$$

Portanto, João ainda tem **R\$ 45,00** em sua conta bancária.

## A multiplicação

A multiplicação nada mais é que uma soma com parcelas iguais. Por exemplo:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \times 7 = 35$$

O número 7 apareceu 5 vezes. Então, 7 vezes 5 dá 35. Da mesma forma:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5 = 35$$

Agora, o número 5 apareceu 7 vezes. Então 5 vezes 7 dá 35.

Você já sabe que, em uma multiplicação cada número chama-se **fator**. Vamos, agora, recordar algumas propriedades da multiplicação.

AULA  
**1**

1. Na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o resultado. Por isso:

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

2. Quando temos várias multiplicações seguidas, qualquer uma delas pode ser feita primeiro. Por exemplo:

$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

$$2 \times 3 \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$$

$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 5) \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

3. Quando um número multiplica uma soma, ele multiplica cada parcela dessa soma. Por exemplo:

$$2 \times (3 + 4 + 5) = 2 \times 12 = 24$$

Ou, ainda:

$$2 \times (3 + 4 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 = 6 + 8 + 10 = 24$$

Falta apenas recordar o que ocorre quando temos multiplicações com números negativos. As regras são as seguintes:

$$(+ ) \times (- ) = (- )$$

$$(- ) \times (+ ) = (- )$$

$$(- ) \times (- ) = (+ )$$

Vamos ver alguns exemplos para entender bem essas regras.

- Para calcular  $4 \times (-3)$  podemos fazer uma soma com 4 parcelas iguais a  $-3$ . Daí:

$$4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$$

$$4 \times (-3) = -3 - 3 - 3 - 3$$

$$4 \times (-3) = -12$$

- Para entender que o produto de dois números negativos é positivo vamos lembrar que o produto de qualquer número por zero dá zero. Portanto:

$$(-3) \times 0 = 0$$

Vamos então escrever essa igualdade assim:

$$(-3) \times (-2 + 2) = 0$$

É a mesma coisa. A igualdade continua certa. Mas, utilizando uma das propriedades da multiplicação, podemos escrever a mesma coisa de forma ainda diferente. Veja:

$$\underbrace{(-3) \times (-2)}_{?} + \underbrace{(-3) \times 2}_{-6} = 0$$

Ora, sabemos que  $(-3) \times 2$  dá  $-6$ . Logo, devemos ter  $(-3) \times (-2) = 6$  para que a soma seja zero.

## A divisão

Podemos pensar na divisão quando queremos dividir um total de partes iguais ou quando queremos saber quantas vezes um número cabe no outro.

### EXEMPLO 4

Desejamos colocar 80 lápis em 5 caixas, de maneira que todas as caixas tenham o mesmo número de lápis. Quantos lápis devemos pôr em cada caixa?

A resposta é fácil. Basta **dividir** 80 por 5.

$$80 \div 5 = 16$$

Logo, cada caixa deve conter 16 lápis.

No exemplo que acabamos de ver, a divisão foi **exata** ou seja, conseguimos colocar a mesma quantidade de lápis em cada caixa sem que sobrasse nenhum. O que aconteceria, entretanto, se tivéssemos 82 lápis para pôr nas 5 caixas? A resposta é fácil. Cada caixa continuaria com 16 lápis, mas sobrariam 2.

Veja a operação:

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \\
 82 \overline{) 5} \quad \text{divisor} \\
 \underline{-5} \quad 16 \quad \text{quociente} \\
 32 \\
 \underline{-30} \\
 2 \quad \text{resto}
 \end{array}$$

Na operação acima, 82 é o **dividendo**, 5 é o **divisor**, 16 é o **quociente** e 2 é o **resto**. Esses quatro números se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 82 & = & 5 & \times & 16 & + & 2 \\
 \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup \\
 \text{(dividendo)} & = & \text{(divisor)} & \times & \text{(quociente)} & + & \text{(resto)}
 \end{array}$$

#### Atenção!

O resto é sempre **positivo** e **menor** que o divisor.

Ao fazer uma divisão, estaremos sempre encontrando dois novos números: o quociente e o resto. Vamos ver mais um exemplo do uso dessa operação em um problema.

**EXEMPLO 5**

Certo elevador pode transportar no máximo 6 pessoas. Se existem 46 pessoas na fila, quantas viagens o elevador deverá fazer para transportar todas essas pessoas?

Devemos dividir 46 por 6. Observe a operação:

$$\begin{array}{r} 46 \overline{) 6} \\ - 42 \phantom{0} \\ \hline 4 \phantom{0} \end{array}$$

O quociente igual a 7 indica que o elevador fará 7 viagens com lotação completa. Mas o resto igual a 4 indica que sobrarão ainda 4 pessoas para serem transportadas. Logo, o elevador deverá fazer uma viagem a mais para transportar as 4 pessoas restantes. Portanto, o elevador fará 8 viagens para transportar todas as pessoas.

**Exercícios****Exercício 1**

Efetue as operações indicadas:

- a)  $37 + 43 =$
- b)  $55 - 18 =$
- c)  $18 - 55 =$
- d)  $12 + (-7) =$
- e)  $12 - (-7) =$
- f)  $-9 - 6 =$
- g)  $-9 + (-6) =$
- h)  $-9 - (-6) =$
- i)  $13 \times 7 =$
- j)  $(-8) \times 9 =$
- l)  $(7 - 3) \times 4 =$
- m)  $(3 - 8) \times (-4) =$

**Exercício 2**

Efetue as operações indicadas. Lembre que, se várias operações aparecem em uma mesma expressão, as multiplicações e divisões são feitas primeiro e depois as somas e subtrações.

- a)  $4 + 2 \times 3 =$
- b)  $20 - 3 + 12 - 30 \div 6 =$
- c)  $13 \times 112 - 11 \times 10 =$

**Exercício 3**

Um revendedor entrou numa confecção e fez a seguinte compra.

MERCADORIA	QUANTIDADE	PREÇO UNITÁRIO (R\$)
camisetas	30	6
camisas	15	12
bermudas	25	9
calças	20	18

Quanto ele pagou por essa compra?

**Exercício 4**

Um trabalhador recebe R\$12 por dia de trabalho, mais uma gratificação de R\$8 por semana. Sabendo que cada semana tem 6 dias de trabalho, quanto esse trabalhador deverá ter recebido após 4 semanas?

**Exercício 5**

Descubra que números estão faltando nas operações abaixo:

a)  $12 \times \dots = 180$

b)  $\dots \begin{array}{r} 8 \\ 5 \overline{) 26} \end{array}$

c)  $148 = 6 \times \dots + 4$

**Exercício 6**

Certo automóvel faz, na estrada, 12 km por litro de gasolina. Para fazer uma viagem de 340 km, o proprietário colocou no tanque 30 litros de gasolina. Esse combustível será suficiente?

**Exercício 7**

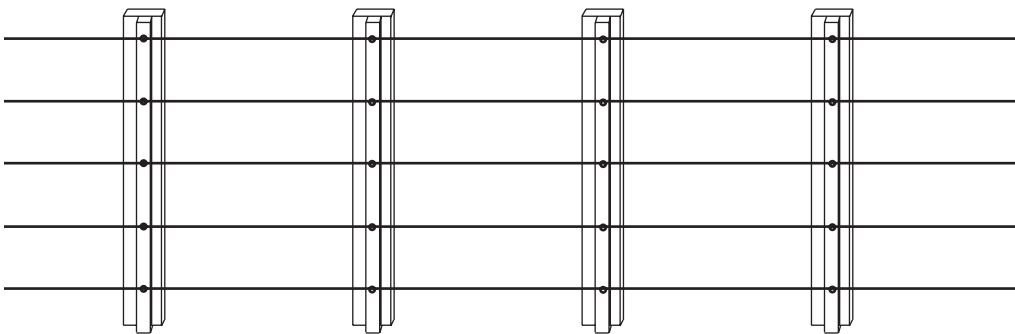
Em uma festa, as mesas do salão são quadradas e acomodam, no máximo, 4 pessoas. Para que 150 pessoas possam se sentar, quantas mesas serão necessárias?

**Exercício 8**

Uma escola tem 4 salas e cada sala tem 30 carteiras. Na primeira sala existem 26 alunos, na segunda 24, na terceira, 23 e na quarta, 19. Quantos alunos ainda podem ser matriculados?

**Exercício 9**

João tem um terreno retangular de 20m de frente por 30m de fundo, e deseja cercá-lo com uma cerca de arame com 5 fios.



Quantos metros de arame ele deverá comprar?

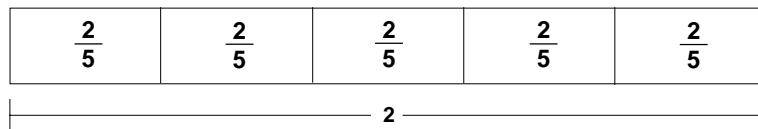
# Frações e números decimais

## Introdução

Inicialmente, as frações são apresentadas como partes de um todo. Por exemplo, teremos  $\frac{2}{5}$  de um bolo se dividirmos esse bolo em cinco partes iguais e tomarmos duas dessas partes. Entretanto, se substituirmos o “bolo” por uma unidade qualquer, a fração  $\frac{2}{5}$  é um número e, como tal, possui seu lugar na reta numérica. Para fazer a marcação na reta numérica, dividimos a unidade em 5 partes e tomamos duas



Por outro lado, a fração é também o resultado da divisão de dois números; por exemplo, a fração  $\frac{2}{5}$ , que é o resultado da divisão de 2 por 5. Observe o desenho a seguir:



Dois unidades foram divididas em 5 partes iguais.

## Nossa aula

Nesta aula vamos estudar as frações, suas propriedades e a forma de representá-las por números decimais.

### A divisão prolongada

Imagine que R\$25,00 devam ser divididos igualmente entre 4 pessoas. Quanto cada uma deverá receber?

Sabemos que 25 não é múltiplo de 4, e portanto, a quantia que cada um deve receber não será um número inteiro. Para isso existem os centavos. Vamos então lembrar como fazemos a divisão de 25 por 4.

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 4} \\ - 24 \quad 6 \\ \hline 1 \end{array}$$

Até agora, nossa conta indica que cada pessoa receberá **6** reais; mas existe ainda um resto de 1 real. Para continuar, acrescente um zero ao resto e uma vírgula ao quociente.

$$\begin{array}{r} 25 \quad | \quad 4 \\ - 24 \quad | \quad 6,25 \\ \hline 10 \\ - 8 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

O resultado da divisão de 25 por 4 é **6,25** ou seja, cada pessoa receberá **6** reais e **25** centavos.

Utilizando uma fração para indicar a divisão, podemos representar a operação que fizemos da seguinte forma:

$$\frac{25}{4} = 6,25$$

Todas as frações podem ser representadas por números decimais. Basta dividir o numerador pelo denominador prolongando a operação.

A máquina de calcular faz muito bem esse trabalho. Observe os exemplos.

$\frac{25}{4}$	(2) (5) (÷) (4) (=)	6.25
$\frac{126}{15}$	(1) (2) (6) (÷) (1) (5) (=)	8.4
$\frac{2}{3}$	(2) (÷) (3) (=)	0.66666666

O que aconteceu no último exemplo?

A representação decimal da fração  $\frac{2}{3}$  tem infinitas casas decimais, ou seja, a quantidade de algarismos não acaba nunca. Esses números decimais que possuem algarismos (ou grupos de algarismos) que se repetem eternamente são as **dízimas periódicas**.

As dízimas periódicas são incômodas. Com elas, em geral não conseguimos fazer contas de somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Por isso, preferimos representar esses números na forma de frações.

Vamos então recordar as operações com frações.

**Frações iguais:**

Sabemos que a fração  $\frac{1}{2}$  é igual ao número decimal 0,5. Entretanto, as frações  $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$  são também iguais a 0,5. Temos aqui um primeiro exemplo de frações iguais:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Como fazemos para obter frações iguais?

A propriedade que enunciamos a seguir responde a essa pergunta.

***Uma fração não se altera quando multiplicamos ou dividimos o numerado e o denominador pelo mesmo número.***

Observe os exemplos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{7}{14}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{12}{32} = \frac{12 \cdot 4}{32 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{50}{60} = \frac{50 \cdot 10}{60 \cdot 10} = \frac{5}{6}$$

Os dois últimos exemplos são importantes porque mostram como simplificar frações. Se em algum problema aparece a fração  $\frac{12}{32}$ , podemos, em seu lugar, usar a fração  $\frac{3}{8}$ , que representa o mesmo número e é mais simples.

A propriedade que vimos é fundamental para as operações de adição e subtração de frações.

**Operações com frações**

Sabemos que é muito fácil somar ou subtrair frações que tenham o mesmo denominador. Neste caso, basta somar ou subtrair os numeradores. Assim:

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}$$

Observe outro exemplo e a simplificação do resultado.

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Como faremos, então, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes? Não é difícil.

Vamos tentar representar as frações dadas por outras, iguais às que temos, mas com denominadores iguais. É o que veremos a seguir.

### Adição e subtração de frações

Tomemos como exemplo, a soma  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ .

Os denominadores são diferentes. Então, buscamos um número que seja múltiplo de ambos. Encontramos 12, que é múltiplo de 4 e também de 6.

Vamos então representar as duas frações dadas com esse mesmo denominador. Observe:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$$

Então,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Acabamos de somar duas frações com denominadores diferentes. A subtração é feita da mesma forma. Devemos também igualar os denominadores.

Consideremos então a diferença  $\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$ .

Qual será o novo denominador que devemos escolher? Pense um pouco e observe a solução.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{32}{40}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$

Então,

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{8} = \frac{32}{40} - \frac{15}{40} = \frac{17}{40}$$

### Multiplicação de frações

Se na solução de algum problema devemos calcular, por exemplo **a terça parte de dois quintos**, estamos frente a uma situação em que devemos multiplicar duas frações. A regra é a seguinte:

**Para multiplicar duas frações,  
multiplique os numeradores e os denominadores**

Assim:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

**O inverso de um número**

O inverso de um número é um outro que, multiplicado pelo primeiro, dá 1. Por exemplo:

$$\text{o inverso de } 2 \text{ é } \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{o inverso de } \frac{3}{5} \text{ é } \frac{5}{3} \quad \text{porque} \quad \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

O **zero** é o único número que **não possui inverso**. Observe agora a igualdade abaixo:

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Ela está correta, é claro. Mas, o que está mostrando? Que, do lado esquerdo, estamos dividindo 2 por 3 e, do lado direito, estamos multiplicando 2 pelo inverso de 3. Isso vale para qualquer número. A regra é a seguinte.

***Dividir um número por outro é o mesmo que multiplicar esse número pelo inverso do outro.***

Por exemplo, quanto dá  $\frac{4}{5}$  divididos por  $\frac{2}{3}$ ? Pense um pouco e acompanhe a solução.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

**As porcentagens**

Uma porcentagem é uma fração de denominador 100. Por exemplo, **32%** é igual à fração  $\frac{32}{100}$  que também é igual ao número decimal **0,32**. Quando queremos calcular uma porcentagem de algum valor, multiplicamos a fração por esse valor. Veja:

$$\begin{aligned} 32\% \text{ de } 650 \text{ laranjas} &= 0,32 \times 650 = \mathbf{208 \text{ laranjas}} \\ 8\% \text{ de R\$140,00} &= 0,08 \times 140 = \mathbf{R\$11,20} \end{aligned}$$

O que fazer para transformar uma fração qualquer em uma porcentagem?

Se o denominador só possui múltiplos de 2 e de 5, é fácil encontrar uma fração equivalente com denominador 100. Por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100} = \mathbf{40\%}$$

Mas como faríamos com a fração  $\frac{4}{7}$ ?

O mais prático, em qualquer caso, é usar a máquina para dividir o numerador pelo denominador e depois deslocar a vírgula duas casas para a direita. Observe os exemplos:

$$\frac{8}{25} = 8 \div 25 = 0,32 = 32\%$$

$$\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0,625 = 62,5\%$$

$$\frac{4}{7} = 4 \div 7 \cong 0,5714 = 57,14\%$$

Repare que nesse último exemplo fizemos uma aproximação.

Na prática, usamos duas ou, no máximo, três casas decimais em nossas aproximações.

### Exercício 1

Simplifique as frações abaixo. Exemplo:

$$\frac{18}{42} = \frac{18 \div 2}{42 \div 2} = \frac{9}{21} = \frac{9 \div 3}{21 \div 3} = \frac{3}{7}$$

a)  $\frac{20}{32}$

c)  $\frac{320}{400}$

b)  $\frac{24}{36}$

d)  $\frac{10}{100}$

### Exercício 2

Complete os espaços abaixo com os sinais de < (menor), > (maior) ou = (igual). Exemplo:

$$\frac{2}{3} \dots \frac{5}{8}$$

Solução:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24} \end{array} \right\} \frac{16}{24} > \frac{15}{24} \rightarrow \frac{2}{3} > \frac{5}{8}$$

a)  $\frac{5}{8} \dots \frac{3}{5}$

c)  $\frac{5}{6} \dots \frac{23}{24}$

b)  $\frac{2}{3} \dots \frac{5}{9}$

d)  $\frac{8}{10} \dots \frac{20}{25}$

### Exercício 3

Efetue:

a)  $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$

c)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

b)  $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$

d)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

AULA
2

**Exercício 4**

Efetue:

a)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

c)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

b)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}$

d)  $\frac{\Phi}{H^+} \frac{2I}{4K} \frac{7}{2}$

**Exercício 5**

Calcule as porcentagens:

a) 10% de 120

b) 24% de 500

c) 5% de 60

d) 12,5% de 72

**Exercício 6**

Transforme as frações em números decimais aproximados. Dê as respostas com duas decimais. Entretanto, observe a terceira casa decimal. Se ela for menor que 5, mantenha o valor da segunda casa. Se ela for maior ou igual a 5, aumente de uma unidade a segunda casa.

Exemplo:

$$\frac{1}{7} = 0,142... \cong 0,14$$

$$\frac{26}{19} = 1,368... \cong 1,36$$

a)  $\frac{2}{3}$

c)  $\frac{4}{11}$

b)  $\frac{3}{7}$

d)  $\frac{29}{13}$

**Exercício 7**

Escreva as frações abaixo como porcentagens. Não dê respostas com mais de duas decimais. Aproxime se necessário:

a)  $\frac{1}{8}$

b)  $\frac{5}{6}$

c)  $\frac{7}{40}$

## Introdução

Vamos falar um pouco sobre a **aritmética**, a **geometria...** e a **álgebra**. Elas são áreas importantes da matemática. Cada uma delas inventa seus objetos de estudo e métodos de resolver problemas, e todas têm aplicações significativas em nosso cotidiano.

Como você deve se lembrar, de seus estudos no curso do 1º grau, a aritmética estuda os números – especialmente os números inteiros e os fracionários. Quanto à geometria, seus objetos de estudo são as figuras geométricas – como o triângulo, o quadrado, o círculo, a esfera etc.

Os conhecimentos de aritmética e de geometria surgiram possivelmente há mais de quatro milênios. Pelo que está registrado nos achados da arqueologia – a ciência que estuda o nosso passado – devemos muitos aos babilônios e aos egípcios e, finalmente, aos gregos. Estes últimos foram os responsáveis pelo surgimento do pensamento científico e nos deixaram os trabalhos de Tales, de Pitágoras e, mais tarde, de Euclides. (Euclides, por volta de 300 a.C., formalizou praticamente todo o conhecimento matemático de seu tempo em sua obra *Os Elementos*.)

### E a álgebra?

A álgebra já é bem mais recente. Considera-se que tenha surgido na Índia, nos primeiros séculos deste milênio. De lá passou aos árabes. Nosso Sistema de numeração é chamado **indo-arábico** devido a esses povos. E com os árabes, que lhe deram o nome, a álgebra penetrou na Europa, onde desenvolveu-se extraordinariamente a partir do século XVI. Da Europa, esta área da matemática que continua crescendo, chegou às Américas e até nós, neste Brasil do limiar do terceiro milênio.

A matemática deve o que é não apenas à genialidade de homens e mulheres como Tales, Pitágoras, Hipátia (uma matemática grega), Newton, Gauss etc., mas também aos talentos “incógnitos” que em instantes magníficos criaram e continuarão criando a matemática.

Quem teria inventado o zero? E as noções de ponto e de reta? E os nossos Algarismos? Jamais saberemos responder. Só sabemos que o conhecimento se espalha, como é comum na natureza: cada nova planta que brota traz esperança de muitas outras plantas que brotarão. Sendo assim, aqui vão nossas sementes algébricas! E que você as multiplique – é o nosso desejo.

## Nossa aula

Para começar esta aula, pense no seguinte problema: uma mulher de 25 anos é casada com um homem 7 anos mais velho que ela.

Qual é a soma das idades desse casal? Pense e responda. Não é difícil responder. O marido tem:

$$25 + 7 = \mathbf{32} \text{ anos}$$

Portanto, a soma das idades do casal é:

$$25 + 32 = \mathbf{57} \text{ anos}$$

Agora vamos ver outro problema semelhante: o marido de certa mulher é 7 anos mais velho que ela. Quando nasce a primeira criança do casal, as idades dos dois somam 70 anos.

Qual a idade da mulher?

Podemos perceber que essa resposta não virá tão facilmente quanto a do problema anterior. É interessante, por isso, que você pegue papel e lápis, e tente responder à pergunta.

Será isso o que também faremos na próxima aula, quando mostraremos que alguns problemas tanto podem ser resolvidos pelo raciocínio aritmético quanto pelo algébrico.

Agora, queremos mostrar-lhe como resolver este problema pela álgebra, pois cremos que você saberá reconhecer o valor dessa nova forma de raciocínio.

### O nascimento do “x”

Para resolver esse problema, poderíamos pensar assim: já que não sabemos a idade da mulher, nós escrevemos ? em seu lugar.

Com isso, podemos escrever o que sabemos do problema: que a soma das idades da mulher e de seu marido é 79. Assim:

$$\begin{array}{ccc} ? & + & (? + 7) = 79 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \text{idade da} & & \text{idade do} \\ \text{mulher} & & \text{marido} \end{array}$$

Continuando, encontraremos:

$$\begin{array}{r} ? + ? + 7 = 79 \\ 2? = 72 \\ ? = 72 : 2 \\ ? = 36 \end{array}$$

Portanto, a idade da mulher é 36 anos. Para conferir, basta ver qual é a idade do marido e qual é a soma das idades.

Não é fácil? Pois esta é a essência do chamado raciocínio algébrico – e daqui a pouco nós o recordaremos para você. Por enquanto, repare que o raciocínio é exatamente igual ao de uma outra pessoa que, no lugar de ?, usasse um outro símbolo qualquer para representar um número.

Por exemplo, alguém poderia pensar assim: “Como não sei a idade procurada, deixo um espaço para ela dentro deste quadradinho, e então escrevo o que sei.” Ficaria assim:

$$\square + (\square + 7) = 79$$

Resolvendo esta equação (que é como chamamos em álgebra o procedimento de encontrar o número procurado), chegamos a:

$$\square = 36, \text{ como antes.}$$

Ou seja, o símbolo que cada pessoa escolhe para ajudá-la a resolver o problema não é importante. Observe que o raciocínio é o mesmo.

Sendo assim, podemos usar **qualquer símbolo** (lembre-se disso, pois às vezes os símbolos escolhidos podem ajudar bastante na resolução de problemas que encontramos na vida – e até nos motivar mais a enfrentar esses problemas).

É comum, em Matemática, usarmos a letra “**x**” para designar o número que estamos procurando – a **incógnita**, como se diz. Também em outras ciências e na literatura em geral a letra “**x**” tem sido usada para designar algo desconhecido ou misterioso.

Como exemplos, temos: o “**raio x**”, que assim foi chamado porque desconhecia-se o que ele era; uma certa “**faculdade x**”, relacionada com o desenvolvimento da consciência do homem (segundo o escritor britânico Colin Wilson); o “**cavalheiro x**”, personagem misterioso de algum romance ou novela etc.

No caso do problema anterior, então, sua equação fica assim, usando **x**:

$$x + (x + 7) = 79$$

Compare com as outras duas formas de escrevê-la. Não é a mesma coisa? E resolvendo a equação, obtemos **x = 36** para a idade da mulher, como antes.

Seguindo a tradição matemática, também adotaremos o **x** quando o símbolo for indiferente.

### Resumindo o raciocínio algébrico: outro problema

João avalia que, de sua caixa d’água de 1000 litros, restavam apenas uns 100 litros. Para enchê-la de novo precisou fazer 45 viagens carregando uma lata cheia d’água. Qual a capacidade aproximada da lata? E quanto pesava a água na lata?

As etapas importante do nosso raciocínio acima são as seguintes.

Procure compreender a idéia geral do raciocínio: como vimos, ele é fruto do bom senso.

#### ETAPA 1 – Dando nome aos “bois”

O que precisamos saber para resolver o problema: isto será **x**.

Neste exemplo, **x** = capacidade da lata. Em seguida, usamos **x** para escrever o que sabemos; quer dizer, montamos a equação do problema.

AULA  
3

### ETAPA 2 - Montando a equação

Basta interpretar o que está escrito na nossa linguagem comum em termos matemáticos. Ou seja, escrever a equação. Reveja como fazemos:

$$\text{Capacidade da lata} = x$$

$$\text{Capacidade de 45 latas} = 45x$$

$$\text{O que sabemos: } 45x + 100 = 1000 \text{ (litros)}$$

### ETAPA 3 - Resolvendo a equação

Esta etapa é mais automática: são as regras do cálculo. Aqui:

$$45x + 100 = 1000$$

$$45x = 900$$

$$x = 900 \div 45$$

$$x = 20 \text{ (litros)}$$

E a lata pesa 20 kg, pois 1 litro de água pesa 1 kg. Não estamos considerando o peso da lata vazia, neste problema.

### ETAPA 4 - Conferindo o resultado

“Tudo isso?”, alguém poderia perguntar, espantado com o peso carregado por João em tantas viagens. Para não termos dúvida de que chegamos ao resultado certo, “checamos” se o número encontrado satisfaz de fato o que sabemos dos dados do problema. Quer dizer, se  $x$  for mesmo igual a 20, então deveremos ter  $45x + 100 = 1000$ . Vejamos:

$$45 \times (20) + 100 = 900 + 100 = 1000 \text{ (Confere !)}$$

↓  
x

São só estas etapas? Não. É preciso ter o cuidado final de verificar se já respondemos à pergunta do problema.

### ETAPA 5 - Respondendo o que foi perguntado

Por exemplo, poderia ter sido perguntado não quanto era a **capacidade** da lata, mas sim qual o seu **peso** em água. (A resposta não seria, é claro, 20 litros!)

Ou seja: para completar a solução, você tem de responder exatamente o que o problema pede.

Foi uma boa aula. Concorda? O raciocínio algébrico é mesmo muito útil, poderoso e até mesmo muito atual em termos de pensamento matemático. Use-o nos próximos exercícios, não esquecendo de que o importante é a compreensão do que estamos estudando.

**Exercício 1**

Para cercar todo o perímetro de seu terreno quadrado e ainda gastar 26 m no caminho que leva à estrada, Procópio precisou comprar 94 m de cerca. Qual a área de seu terreno?

**Exercício 2**

Quando seu primogênito nasceu, Gustavo tinha 24 anos. Depois de quantos anos ele terá exatamente o dobro da idade de seu filho? E o triplo?

**Exercício 3**

- a) Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de seu triplo?
- b) Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de 21?
- c) Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de 42?

**Exercício 4**

Quinze anos depois do nascimento das trigêmeas Lia, Lina e Liana, quantos anos tem cada uma delas?

**Exercício 5**

Quanto devo pedir por determinada mercadoria que pretendo vender para que, descontados 10%, eu fique ainda com R\$100,00? (Verifique!)

**Exercício 6**

Relacione cada número à esquerda com aquela expressão à direita que se torna verdadeira quando  $x$  é substituído pelo número:

VALORES DE X	EXPRESSÕES
2	a) $5x = 6 - x^2$
0	b) $\frac{18}{x} + 5 = 2 + x$
-3	c) $\sqrt{x} + x = 0$
3	d) $x^3 + 2x = 12$
1	e) $x + 2x - 9 = 0$

# O método aritmético e o método algébrico

## Introdução

Se você esteve bem atento na aula passada, na qual conhecemos os “problemas com  $x$ ”, deve ter percebido que aquele problema das idades do casal poderia ter sido resolvido sem que fosse preciso usar  $x$ . Vejamos como. O problema dizia:

*Certa mulher é casada com um homem 7 anos mais velho que ela. Quando a primeira criança do casal nasceu, a soma das duas idades era 79. Qual era a idade da mulher?*

Podemos raciocinar da seguinte maneira. Se o homem e a mulher tivessem a mesma idade, a idade dela (ou dele) seria, é claro, metade da soma; e a soma seria o dobro da idade da mulher. Como o marido é 7 anos mais velho, o dobro da idade da mulher foi aumentado de 7 anos, somando 79 anos.

Logo, o dobro da idade da mulher é:

$$79 - 7 = 72$$

E a idade da mulher é:

$$72 : 2 = 36$$

**C.Q.D.!** Isto é, **Como queríamos demonstrar**, pois foi este o resultado que encontramos na outra aula.

A aula de hoje traz outros problemas, que podem ser resolvidos tanto pelo método aritmético (como fizemos agora), como pelo método algébrico, “ou método do  $x$ ”.

Qual é o melhor para cada problema? A matemática não decide isso por nós: ela apenas enriquece nosso conhecimento com vários métodos para resolver problemas, e deixa a escolha para nós. Pois cabe a cada pessoa escolher por si mesma, já que a Matemática também é parte da vida.

Sendo assim, papel e lápis! Porque também não existe “matemática de cabeça”, e vamos à aula de hoje!

Vamos ver como resolver um mesmo problema por métodos diferentes.

No exemplo seguinte, temos mais uma questão sobre idades. Compare a solução pelo método aritmético e a solução pelo método algébrico. Você verá que chegaremos ao mesmo resultado.

*“Sou cinqüentão”, afirmou Paulo (querendo dizer que tinha cinqüenta e poucos anos). “E hoje é um dia cabalístico” (isto é, mágico). “Pois não apenas a idade da minha mulher, Jurema, mais jovem do que eu, se escreve ao contrário da minha, como a diferença entre as nossas idades é igual à idade que nossa filha comemora hoje: 9 anos!”*

Quantos anos tem Paulo? Uma tal data “cabalística” como essa se repetirá algum dia?

Tente descobrir a idade de Paulo, raciocinando apenas com números, sem utilizar  $x$ , ou seja, raciocinando aritmeticamente.

### Resolvendo pelo método aritmético

O caminho mais simples para resolver o problema pelo método aritmético, neste caso, parece ser pelo raciocínio das tentativas. Assim, vamos fazer diretamente as contas em cada uma das possibilidades para a idade de Paulo – cinqüenta e poucos anos:

IDADE DE PAULO	IDADE DE JUREMA	DIFERENÇA (= 9?)
51	15	36 (não)
52	25	27 (não)
53	35	18 (não)
54	45	9 (sim)
55	55	0 (já não serve: Jurema é mais jovem)

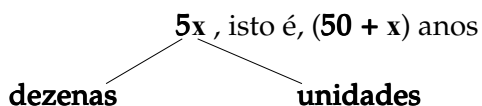
Portanto, Paulo tem 54 anos, e sua mulher, 45.

Quanto à segunda pergunta, fica para você responder. Continue usando o método das tentativas. No próximo ano, Paulo terá 55 anos, e Jurema, 46 (cujo contrário é 64, e não 55 - o que Paulo não consideraria “cabalístico”), e assim por diante. Procure!

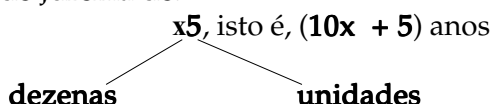
### Resolvendo pelo método algébrico

A pergunta é: qual a idade de Paulo “cinqüentão”?

Vamo chamar a idade de Paulo de:



E a idade de Jurema de:



AULA  
**4**

Sabemos que a diferença entre as idades é de 9 anos. Logo,

$$\begin{aligned}(50 + x) - (10x + 5) &= 9 \\ 50 + x - 10x - 5 &= 9 \\ -9x + 45 &= 9 \\ -9x &= 9 - 45 \\ x &= \frac{-36}{-9} = 4\end{aligned}$$

A idade de Paulo, então, é 54 anos (como encontramos antes).

### Que método é mais fácil? E mais rápido?

No exemplo relativo à idade de Paulo, talvez você ache mais fácil aplicar o método aritmético. Basta organizar um pouco o raciocínio, fazendo uma tabela, e procurar o par de números “contrários” que satisfaça o que se pede.

Já o método algébrico é mais rápido, e também mais geral: adapta-se imediatamente a vários problemas. (Veja os exercícios, depois.)

Mas isso foi nesse exemplo. Em outros problemas, pode ser diferente. É isso que é bom, pois a própria escolha inicial do método a ser empregado já desenvolve nosso raciocínio e nossa criatividade.

Veremos agora um problema que pode ser resolvido por, pelo menos, três métodos: um aritmético, um algébrico e um gráfico. Deixamos para você opinar, neste caso, sobre qual deles é o mais fácil, ou o mais rápido, ou o mais geral etc.

### Outro problema... e três métodos de resolução

*Estou com uns amigos numa mesa de bar. Tenho na carteira R\$15,70. Quanto posso deixar minha despesa alcançar, se também pretendo deixar como gorjeta para o garçom 10% sobre essa despesa?*

#### Resolvendo pelo método aritmético

Fazendo algumas tentativas com o valor da despesa, observo que, para cada 10 reais de despesa, deixarei mais 1 real para o garçom, totalizando esse gasto 11 reais, ou R\$11,00. Para cada 1 real de despesa, deixarei 10 centavos, gastando assim R\$1,10. Vamos, então, acrescentando novos gastos como esses, até a soma se aproximar do que tenho (R\$15,70). Veja a tabela, com valores em R\$:

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA
10	1	11	11
1	0,10	1,10	12,10
1	0,10	1,10	13,20
1	0,10	1,10	14,30
1	0,10	1,10	15,40
0,10	0,01	0,11	15,51
0,10	0,01	0,11	15,62
0,10	0,01	0,11	15,73

(mais do que tenho)

Observe que, após a quinta linha de despesa, não valeria a pena continuar somando 1 real, pois isso levaria o total do gasto a mais de 16 reais – quantia de que não disponho. Por isso, continuamos com valores simples menores, de R\$0,10 de despesa. Sendo assim, a tabela mostra que, nesse caso, posso deixar minha despesa alcançar apenas o que consta da última linha. Ou seja:

$$10 + 4 + 0,20 = \mathbf{14,20 \text{ reais}}$$

### Resolvendo pelo método algébrico

Vamos dar nomes (ou símbolos) aos componentes do problema:

- $x$  - para o valor que a despesa pode alcançar
- $0,1x$  - para a gorjeta = 10% de  $x = (10/100) \cdot x$
- $1,1x$  - para o gasto =  $x + 0,1x$

Então, eu quero saber qual o valor de  $x$  para que o meu gasto no bar não ultrapasse R\$15,70.

$$1,1x = 15,70 \text{ (ou menor que isso)}$$

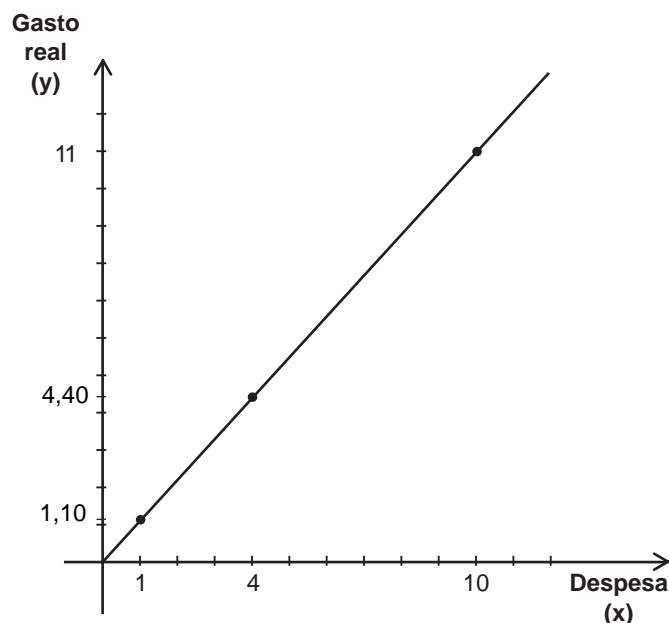
$$x = 14,27 - \text{um pouco mais que } 14,20. \text{ Como antes.}$$

De fato, se a minha despesa for R\$14,20, a gorjeta será de R\$1,42 ao todo, e terei gasto R\$14,20 + R\$1,42 = **R\$15,62**, como encontramos na solução aritmética.

### Resolvendo pelo método gráfico

Podemos também nos assegurar dessa resposta visualizando o problema num gráfico. Por exemplo, marca-se no eixo horizontal a despesa e, no vertical, a despesa aumentada de 10%, quer dizer, o gasto real. E marcando neste gráfico alguns valores conhecidos, como aqueles da tabela do item **Resolvendo pelo método aritmético**.

DESPESA	GASTO REAL
10	11
1	1,10
4	4,40



AULA  
4

É fácil notar que esses três pontos do tipo  $(x,y) = (\text{despesa}, \text{gasto})$  que encontramos na tabela, bem como quaisquer outros que calculemos, formam uma reta que passa pela origem dos eixos. De fato, isso acontece porque o gasto é proporcional à despesa: ou seja, se a despesa for, por exemplo, 10 vezes maior, o gasto também será 10 vezes maior. Realmente, vimos que, de fato, um deles é múltiplo do outro:  $\text{gasto} = (1,1) \times \text{despesa}$ .

Aqui é bom fazer uma pequena pausa para tratarmos de sinais matemáticos. É que, em álgebra, convém trocar o sinal de vezes ( $\times$ ) pelo ponto ( $\cdot$ ), para não confundir com a letra  $x$ .

Tradicionalmente, a matemática utiliza os seguintes sinais:

$\times$  e  $\cdot$  para a multiplicação  
e

$\#$  e  $:$  para a divisão.

Por isso, se você encontrar:

$$\text{gasto} = (1,1) \cdot \text{despesa}$$

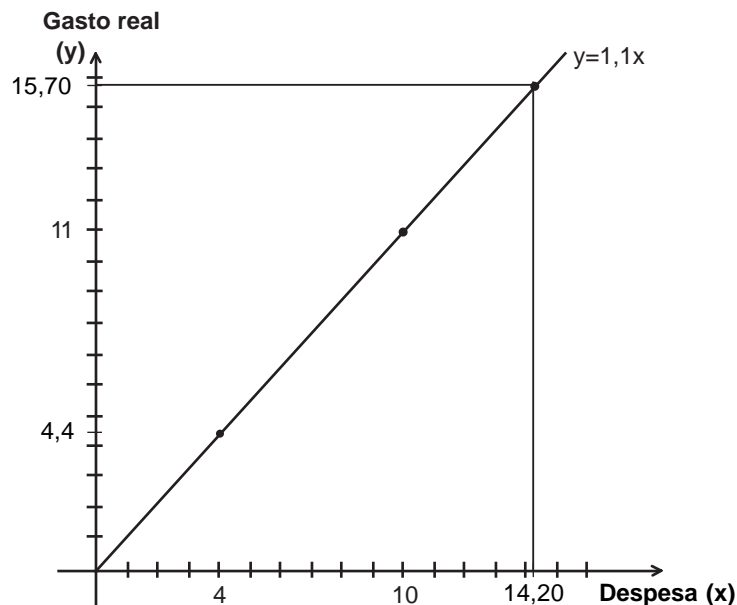
é a mesma coisa que

$$\text{gasto} = (1,1) \times \text{despesa}$$

Algumas vezes, você também vê uma multiplicação na qual o sinal não aparece. Podemos escrever, por exemplo, o produto de  $a$  por  $b$  de três formas:

$$a \times b, a \cdot b \text{ ou simplesmente } ab$$

Assim, para sabermos que a despesa corresponde ao gasto de, no máximo, R\$15,70, marcamos este número no eixo vertical e procuramos pela despesa no eixo horizontal:



Fazendo isto com cuidado, vimos que a despesa pode ser de até R\$14,20, ou um pouco mais alta – como concluímos pelos outros dois métodos. Aqui estão alguns exercícios para você praticar. A lição mais importante desta aula, entretanto, não foi dita até aqui. É esta:

Resolver um mesmo problema por dois métodos diferentes pode lhe dar uma grande segurança quanto às respostas. Se elas forem iguais, é bem possível que suas respostas estejam certas. “E se forem diferentes?”, você perguntaria. Neste caso, é claro que uma das respostas está errada!

Saber que estamos errados também é uma forma de acertar. Concorda? O grande cientista Einstein teria dito, certa vez, que não se importava quando alguém apontava um erro em suas teorias; na verdade, até gostava. Por quê? Ele dizia que, tendo sido encontrado esse equívoco, isso o colocava mais perto da verdade, pois já não estava se enganando.

Grande Einstein! São palavras que nos fazem pensar, não é mesmo?

### Exercício 1

Use o gráfico do último problema desta aula para encontrar que despesa posso fazer para não ultrapassar os gastos abaixo, deixando ainda 10% para o garçom:

- a) R\$ 8,80
- b) R\$ 9,02
- c) R\$ 19,80

### Exercício 2

Resolva o Exercício 1 aritmeticamente, completando a tabela dada na aula. Compare com as respostas encontradas naquele exercício.

### Exercício 3

Resolva o exercício 1 algebricamente, usando a equação que relaciona despesa e gasto no problema de gorjeta de 10%. Compare com as respostas dos exercícios anteriores.

### Exercício 4

Se eu decidisse deixar 20% de gorjeta para o garçom, em vez de 10%, quanto poderia ter de despesa?

- a) Solução aritmética:
- b) Solução algébrica:
- c) Solução gráfica:

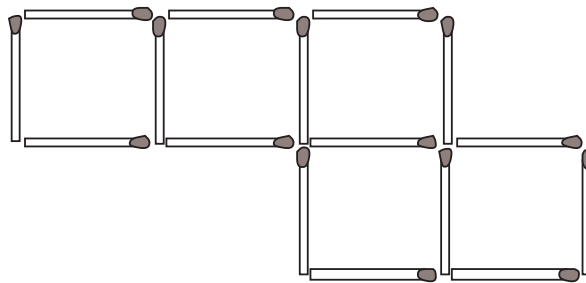
## Exercícios

# Equacionando os problemas

## Introdução

Nossa aula começará com um quebra-cabeça de mesa de bar – para você tentar resolver agora.

Observe esta figura feita com palitos de fósforo. Mova de lugar exatamente 2 palitos, de modo a transformá-la em 4 quadrados iguais, sem sobrar nenhum palito. Você pode fazer isso com palitos ou no desenho.



## Nossa Aula

Conseguiu resolver o quebra-cabeças? Não? Então, vamos resolvê-lo juntos, pelo caminho da matemática. Certos problemas não nos parecem, de início, “problemas de matemática” – mas, de repente, vemos que existe uma solução para eles que pode ser chamada de **solução matemática**. (Na realidade, o que existe na vida prática não são problemas de matemática – mas soluções matemáticas, criadas pelas pessoas para resolver problemas práticos).

O quebra-cabeça é um exemplo. A princípio, pode não estar bem claro qual matemática usar. Geometria? Aritmética? De fato, o quebra-cabeça envolve tanto figuras geométricas quanto números.

Se você ainda não conseguir resolvê-lo, talvez seja porque não tenha percebido que o quebra-cabeça tem dois aspectos: o **geométrico** e o **numérico**. Talvez também tenha lhe faltado equacionar o problema. Isto é: escolher quem será a incógnita – geralmente chamada de **x** – e escrever a equação satisfeita por essa incógnita. A partir daí – sempre deixando claro qual é a pergunta do problema –, basta resolver a equação: quer dizer, “encontrar o **x** do problema”, como se costuma dizer.

Quando conseguimos equacionar um problema, vemos claramente o que é conhecido (pela equação) e o que se procura (a incógnita). Assim, o caminho da solução, que leva de uma coisa à outra, muitas vezes salta aos olhos nesse equacionamento. Vejamos no quebra-cabeça.

## Equacionando o quebra-cabeça

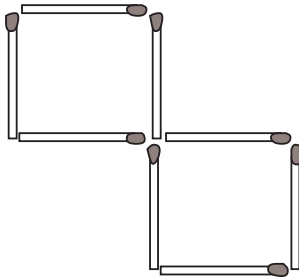
O que vemos na figura dada? Vemos 5 quadrados iguais. Eles estão unidos e são feitos com palitos de fósforo. O problema pede que os 5 quadrados se transformem em 4 quadrados iguais, só com o movimento de 2 palitos.

Que figura formarão, então, os 4 quadrados? Se soubermos isso, será bem mais fácil formar a tal figura... e o problema estará resolvido.

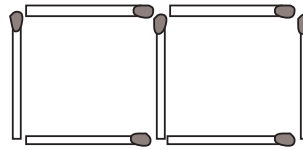
**Dois** quadrados juntos podem ser formados de um dos seguintes modos:

- a) os quadrados **não têm** lado (palito) comum; ou
- b) os quadrados **têm** um lado comum.

Qual a diferença importante no caso de quisermos formar uma ou outra destas figuras? Pense.



2 quadrados *com* lado comum



2 quadrados *sem* lado comum

A diferença é numérica: em **a)**, precisamos de 8 palitos; já em **b)**, precisamos de apenas 7 – pois “economizamos” um palito quando os quadrados são vizinhos, tendo um lado comum.

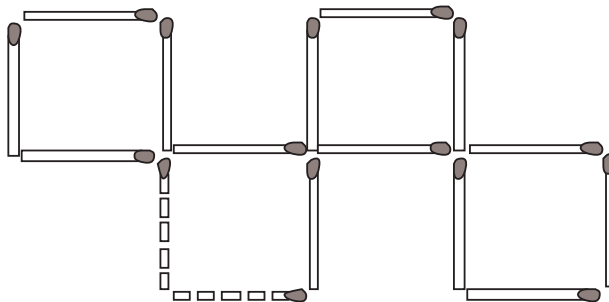
E no nosso caso? Queremos formar 4 quadrados, sem que sobrem palitos. Qual é a pergunta crucial aqui? Pense.

Isso mesmo! A pergunta é: “Quantos palitos temos?”

É só contar: temos 16 palitos. Se cada quadrado possui 4 palitos e queremos formar uma figura com 4 quadrados – desde que não permitamos que dois quadrados sejam vizinhos (“de parede”, isto é, de lado comum) – usaremos:

$$4 \times 4 = 16 \text{ palitos. Exatamente o que temos!}$$

Algumas tentativas irão lhe mostrar que, desenhando ou fazendo 4 quadrados com 16 palitos, o desenho que devemos procurar formar é este:



Está resolvido. Não lhe parece mais fácil, agora?

Pois então. Tudo teve uma seqüência muito natural, desde o momento em que equacionamos o problema, contando o número de palitos e tentando visualizar claramente o que havia sido pedido – neste caso, a forma da figura dos 4 quadrados.

### Equacionando um problema algébrico

Rigorosamente falando, equacionar um problema envolve escrever a equação (ou as equações) de modo que ela expresse em linguagem matemática o que foi dado no problema em linguagem comum.

Vejam, então, como fazer isso com problemas algébricos, ou melhor, com **problemas que admitem solução algébrica**.

#### EXEMPLO 1

Qual é o número cujo dobro, mais 5, é igual a 17?

Equacione o problema, chamando o número desconhecido de **x**. Vimos que não importa a letra que usamos para designar a incógnita, isto é, o número procurado – mas é universal o uso do **x**. O fato importante é que:

$$2x + 5 = 17$$

A partir daí, acharíamos **x**. (Você pode tentar, se quiser). Só que nesta aula estamos mais interessados no **equacionamento** dos problemas – que é a primeira etapa. Geralmente, essa é a etapa mais importante na resolução desses problemas.

Vamos relembrar os momentos fundamentais desse equacionamento.

- Quando encaramos o tal número procurado como a incógnita do problema, e o chamamos de **x**;
- Quando traduzimos em “matematuquês” o que está dado em português, ou seja, quando escrevemos a equação matemática que é satisfeita por essa incógnita. Neste exemplo, faríamos assim:

$$x = \text{número}$$

$$\text{O que sabemos: } 2x + 5 = 17$$

Para reconhecer **x**, é só resolver a equação. Encontra-se **x = 6**. Verifique.

Vamos ver outros exemplos de equacionamento de problemas. É interessante que você, em cada caso, experimente responder a estas duas perguntas do equacionamento, antes de continuar a leitura:

- a) O que é **x**, neste caso? (Qual é a incógnita?)
- b) O que sabemos sobre **x**? (Qual é a equação?)

## EXEMPLO 2

Quanto deve medir de lado (em km) um terreno quadrado, para que o número que vai expressar seu perímetro (em km) seja o mesmo que o número que expressa sua área (em km<sup>2</sup>)? Procure a solução!

Em primeiro lugar, vamos responder às duas perguntas principais do equacionamento:

a)  $x$  = lado

b) O que sabemos:  $4x = x$

perímetro                      área

Aqui, vamos lembrar que um número (ou incógnita) ao quadrado é esse número (ou incógnita) multiplicado por ele mesmo. Então:

$$4x = x \cdot x$$

E, logo, adivinhamos um número  $x$  que satisfaz esta equação. Qual é?

Ora até visualmente fica claro que a expressão  $4x = x$ , acima, é verdadeira quando substituímos  $x$  por 4, pois temos:

$$4 \cdot 4 = 4 \cdot 4$$

Portanto, se o lado do terreno quadrado for 4 quilômetros, satisfará o que é pedido.

Uma observação importante: a equação  $4x = x$  é uma equação de 2º grau. Por isso, (como recordaremos) deve ter outra raiz, ou seja, outro número para substituir o  $x$ . A outra raiz é zero, pois zero vezes qualquer número é zero. Mas, neste caso, o terreno teria lado nulo, quer dizer, não existiria. (Dizemos que, neste caso,  $x = 0$  é uma **solução degenerada**).

## EXEMPLO 3

- Qual o número cuja metade é a sexta parte de 42? E de 21?
- E qual o número cuja metade é a sexta parte de seu triplo?

A primeira pergunta é equacionada assim:

$$x = \text{número}$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{42}{6}$$

7  
1

A partir daí fica fácil: multiplicando os dois lados por 2, teremos  $x = 14$ .

A segunda pergunta é equacionada assim:

$$x = \text{número} \qquad 7$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{21}{6} \qquad 2$$

Logo, multiplicando os dois lados por 2, temos  $x = 7$ .

Já a terceira pergunta é bem diferente:

$$x = \text{número}$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{3x}{6} \text{ isto é, } x = x$$

Você pode dar exemplo de um número que pode substituir  $x$  e fazer a sentença ser verdadeira? Pense.

Claro: qualquer número serve! Pois  $x = x$  é verdadeiro para todo  $x$ , já que todo número é igual a si mesmo.

Assim,  $x = x$  não é propriamente uma equação. Dizemos que é uma **identidade**, pois é verdadeira para todo  $x$ .

#### EXEMPLO 4

O marcador de gasolina do meu automóvel apresenta um erro e desejo conhecê-lo. Assim, poderei compensá-lo nas próximas leituras do marcador. Há pouco ele marcava  $3/4$  do tanque, e precisei de 10 litros para enchê-lo completamente. A capacidade do tanque é de 50 litros. Qual o erro percentual que o marcador apresenta? Para mais ou para menos?

Qual deve ser a incógnita nesse problema: você diria que é o erro percentual procurado (quer dizer, quantos por cento do tanque)?

O primeiro cuidado do equacionamento é a escolha da incógnita, do  $x$ . Só é preciso bom-senso para se fazer essa escolha: por exemplo,  $x$  deve ser tal que saibamos **logo** usá-lo para escrever a equação do problema.

Assim, é mais razoável fazer da seguinte maneira:

$$x = \text{Volume que havia no tanque (litros)}$$

$$\text{O que sabemos: } x + 10 = 50$$

$$\text{Logo, } x = 40.$$

O que queremos saber:

- erro = ?
- erro percentual = ?%

Mas o volume que o tanque marcava era:

$$\frac{3}{4} \cdot 50 = 37,5$$

Assim:

$$\text{erro} = 40 - 37,5 = 2,5 \text{ (em 40 litros)}$$

Finalmente, em termos de erro percentual, precisamos fazer uma **regra de três**, procurando o erro não em 40, mas em 100 litros.

$$2,5 \text{ — } 40$$

$$y \text{ — } 100$$

Daí,

$$\frac{2,5}{y} = \frac{40}{100}$$

Então, multiplicando os dois lados por 100 y, temos:

$$(2,5) \cdot (100) = 40 y$$

Logo, dividindo por 40 e trocando os lados, temos que

$$y = \frac{250}{40} = 6,25 \text{ (em 100 litros)}$$

Concluimos que o erro percentual apresentado pelo marcador é de 6,25 litros em 100 litros, ou seja, **6,25%** para menos, pois ele marca menos do que devia.

Nesta página e nas seguintes estão alguns problemas para você equacionar, sem necessariamente resolvê-los.

Lembre-se dos dois pontos importantes do equacionamento! “Quais”?! É hora de revisão da aula...

### Exercício 1

Considere o seguinte problema: Subtraindo-se 4 de certo número e dividindo-se esse resultado por 2 e, depois, somando-se este novo resultado ao triplo daquele número, sabemos que o resultado é igual a  $\frac{4}{5}$  do número mais 7. Qual é o número?

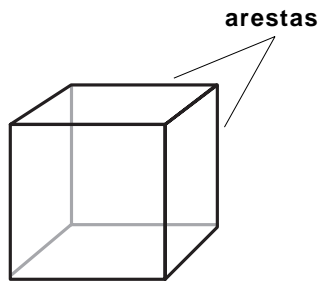
- Qual é a incógnita?
- Que equação ela satisfaz?
- O que o problema pede?

(Atenção: O exercício não pede para resolver o problema. Faça-o se quiser.)

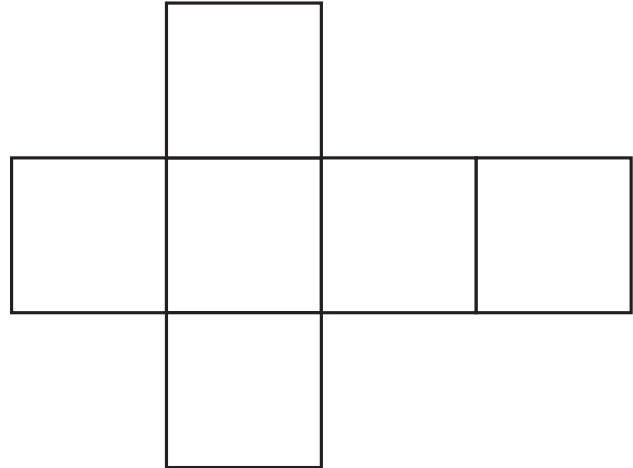
### Exercícios

### Exercício 2

- a) Faça o mesmo com este problema, parecido com o **Exemplo 2**, visto na aula. Quanto deve medir a aresta (em m) de um cubo, para que o número que expressa a área (em  $m^2$ ) da superfície lateral total do cubo (formada pelos 6 quadrados que o limitam) seja um número igual ao de seu volume (em  $m^3$ )?



cubo



superfície lateral do cubo

- b) Olhando para sua equação, que palpite você arriscaria para o tamanho da aresta procurada?

### Exercício 3

- a) Equacione o seguinte problema. A idade de um pai é o triplo da idade de seu filho e, ao mesmo tempo, o filho é 22 anos mais jovem que o pai. Quais as idades deles?  
Cuidado: há duas incógnitas! (Chame-as de  $x$  e  $y$ ). E há também duas equações.
- b) Observando atentamente as suas duas equações, você consegue descobrir  $x$  e  $y$ ? (Pense na diferença entre as idades, vendo-a de dois modos.)

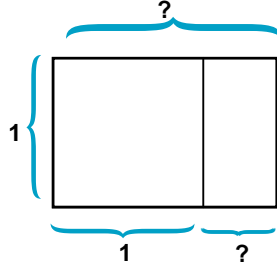
### Exercício 4

- a) Resolva o item a) do exercício anterior chamando as incógnitas de  $p$  e  $f$ . Compare as equações com aquelas equações anteriores: o que poderíamos dizer dos valores dessas incógnitas?
- b) Que letras você prefere para as incógnitas, neste problema? Por quê?

### Exercício 5

Equacione este problema, que trata do famoso **retângulo áureo**.

O lado menor de um retângulo mede 1 m, e o lado maior é desconhecido. Queremos que esse lado maior seja tal que, quando retirarmos um quadrado de lado 1 m do retângulo, sobre um retângulo semelhante ao retângulo grande – isto é, do mesmo formato que o retângulo grande, com os lados respectivamente proporcionais aos dele.



**Sugestão:** Chame de  $x$  a maior – ou a menor – das duas medidas desconhecidas, na figura. Agora interprete a proporcionalidade entre os lados do retângulo grande e do pequeno em termos de uma equação em  $x$ .

**Atenção:** A equação é de 2º grau. Deixe a resolução para o momento em que estiver lembrado esse assunto, em aulas futuras.

O retângulo áureo é igual a um quadrado unido a outro retângulo áureo menor (é importante na natureza, nas artes e na matemática).

# Resolvendo equações

## Introdução

À medida que os problemas se tornam mais complicados, o método algébrico vai se impondo naturalmente ao método aritmético. Resolver equações fará parte das nossas atividades diárias. Mas, o que significa resolver uma equação? Tomemos como exemplo esta equação:

$$\frac{x+4}{2} = 2x - 3 \quad | \quad 1$$

Não importa de que problema ela tenha vindo. Desejamos, antes de mais nada, responder à pergunta que fizemos.

Resolver uma equação significa encontrar um número tal que, se for colocado no lugar da letra  $x$ , torna a igualdade correta. Veja o que acontece se substituirmos  $x$  por 2.

$$\frac{x+4}{2} = 2x - 3 \quad | \quad 1$$

$$3 = -3 \rightarrow \text{errado!}$$

Logo,  $x = 2$  não é solução da nossa equação. Veja agora o que acontece se substituirmos  $x$  por 6.

$$\frac{6+4}{2} = 2x - 3 \quad | \quad 1$$

$$5 = 5 \rightarrow \text{certo!}$$

Portanto,  $x = 6$  é **solução** da nossa equação. Dizemos também que  $x = 6$  é **raiz** da equação dada.

É importante saber que  $x = 6$  é a **única** solução da equação do nosso exemplo. Você pode tentar substituir  $x$  por outros números; mas fique certo de que jamais encontrará outras igualdades corretas.

As equações que aprenderemos a resolver nesta aula são chamadas de **equações do primeiro grau**, ou seja, são equações em que a letra **x** não aparece elevada a nenhum expoente. Um fato importante relativo às equações de 1º grau é que:

**Toda equação de 1º grau possui uma solução.**

Inicialmente, vamos aprender a resolver equações do 1º grau. Não nos importará, portanto, de quais problemas elas vieram.

Nossa aula

### EXEMPLO 1

Resolva a equação  $2x + 3(x - 2) = 7x - 34$ .

Neste primeiro exemplo, não há denominadores. Então, a primeira coisa a fazer é eliminar os parênteses. Observe que na multiplicação  $3(x - 2)$ , o número 3 multiplica todos os termos que estão dentro do parênteses, ou seja:

$$3(x - 2) = 3x - 3 \cdot 2$$

Voltemos, então, à equação dada.

$$\begin{aligned} 2x + 3(x - 2) &= 7x - 34 \\ 2x + 3x - 3 \cdot 2 &= 7x - 34 \\ 2x + 3x - 6 &= 7x - 34 \end{aligned}$$

Agora, todos os termos que contêm a letra **x** devem ser transportados para o lado esquerdo. Observe, então, a mudança do sinal dos termos que trocaram de lado.

$$2x + 3x - 7x = 6 - 34$$

Continuamos fazendo as contas:

$$\begin{aligned} 2 + 3 - 7 &= -2 \text{ do lado esquerdo e} \\ 6 - 34 &= 28 \text{ do lado direito.} \end{aligned}$$

Temos então:

$$-2x = -28$$

É conveniente trocar os sinais dos dois lados:

$$2x = 28$$

e dividir os dois membros por 2 para obter o valor de **x**.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2} &= \frac{28}{2} \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Está resolvida, assim, a nossa equação. Se quisermos conferir se a solução é realmente a que encontramos, devemos substituir **x** por **14** na equação dada.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 14 + 3(14 - 2) &= 7 \cdot 14 - 34 \\ 28 + 36 &= 98 - 34 \\ 64 &= 64 \end{aligned}$$

Está certo. A raiz da equação dada é realmente  $x = 14$ .

## EXEMPLO 2

Como resolver a equação abaixo?

$$\frac{x-4}{2} + 3x = \frac{4x}{5} + 7$$

Neste exemplo, a equação possui **denominadores**.

Portanto, a primeira coisa a fazer, neste caso, é eliminar esses denominadores. Para isso, buscamos um número que seja múltiplo de todos os denominadores e multiplicamos **todos** os termos da equação por esse número.

No nosso caso, os denominadores são **2** e **5**. Como 10 é múltiplo de 2 e de 5, vamos multiplicar por 10 todos os termos dessa equação.

$$10 \cdot \frac{(x-4)}{2} + 10 \cdot 3x = 10 \cdot \frac{4x}{5} + 10 \cdot 7$$

Fazemos agora as simplificações:

$$\cancel{10}^5 \cdot \frac{(x-4)}{\cancel{2}_1} + 10 \cdot 3x = \cancel{10}^2 \cdot \frac{4x}{\cancel{5}_1} + 10 \cdot 7$$

$$5(x-4) + 30x = 8x + 70$$

Agora não há mais denominadores. Logo, podemos resolver essa equação do mesmo modo que fizemos no primeiro exemplo.

$$\begin{aligned} 5x - 20 + 30x &= 8x + 70 \\ 5x + 30x - 8x &= 70 + 20 \\ 27x &= 90 \end{aligned}$$

$$\frac{27x}{27} = \frac{90}{27}$$

$$x = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 9}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Portanto, a solução da equação dada é  $x = \frac{10}{3}$

Vamos agora resolver alguns problemas com o auxílio da álgebra.

Em cada um deles vamos tentar, a partir do enunciado, obter uma equação e, em seguida, resolvê-la.

Um feirante levou 60 mamões para vender na feira. Começou vendendo cada um por 50 centavos. Depois, como a venda estava fraca, baixou o preço para 30 centavos e vendeu todos os outros. Sabendo que ele arrecadou R\$ 22,80, quantos mamões ele vendeu pelo preço mais caro?

Digamos que seja  $x$  o número de mamões que ele vendeu pelo preço mais caro. Como cada uma dessas frutas foi vendida por R\$ 0,50 então, na primeira parte da venda ele arrecadou  $0,50 \cdot x$ .

Quantos mamões sobraram?

Se ele tinha inicialmente 60 mamões e vendeu  $x$  mamões, então sobraram **60 - x mamões**. Como cada um deles foi vendido por R\$ 0,30, então, na segunda parte da venda o feirante arrecadou **0,30 (60 - x)**.

Se ele arrecadou no total R\$ 22,80, nossa equação é:

$$0,50 \cdot x + 0,30 (60 - x) = 22,80$$

Vamos agora resolver essa equação. Observe inicialmente que, na parte decimal de um número, o zero colocado à direita pode ser dispensado. Ficamos então com:

$$0,5 \cdot x + 0,3 (60 - x) = 22,8$$

Para evitar trabalhar com decimais, multiplicamos todos os termos da equação por 10.

$$5x + 3 (60 - x) = 228$$

Agora fica fácil:

$$5x + 3 \cdot 60 - 3x = 228$$

$$5x + 180 - 3x = 228$$

$$5x - 3x = 228 - 180$$

$$2x = 48$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{48}{2}$$

$$x = 24$$

Portanto, o feirante vendeu 24 mamões pelo preço mais caro.

## EXEMPLO 4

Uma caixa com 30 lápis custa R\$ 4,80. Quanto deverá custar uma outra com 40 lápis?

Este é um problema de regra de três. Problemas como esse são muito frequentes em nossa vida. Observe como organizamos os dados no quadro montado abaixo.

preço	→	4,80	x
quantidade	→	30	40

Para resolver o problema, montamos a equação

$$\frac{4,80}{30} = \frac{x}{40}$$

Por que fazemos isso? É simples. Vamos pensar no significado de cada fração. Repare que, dividindo o preço da caixa pela quantidade de lápis, estamos calculando **quanto custa cada lápis**. Se o preço de um lápis é o mesmo nas duas caixas, as duas frações devem ser **iguais**. Resolver essa equação é fácil. Basta multiplicar por 40 os dois lados.

$$40 \cdot \frac{4,80}{30} = 40 \cdot \frac{x}{40}$$

Daí,

$$x = \frac{40 \cdot 4,80}{30} = 6,4$$

Logo, a caixa maior **deverá** custar **R\$ 6,40**.

**Comentário:** freqüentemente, encontramos no mercado um mesmo produto em embalagens diferentes e com preços diferentes. Nesse caso, é preciso saber qual das embalagens é mais econômica.

Por exemplo, se uma caixa com 30 lápis custa R\$ 4,80 e outra com 40 lápis custa R\$ 6,10, o problema que acabamos de resolver nos mostra que devemos preferir a segunda. Na caixa maior, o preço de cada lápis é certamente menor.

### EXEMPLO 5

João recebeu seu salário e verificou que:

- a quarta parte do dinheiro ele gastou com aluguel e pagamento das contas;
- a terça parte gastou no supermercado;
- restaram-lhe R\$ 100,00 para todas as outras despesas.

Qual é o salário de João?

Vamos chamar de **x** o salário de João. Agora, vamos somar o que ele pode gastar com outras despesas. Essa soma é o salário de João. Então:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 100 = x$$

Para resolver essa equação, vamos eliminar os denominadores, multiplicando todos os termos por 12.

$$12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot 100 = 12 \cdot x$$

Simplificando, temos:

$$3x + 4x + 1200 = 12x$$

Passando todos os termos que contêm  $x$  para um mesmo lado, ficamos com:

$$1200 = 12x - 3x - 4x$$

$$1200 = 12x - 7x$$

$$1200 = 5x$$

$$5x = 1200$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{1200}{5}$$

$$x = 240$$

Concluimos que o salário de João é de **R\$ 240,00**.

Observe agora o próximo exemplo para aprender algo diferente sobre as equações.

### EXEMPLO 6

Antônio, Bruno e Carlos são irmãos. Sabe-se que Bruno é dois anos mais velho que Antonio e que Carlos é três anos mais velho que Bruno. Se a soma das idades de Antonio e Carlos é o dobro da idade de Bruno, calcule as idades dos 3 irmãos.

Vamos chamar de  $x$  a idade de Antônio. Como Bruno é 2 anos mais velho, a sua idade será  $x + 2$ . E já que Carlos é três anos mais velho que Bruno, a idade de Carlos será  $x + 2 + 3 = x + 5$ . Resumindo:

Antônio	Bruno	Carlos
$x$	$x + 2$	$x + 5$

Como a soma das idades de Antônio e Carlos é o dobro da idade de Bruno, temos a seguinte equação:

$$x + x + 5 = 2(x + 2)$$

Vamos resolver como já aprendemos

$$x + x + 5 = 2x + 4$$

$$5 - 4 = 2x - x - x$$

$$1 = 0$$

Mas isto é um absurdo! Certamente que 1 não é igual a zero. Qual é o significado do que aconteceu?

Vamos explicar. Chegamos à equação:

$$5 - 4 = 2x - x - x$$

que é equivalente a

$$1 = (2 - 1 - 1) x$$

ou, ainda,

$$1 = 0 \cdot x$$

Essa é uma equação **impossível**, uma vez que não existe nenhum valor para  $x$  que torne a igualdade verdadeira. Isso quer dizer que o problema proposto é impossível, ou seja, **nunca** a soma das idades de Antônio e Carlos será o dobro da idade de Bruno.

**É importante saber que muitos problemas não possuem solução. Dizemos então que são problemas impossíveis, isto é, que a situação apresentada por eles nunca ocorrerá.**

## Exercícios

### Exercício 1

Resolva as equações abaixo:

a)  $3x + 4 = 25$

b)  $5(x - 1) - 19 = 3(x - 2)$

c)  $\frac{2x}{3} + \frac{x - 2}{6} = 8$

d)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 1$

### Exercício 2

A soma de um número com o dobro do consecutivo dele dá 74. Qual é esse número?

### Exercício 3

Antônio, Bruno e Carlos são irmãos. Sabe-se que Bruno é 2 anos mais velho que Antônio e que Carlos é 3 anos mais velho que Bruno. Se a soma das idades dos três irmãos é 55, calcule as idades de cada um deles.

### Exercício 4

Em certo mercado, uma caixa com uma dúzia de ovos custa R\$ 2,80 e uma outra com 18 ovos custa R\$ 4,00. Qual das duas embalagens é mais econômica?

### Exercício 5

Cada banco de um ônibus possui dois lugares. Entraram 50 passageiros nesse ônibus, mas 14 tiveram de viajar em pé. Quantos bancos tem o ônibus?

### Exercício 6

Pai e filho têm 31 e 8 anos. Daqui a quantos anos o pai terá o dobro da idade do filho?

### Exercício 7

Uma escola tem apenas turmas de 5ª, 6ª e 7ª séries. A metade dos alunos está na 5ª série. A terça parte dos alunos está na 6ª série e 32 alunos estão na 7ª série. Quantos alunos tem a escola?

### Exercício 8

Maria saiu de casa com algum dinheiro. Comprou uma camiseta por R\$ 6,00 e gastou a quarta parte do restante num lanche. Se Maria voltou para casa com metade do dinheiro que tinha, calcule que quantia ela levava quando saiu de casa.

# A álgebra nas profissões

Nesta aula, você vai perceber que, em diversas profissões e atividades, surgem problemas que podem ser resolvidos com o auxílio da álgebra. Alguns problemas são tão freqüentes que existem fórmulas prontas para sua rápida resolução. Outros, por não serem tão freqüentes, vão necessitar de maior raciocínio e criatividade. Mas, em todos eles, você poderá perceber a força dessa nova ferramenta que é a **álgebra**.

## Introdução

### A álgebra na medicina

### Nossa aula

Na medicina, os médicos utilizam muitas fórmulas matemáticas. Principalmente para calcular as quantidades certas de remédios que devem ser dados aos doentes e para outros cálculos. São fórmulas que não podemos entender porque não somos médicos. Mas existem algumas que são simples e úteis para todos, como esta que vamos mostrar agora.

#### EXEMPLO 1

Como calcular a altura de uma criança?

A altura de uma criança depende de sua idade e de muitos outros fatores. Entretanto, os médicos examinaram uma quantidade muito grande de crianças brasileiras e tiraram uma média (no exercício 1 vamos lembrar o que é isso). Essa pesquisa deu origem a uma fórmula que você mesmo pode usar para verificar o desenvolvimento dos seus filhos. A fórmula – que vale para crianças de 4 a 13 anos – é a seguinte:

$$y = 5,7 \cdot x + 81,5$$

Nessa fórmula:

- $x$  é a idade da criança (em anos)
- $y$  é a altura da criança (em centímetros)



Por exemplo, se uma criança tem 5 anos podemos calcular sua altura, substituindo o  $x$  da fórmula por 5.

Veja:

$$\begin{aligned}y &= 5,7 \cdot 5 + 81,5 \\y &= 28,5 + 81,5 \\y &= 110 \text{ cm}\end{aligned}$$

O resultado indica que, em geral, as crianças de 5 anos devem estar medindo por volta de 110 cm de altura. Em geral, como o desenvolvimento da criança depende de outros fatores, como a altura dos pais, a alimentação etc., são consideradas crianças normais as que tiverem altura até 10 cm a mais ou a menos que o valor dado pela fórmula.

### Para você saber mais

Cada criança tem seu jeito de crescer. Em geral, as meninas crescem de forma muito próxima aos valores dados pela fórmula. Já os meninos crescem um pouco menos dos 10 aos 12 anos e passam a crescer mais depois dos 12 anos.

Com a fórmula que apresentamos, você pode fazer previsões. Suponha que uma menina tenha 115 cm de altura aos 5 anos. Essa criança tem, portanto, 5 cm a mais que o valor dado pela fórmula. Se tudo correr normalmente, essa diferença deve se manter (ou até aumentar um pouco) ao longo dos anos. Assim, se você quiser saber que altura ela terá aos 10 anos, aplique a fórmula e acrescente esses 5 centímetros.

### A álgebra em uma pequena empresa

Mesmo em pequenas empresas surgem frequentemente problemas relacionados com a produção, com os custos, com os investimentos, com a divisão dos lucros etc. Vamos mostrar um deles e sua solução, com o auxílio da álgebra.

#### EXEMPLO 2

Como fazer uma divisão proporcional?

Em uma confecção trabalham 16 costureiras, 2 supervisoras e 1 diretora. Cada supervisora ganha 25% a mais que uma costureira, e a diretora ganha 50% a mais que uma costureira. Todos os meses, uma pequena parte do faturamento é colocada numa poupança para ser distribuída no fim do ano. É a “caixinha do Natal”. Pois bem, no fim do ano, essa poupança tinha R\$ 1.440,00. Como deveremos fazer a distribuição dessa caixinha mantendo-se a mesma proporção dos salários?

Temos aqui uma excelente oportunidade para usarmos a álgebra. Como já vimos nas aulas anteriores, é preciso escolher o significado da nossa **incógnita**.

Vamos então representar com a letra  $x$  a quantia que cada costureira deverá receber.

Cada supervisora ganha 25% a mais que uma costureira. Portanto, cada uma receberá:

$$\begin{aligned}x + 25\% \text{ de } x &= x + \frac{25}{100} \cdot x \\&= x + 0,25 \cdot x \\&= (1 + 0,25) x \\&= 1,25x\end{aligned}$$

A diretora ganha 50 % a mais que uma costureira. Portanto, ela receberá:

$$\begin{aligned}x + 50\% \text{ de } x &= x + \frac{50}{100} \cdot x \\&= x + 0,5 \cdot x \\&= (1 + 0,5) x \\&= 1,5x\end{aligned}$$

Veja, então, o resumo no quadro abaixo.

16 costureiras	→	16 · x
2 supervisoras	→	2 · 1,25 · x
1 diretora	→	1,5 · x

Vamos somar tudo e igualar o resultado ao total da poupança:

$$16 \cdot x + 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,5x = 1440$$

Para encontrar o valor de x basta, então, resolver essa equação. Observe:

$$\begin{aligned}16x + 2,5x + 1,5x &= 1440 \\(16 + 2,5 + 1,5)x &= 1440 \quad (\text{x em evidência}) \\20x &= 1440 \\ \frac{20x}{20} &= \frac{1440}{20} \quad (\text{dividindo por 20}) \\x &= 72\end{aligned}$$

Portanto, cada costureira deverá receber R\$ 72,00. O resto é fácil.

$$\begin{aligned}1,25 \cdot x &= 1,25 \cdot 72 = 90 \\1,5 \cdot x &= 1,5 \cdot 72 = 108\end{aligned}$$

Assim, cada supervisora deverá receber R\$ 90,00 e a diretora, R\$ 108,00. Foi feita então a **divisão proporcional** da caixinha do Natal.

## A álgebra na carpintaria

Será que a álgebra tem vez em uma simples carpintaria?

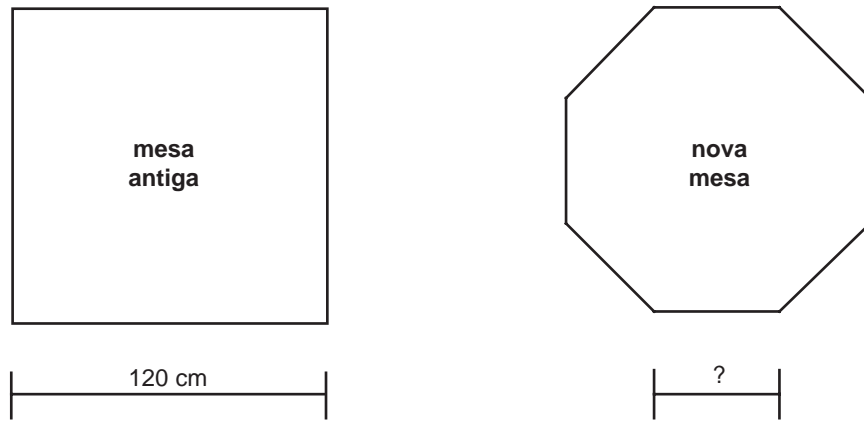
Tem sim. Existem problemas que o marceneiro pode resolver de forma muito eficiente com auxílio da álgebra. Vamos ver um deles.

EXEMPLO 3

O corte está no lugar certo?

Certo dia, um marceneiro recebeu a seguinte tarefa: cortar os cantos de uma mesa quadrada, que tinha 120 cm de lado, para transformá-la em uma outra com **8 lados iguais**.

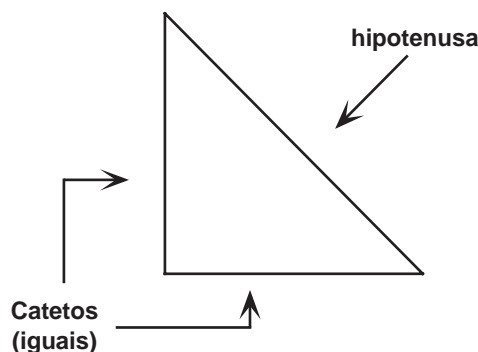
Observe, nas figuras abaixo, o problema do marceneiro.



Repare que o problema de transformar a mesa quadrada em outra, com 8 lados iguais, não é um problema fácil. Os cortes precisam ser feitos em lugares certos. Se não, o marceneiro corre o risco de estragar a mesa. Como fazer, então, os cortes perfeitos?

Acompanhe o raciocínio do marceneiro e, mais uma vez, a utilidade da álgebra.

As partes que serão eliminadas da mesa quadrada são triângulos retângulos com dois lados iguais. Eles se chamam **catetos**. O lado maior, onde será feito o corte, chama-se **hipotenusa**.



Para observar direito esse triângulo, ele fez um desenho grande de um triângulo desse tipo, com catetos de 1 m de comprimento, e mediu a hipotenusa.

