Références sciences

Jeux et graphes

La théorie des graphes de 5 à 95 ans

2e édition

Alain Busser

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-101494
Dépôt légal : mars 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2025
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Préface

Que l'on s'intéresse aux mathématiques ou à l'informatique, les occasions sont nombreuses pour rencontrer et étudier les graphes. Ils sont tout d'abord des outils remarquables pour représenter des choses (un cube, l'ensemble de ses amis sur un réseau social, un plan...) et leur évolution (comme par exemple la description d'un système informatique sous forme d'un ou plusieurs automates). Ils permettent une description précise et formelle, sur laquelle on peut ensuite raisonner pour prouver des propriétés du système de départ. Et justement, leur puissance réside dans le fait que la théorie des graphes est riche de nombreux résultats que l'on peut utiliser pour étudier nos graphes.

Quand Alain Busser m'a demandé de rédiger cette préface, je me suis d'abord demandé « pourquoi moi » ? Nous sommes clairement en de bons termes les graphes et moi, mais je pense sincèrement qu'il y a plus expert.e. Et puis j'ai commencé à lire le livre, et j'ai compris que sa nouveauté ce n'était pas tant les graphes, mais la façon de les aborder.

Ce livre nous propose tout d'abord un voyage, dans le temps et dans l'espace, à la rencontre de ceux et celles qui ont découvert l'intérêt des graphes et en ont fait un sujet d'études. On peut remonter jusqu'à l'Antiquité romaine au travers de jeux de poursuite, et se promener au fil des âges et des problèmes étudiés de Bâle à Saint-Petersbourg en suivant Leonhard Euler, avec des détours par le Royaume-Uni d'Alan Turing, ou en ajoutant du hasard aux déplacements dans la Russie d'Andreï Markov. On va de jeux transmis depuis l'Antiquité aux découvertes d'enfants du XXIe siècle.

Ce voyage se fait au travers de problèmes concrets : une promenade dans la ville de Königsberg, ou encore réfléchir au nombre de poignées de mains échangées lors d'une fête. Ils peuvent avoir l'air futiles, mais ont, comme le montre ce livre, des applications importantes et utiles qu'on ne soupçonne pas au premier abord.

Mais le domaine d'application principal illustré dans ce livre, ce sont les jeux. Ils sont partout et nous guident pendant la lecture, que l'on a envie de mettre en pause le temps de les tester. Les graphes ne sont pas illustrés par des jeux, mais ils sont au service des jeux. On découvre des notions quand on en a besoin, on y revient quand les jeux le demandent. Les graphes servent non seulement de support, pour montrer où l'on peut mettre des pions et matérialiser les déplacements possibles, mais ils sont également un outil pour décrire les parties, en prenant maintenant les configurations en guise de sommets, et comme arcs les coups possibles qui nous font passer d'une configuration à une autre.

C'est alors l'analyse de ce graphe des parties qui permet de déterminer les situations gagnantes et les éventuelles stratégies.

Les jeux présentés sont très variés. Le livre permet de découvrir des jeux, oubliés depuis des siècles ou peu connus, et donne envie d'en savoir plus sur eux. Mais on y retrouve des jeux plus classiques, comme le Sudoku, décrit avec un graphe, ou différents jeux de Nim, en abordant les stratégies gagnantes et découvrant leur origine.

Ce livre peut intéresser les novices en graphes, pour qui les exemples de jeux rendent concrètes les notions introduites, ainsi que les personnes ayant déjà des notions et qui y trouveront des applications et illustrations nouvelles. Il pourra également s'avérer très précieux pour les enseignants, car il contient notamment un important catalogue de jeux directement utilisables avec leurs élèves. L'étude des graphes n'est certes pas au programme de primaire :o) mais permet de travailler des compétences au cœur des apprentissages à tout âge, comme le fait de raisonner, d'expliquer ses solutions, d'analyser celles de ses camarades et bien d'autres.

Sur ce je vous laisse (re)découvrir des résultats sur les graphes, tout en retrouvant votre âme d'enfant pour vous laisser emporter et émerveiller par tous les jeux présentés. À vos crayons. Prêts ? Jouez !

Marie Duflot-Kremer
maître de conférences en informatique
à l'Université de Lorraine
lauréate du prix Serge Hocquenghem 2018

Avant-propos

Il faisait plutôt frais ce vendredi de mars 2018 à Grand-Ilet dans le cirque de Salazie. Il faut dire que même sous les tropiques, en montagne, la fraîcheur est souvent de mise. D'autant que rapidement le brouillard s'est transformé en pluie.

J'accompagnais alors la caravane de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), qui allait d'établissement scolaire en établissement scolaire, comme à chaque semaine des mathématiques, pour y présenter la collection de jeux de l'IREM de La Réunion, collection riche en graphes. Les élèves de l'école élémentaire, répartis en petits groupes, circulaient d'atelier en atelier, selon un planning rigoureusement établi par les enseignants.

Lorsque la pluie cessa de tomber, toute une classe de Grande Section s'est dirigée, par erreur, vers les graphes à colorier. J'ignorais alors qu'à l'âge de 5 ans, on est bien trop jeune pour comprendre les subtilités de la théorie des graphes. Les élèves de Grande Section l'ignoraient aussi. L'Atsem (assistant d'école maternelle) qui les accompagnait l'ignorait aussi.

Lorsque le directeur de l'école a réalisé que des élèves de l'école maternelle avaient pris la place du groupe de l'école élémentaire dont c'était le tour de passage, il était trop tard : les élèves de 5 ans s'étaient déjà approprié ces notions pour lesquelles ils étaient censés être trop jeunes.

L'émerveillement que cet évènement a suscité mérite d'être partagé. C'est pour cela que j'ai décidé d'écrire un livre à ce sujet. Le voici.

Depuis la publication de cette première édition, d'autres expériences ont été menées avec des graphes dans des classes allant de la Moyenne Section de Maternelle jusqu'au post-bac, en particulier sur le calcul par réseaux de Petri, les jeux Hex et Y vus comme jeux de coloriage (à partir de la Moyenne Section), l'exploration du jeu de Lewthwaite en Petite Section de Maternelle, l'étude du problème du voyageur de commerce en Grande Section de Maternelle, et une amélioration du jeu des deux parkings.

Remerciements

L'auteur tient à remercier Alice et Bob de nous divertir sans cesse par leur affrontement cryptographique (et ici sur des graphes). L'auteur remercie également Carole, Daisy, Eva, Fey, Guy et Nirina pour avoir bien voulu jouer sur des graphes et laissé l'auteur analyser et raconter ces jeux.

L'auteur remercie également Claude Gaspard Bachet, Leonhard Euler, Rowan Hamilton, Sam Lloyd, Édouard Lucas, Charles Bouton, Claude Shannon, David Gale, Richard Guy, M. Lewthwaite, John Conway, Simon Norton, Colin Vout et Nirina pour avoir inventé ces jeux si élégants.

L'auteur remercie les membres de la commission Villani-Torossian pour avoir rappelé l'importance pédagogique du jeu, l'intérêt que présentent les phases de manipulation et d'abstraction et pour avoir exprimé la volonté de concentrer les efforts de sauvetage de l'enseignement des mathématiques sur le premier degré.

L'auteur remercie Marie Duflot-Kremer et pas seulement pour la rédaction de la préface : trouver chez une même personne l'enthousiasme, l'innovation et la confiance en le génie créateur des enfants, est le signe que l'inspiration continuera probablement encore longtemps à produire des choses aussi impressionnantes.

L'auteur remercie Dominique Tournès, Franck Jean-Albert, Gérard Kuntz, Marie Duflot-Kremer et Patrice Debrabant pour le travail de relecture, en espérant que cela n'a pas réellement été un travail.

L'auteur remercie enfin Nirina pour l'avoir réconcilié avec la vie : merci pour tous ces *satori*, en particulier ce graphe dessiné en moins d'une minute à l'âge de 6 ans :

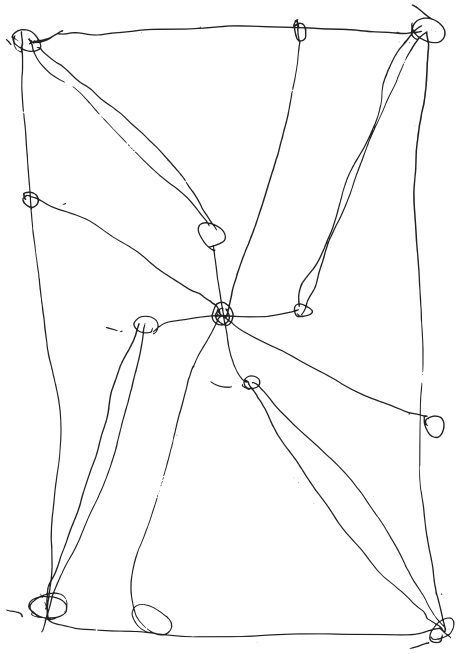


Table des matières

1 Vocabulaire **11**
1.1 Définitions . . . 11
1.1.1 Sommets . . . 11
1.1.2 Graphes . . . 12
1.1.3 Connexité . . . 16
1.1.4 Coloration . . . 16
1.2 Polyèdres . . . 17
1.2.1 Tétraèdre . . . 18
1.2.2 Octaèdre . . . 19
1.2.3 Cube . . . 19
1.2.4 Prismes . . . 20
1.2.5 Solides de Kuratowski . . . 20

2 Coloriage **23**
2.1 Planarité . . . 23
2.1.1 Définition . . . 23
2.1.2 Théorème de Kuratowski . . . 24
2.2 Le jeu de Snort . . . 25
2.2.1 Simon Norton . . . 25
2.2.2 Règle du jeu . . . 25
2.2.3 Analyse du jeu . . . 27
2.3 Le jeu de Col . . . 28
2.3.1 Colin Vout . . . 28
2.3.2 Règle du jeu . . . 28
2.3.3 Exemple . . . 29
2.3.4 Analyse du jeu . . . 30
2.4 Nombre chromatique . . . 31
2.4.1 Coloration propre . . . 32
2.4.2 Nombre chromatique d'un graphe . . . 32
2.4.3 Nombre chromatique plus grand que 4 . . . 42
2.5 Sudoku . . . 44

3 Parcours **45**
3.1 Hamilton . . . 45
3.1.1 De Bâle jusqu'à Saint-Pétersbourg . . . 45
3.1.2 Le parcours du cavalier . . . 45
3.1.3 Le graphe du dodécaèdre . . . 51
3.1.4 Le jeu icosien . . . 52
3.1.5 Parcours hamiltonien . . . 52
3.2 Euler . . . 54
3.2.1 Halte à Kaliningrad . . . 54
3.2.2 Théorème d'Euler . . . 56
3.2.3 Le lemme des poignées de mains . . . 57
3.3 Markov . . . 58
3.3.1 Jouer avec un dé . . . 58
3.3.2 Chaîne de Markov . . . 61
3.3.3 Arbres pondérés . . . 66

4 Embouteillages **69**
4.1 Jeux de poursuite . . . 69
4.1.1 Principe . . . 69
4.1.2 Degré d'un sommet . . . 71
4.1.3 Exemples . . . 72
4.1.4 Jeux antiques . . . 74
4.1.5 Le jeu militaire . . . 77
4.1.6 Madelinette . . . 80
4.2 Jeux d'inspiration malayo-polynésienne . . . 84
4.2.1 Un graphe historique . . . 84
4.2.2 Le jeu des deux châteaux . . . 85
4.2.3 De Madagascar à Hawai'i . . . 90
4.3 Taquins . . . 94
4.3.1 Les jeux de M. Fleury . . . 95
4.3.2 Taquin sur graphe . . . 96
4.3.3 Sliding tokens . . . 103

5 Distances **107**
5.1 Définitions . . . 107
5.1.1 Longueur d'un chemin . . . 107
5.1.2 Excentricité d'un sommet . . . 110
5.1.3 Rayon et diamètre . . . 112
5.1.4 Sommets particuliers . . . 113
5.2 Graphes pondérés . . . 114
5.2.1 Dijkstra . . . 115
5.2.2 Le voyageur de commerce . . . 117

6 Jeux de type Nim **119**
6.1 Exemples . . . 119
6.1.1 Jeu de Nim . . . 119
6.1.2 Jeu de la soustraction . . . 122
6.1.3 Graphes orientés . . . 123
6.1.4 Départ et arrivées . . . 124
6.2 Théorie de Sprague et Grundy . . . 128
6.2.1 Stratégie gagnante . . . 128
6.2.2 Stratégie de Grundy . . . 129
6.3 Avec plusieurs pions . . . 130
6.3.1 Un seul pion maximum par sommet . . . 130
6.3.2 Plusieurs pions possibles par sommet . . . 133
6.3.3 Annihilation de pions . . . 135

7 Réseaux de Petri **137**
7.1 Théorie de Petri . . . 137
7.1.1 Places et transitions . . . 137
7.1.2 Jetons . . . 138
7.2 Jeux sur réseaux de Petri . . . 140
7.2.1 Règle du jeu . . . 140
7.2.2 Un exemple . . . 140
7.2.3 Autres exemples . . . 144
7.3 Analyse d'un jeu sur réseau de Petri . . . 149

8 Automates et programmes **153**
8.1 Automates . . . 153
8.1.1 Automates en tant que réseaux de Petri . . . 153
8.1.2 Automates en tant que graphes orientés étiquetés . . . 153
8.1.3 Remarques historiques . . . 155
8.1.4 Jeu sur automate . . . 157
8.2 Exemples d'automates . . . 158
8.2.1 Automates de Kleene . . . 158
8.2.2 Automates de Mealy . . . 163
8.3 Programmes de calcul . . . 169
8.3.1 Exemples . . . 169
8.3.2 Le jeu d'Isbell . . . 174
8.4 Programmes et organigrammes . . . 176
8.4.1 Machines de Turing . . . 176
8.4.2 Turing après la guerre . . . 177

9 Destruction de graphes **179**
9.1 Jeux de coloriage . . . 179
9.1.1 Jeu de Snort . . . 179
9.1.2 Jeu de Col . . . 183
9.2 Hackenbush . . . 186
9.3 Bridg-it . . . 189

9.3.1 Le jeu de Gale . . . 189
9.3.2 Switching game . . . 192

10 Construction de graphes **199**
10.1 Degré des sommets . . . 199
10.1.1 Suite graphique . . . 201
10.1.2 Hashiwokakero . . . 202
10.2 Sprouts . . . 203
10.2.1 Lucasta . . . 203
10.2.2 Sprouts à l'école . . . 210

11 Fonctions **215**
11.1 Relations . . . 215
11.1.1 Diagramme sagittal . . . 215
11.1.2 Applications et fonctions . . . 218
11.1.3 Fonctions et automates . . . 220
11.2 Flow programming . . . 223
11.2.1 Fonctions . . . 223
11.2.2 Relations . . . 223
11.2.3 Opérations . . . 224
11.2.4 Au brevet des collèges . . . 226
11.3 Remarque . . . 228
11.4 Conclusion . . . 228

12 Conclusion et annexes **229**
12.1 Conclusion . . . 229
12.2 Annexes . . . 230

Bibliographie **237**

Index **239**

Chapitre 1

Vocabulaire

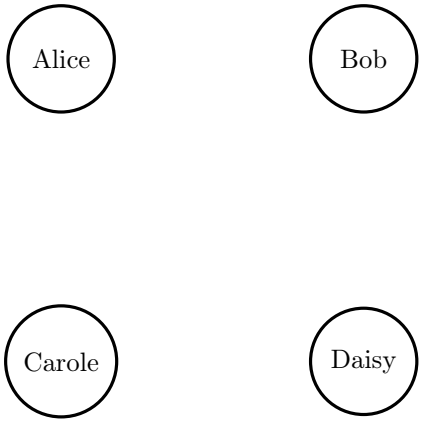
1.1 Définitions

1.1.1 Sommets

La première chose dont on a besoin pour définir un graphe, c'est un ensemble d'objets (ou de personnes) qu'on va appeler ***les sommets du graphe***. Par exemple les positions d'un jeu peuvent être les sommets du graphe de ce jeu ; des villes peuvent être sommets d'un réseau routier les joignant...

Typiquement les sommets d'un graphe seront les endroits où l'on place les pions.

Voici par exemple un graphe montrant les 4 membres d'une équipe :

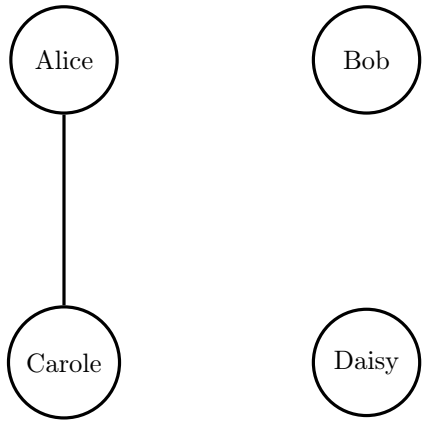


Le seul fait de savoir que l'équipe est formée d'Alice, Bob, Carole et Daisy, ne suffit pas cependant à faire du diagramme ci-dessus, un graphe : il faut aussi dire quels sommets sont en relation avec quels autres sommets. Ce genre d'information permet par exemple de savoir à côté de qui on assied chaque membre de l'équipe lors d'un repas, qui on va faire travailler avec qui dans le travail en équipe, etc.

1.1.2 Graphes

Arêtes

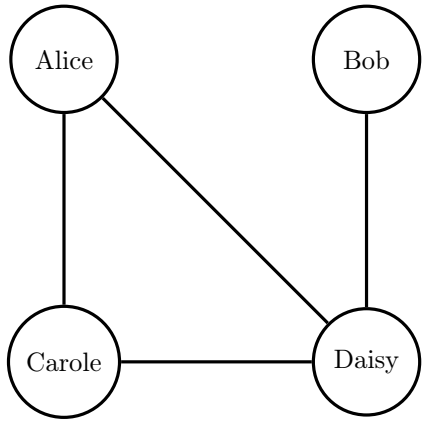
On propose de matérialiser les relations entre membres de l'équipe par des traits joignants les membres qui sont en relation et uniquement ceux-là. On appelle ces traits des ***arêtes*** du graphe. Par exemple, si Alice est amie avec Carole, on trace un trait entre les sommets représentant Alice et Carole :



On dit que deux sommets sont ***adjacents*** s'il y a une arête les joignant. Dans un réseau social, l'adjacence représente la relation d'amitié entre personnes.

Typiquement, les arêtes seront les lignes le long desquelles glissera un pion au cours d'un coup du jeu.

Alice n'est pas très amie avec Bob [1]. Carole non plus. Mais Daisy est amie avec tout le monde, ce qu'on représente ainsi sur le graphe :

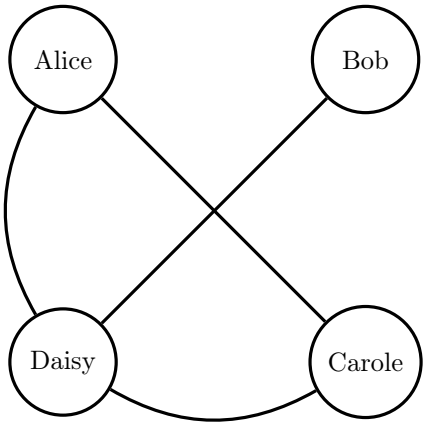


On peut maintenant définir un graphe (non orienté) de la manière suivante :

1. N'importe quel cryptographe vous le dira, Alice et Bob passent leur temps à essayer de trahir chacun les secrets de l'autre. Ce n'est pas la meilleure façon d'entretenir une amitié...

Un graphe est défini par
- ***Un ensemble de sommets (en général représentés par des cercles)***
- ***Un ensemble d'arêtes (en général représentées par des traits), chaque arête joignant deux sommets.***

Les arêtes sont souvent, mais pas toujours, représentées par des segments rectilignes. Et on essaye dans la mesure du possible d'éviter que les arêtes se croisent. Mais c'est juste pour faire joli, la structure d'un graphe dépendant uniquement de l'existence d'arêtes entre certains sommets, et non de la forme des arêtes. Le réseau social précédent peut par exemple être redessiné ainsi :



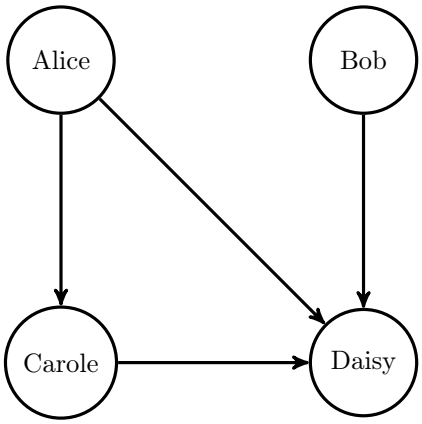
Les graphes sont présents dans les applications des mathématiques, dans chaque situation où des objets (représentés par les sommets) peuvent être reliés entre eux d'une manière ou d'une autre (les liaisons étant représentées par les arêtes du graphe). Par exemple

Modèles	***Sommets***	***Arêtes***
réseau social	personnages	amitié
réseau routier	villes	routes
réseau électrique	prises	câbles
réseau informatique	ordinateurs	câbles réseau
Polyèdres	points	segments
Graphes	cercles	traits

La dernière ligne peut paraître bizarre : étudier les graphes pour les graphes, ça ne fait pas très « mathématiques appliquées ». Mais pour les élèves de Grande Section de maternelle, il n'y a rien d'étrange à appeler ***sommet*** un cercle, et ***arête*** un trait joignant deux cercles. Et les exercices sur les graphes ont un aspect franchement ludique qui transparaîtra tout au long de cet ouvrage, du moins on l'espère.

Arcs

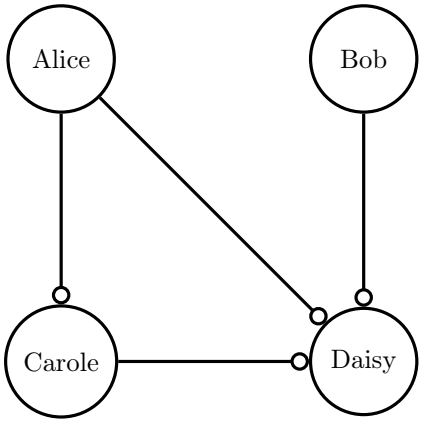
En fait Alice et Bob sont des espions : Alice n'est pas vraiment l'amie de Carole mais elle espionne Carole. Elle espionne aussi Daisy d'ailleurs. Daisy est assez naïve : elle croit être amie avec tout le monde alors qu'en fait elle est espionnée par tout le monde. Ce n'est pas parce que tout le monde connaît tout de Daisy, que celle-ci connaît quoi que ce soit des autres. La relation ***se permet d'espionner*** ne peut donc pas être représentée par des simples traits, mais il faut assortir les traits de flèches pour représenter le sens de la relation (qui est l'espion, qui est espionné). Le graphe obtenu est dit alors ***orienté*** :



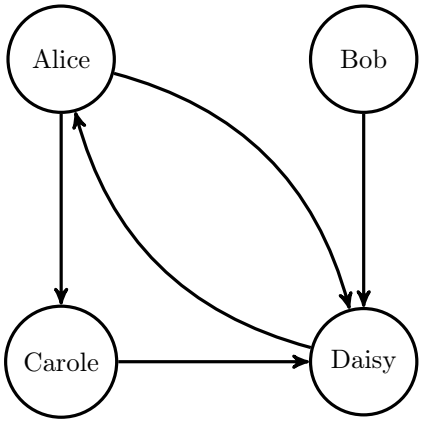
Dans un graphe orienté, les arêtes s'appellent plutôt des ***arcs***. Dans un réseau routier, il semble plus pertinent de parler de ***rue à sens unique***. Mais on se cantonnera au vocabulaire classique avec des arcs ou éventuellement des arêtes orientées.

Typiquement pour jouer sur un graphe orienté, les pions ne peuvent parcourir une arête que dans un sens, celui de la flèche.

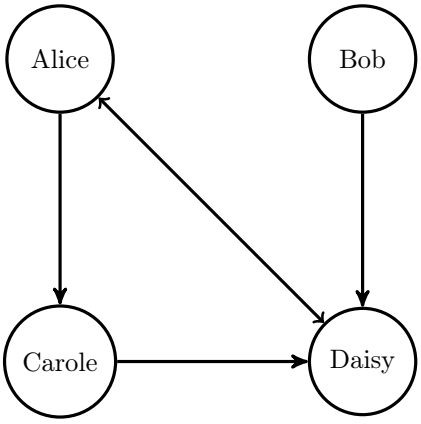
Avant la Grande Section, les arêtes sont peu perceptibles surtout lorsqu'elles sont obliques ou se croisent. Mais dès la Petite Section, on voit relativement peu d'erreurs sur l'orientation de l'arc. C'est pour dessiner les pointes de flèches que les difficultés psychomotrices peuvent apparaître et le graphe orienté peut alors plutôt ressembler à ceci, avec des têtes de flèches franchement arrondies comme ceci :



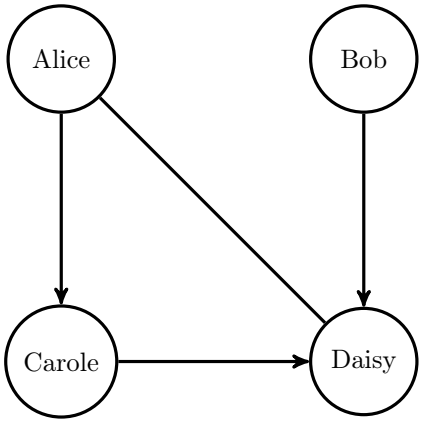
Dans un graphe orienté, il peut arriver que deux arcs soient disposés en sens inverse l'un de l'autre. Par exemple, si Daisy trouve un moyen d'espionner Alice, on peut ou bien rajouter un arc allant de Daisy à Alice



ou bien mettre deux flèches sur l'arc double :



voire ne rien mettre du tout :



Degré d'un sommet

Pour un graphe non orienté, le ***degré*** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet (ou qui vont vers ce sommet, c'est pareil avec un graphe non orienté). Dans le réseau social vu au début de ce chapitre, le degré de chaque personne est le nombre d'amis de cette personne : Alice est de degré 2, Bob est de degré 1, Carole est de degré 2 et Daisy est de degré 3.

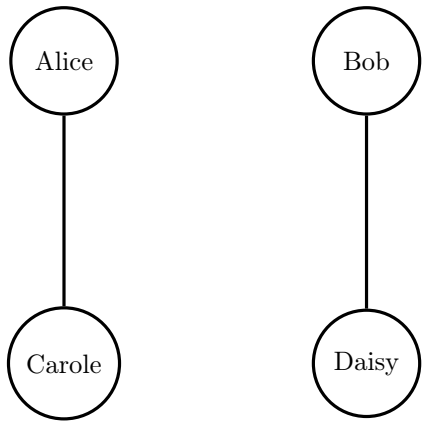
Pour un graphe orienté, chaque sommet a deux degrés :

- le ***degré entrant*** qui est le nombre d'arcs allant vers le sommet ;
- le ***degré sortant*** qui est le nombre d'arcs allant du sommet vers un autre sommet.

La notion de degré d'un sommet est accessible dès le CP puisque calculer un degré revient à compter des arêtes.

1.1.3 Connexité

Après une dispute entre les membres de l'équipe, Alice et Carole ont décidé de faire bande à part :



Sur ce graphe, on n'a plus l'impression de voir un réseau social, mais deux, indépendants l'un de l'autre : aucun des membres du couple (Alice, Carole) n'est plus en relation avec aucun des membres du couple (Bob, Daisy). On peut voir cette situation de deux manières :

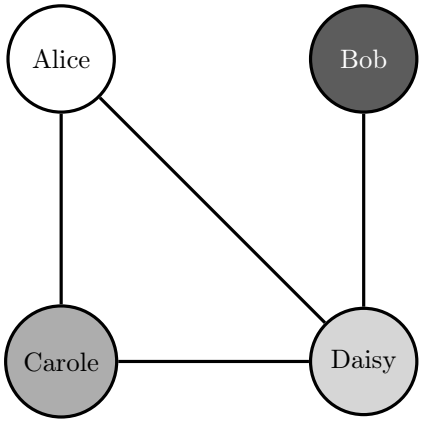
- deux graphes (à deux sommets et une arête chacun) tracés côte à côte ;
- ou un seul graphe mais en deux morceaux.

Dans ce dernier cas on dit que le graphe n'est pas ***connexe***.

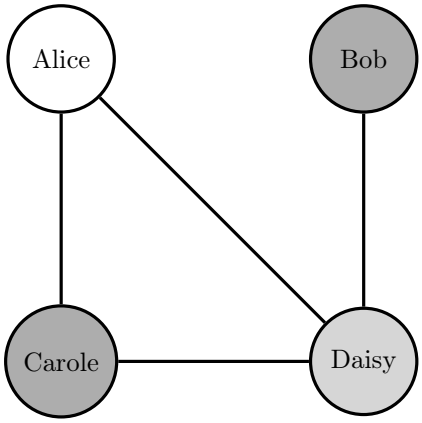
Comme, d'expérience, les enfants considèrent qu'il est naturel de dessiner des graphes connexes, on ne considèrera dans cet ouvrage, que des graphes connexes, sauf dans le dernier chapitre.

1.1.4 Coloration

Colorier un graphe, c'est colorier chacun de ses sommets. On essaye autant que possible de ne jamais colorier de la même façon deux sommets adjacents :



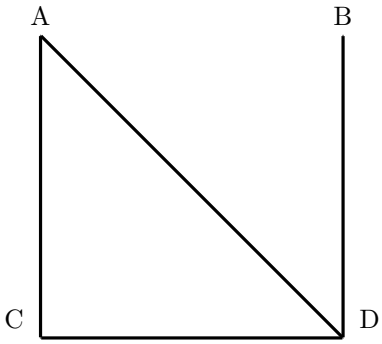
Remarque : on peut colorier tout aussi proprement le graphe ci-dessus avec moins de couleurs :



Par contre on ne peut pas descendre en-dessous de 3 couleurs : on dit que le ***nombre chromatique*** de ce graphe est égal à 3. Cette notion est accessible dès la Grande Section, comme on le verra dans le prochain chapitre.

1.2 Polyèdres

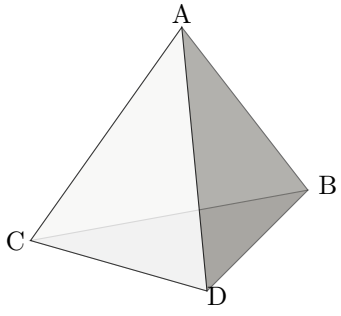
On peut se demander pourquoi ont été choisis des noms aussi saugrenus que ***sommet*** et ***arête*** pour désigner les constituants d'un graphe. En fait cela a une raison historique : vers la fin du XIXe siècle, Julius Petersen fut l'un des premiers à dessiner des graphes, et il représentait les sommets par des points (ou des cercles de rayon nul) et les arêtes par des segments (tout droits). Si Petersen avait connu Alice et son équipe, il aurait dessiné quelque chose comme



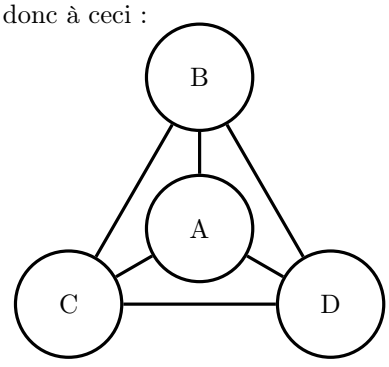
Si on ne s'astreint plus à ce que tous les sommets soient sur la feuille, on obtient une représentation tridimensionnelle du graphe, qui s'apparente à un polyèdre. Casimir Kuratowski (en 1930) appelait ***courbe gauche*** ce qu'aujourd'hui on appelle graphe, et dessinait sous forme de polyèdre les graphes les plus remarquables qu'il connaissait. En voici quelques exemples :

1.2.1 Tétraèdre

On peut former un graphe avec les 4 sommets A, B, C et D d'un tétraèdre :



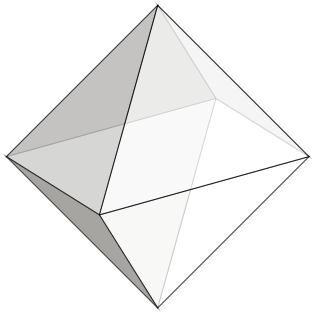
Deux sommets sont adjacents s'il y a une arête du tétraèdre les joignant. Or dans un tétraèdre, chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête. Le graphe du tétraèdre ressemble donc à ceci :



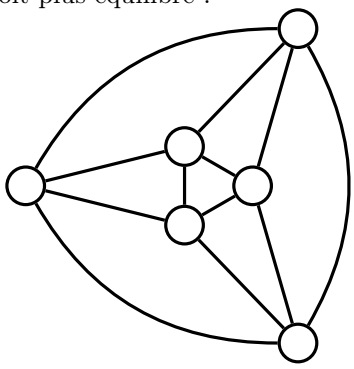
En hommage à Kuratowski, le graphe du tétraèdre est noté K_4 et appelé ***graphe complet à 4 sommets***. Le mot « complet » désigne un graphe dont deux sommets quelconques sont adjacents.

1.2.2 Octaèdre

Un autre polyèdre à faces triangulaires est l'octaèdre :



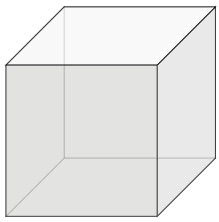
Voici le graphe de l'octaèdre, dans lequel on a choisi d'arrondir quelques arêtes pour que le dessin soit plus équilibré :



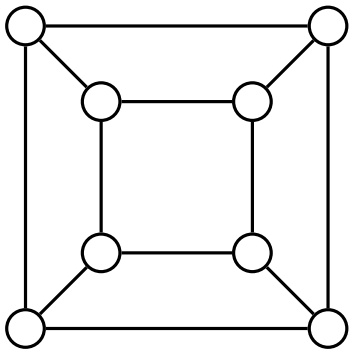
Ce graphe est dit ***homogène*** parce que tous ses sommets ont le même degré 4. Le graphe du tétraèdre aussi est homogène puisque tous ses sommets sont de degré 3. Un graphe dont tous les sommets sont de degré 3 est dit ***cubique*** parce qu'un cas particulier important est le cube.

1.2.3 Cube

En regardant un cube, on constate en effet que chacun de ses 8 sommets est de degré 3 :



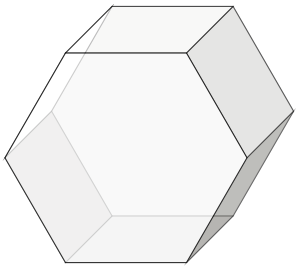
Voici le graphe du cube :



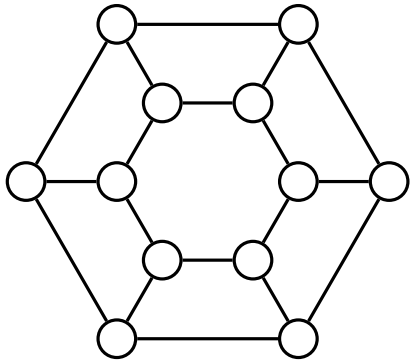
Il y a beaucoup de graphes cubiques. Par exemple chaque prisme donne un graphe cubique :

1.2.4 Prismes

Voici un prisme à base hexagonale :



On constate qu'il y a 12 sommets regroupés en deux hexagones, mais chaque sommet est de degré 3 :



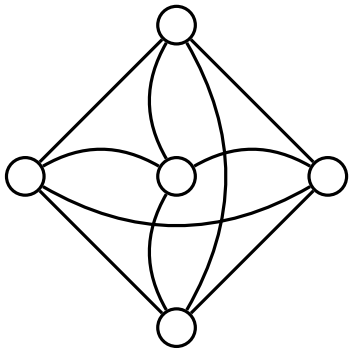
Le graphe du prisme hexagonal est donc cubique.

En fait, tous les prismes donnent des graphes cubiques. Le graphe du dodécaèdre, qu'on verra plus loin, est aussi cubique : chacun de ses sommets est de degré 3.

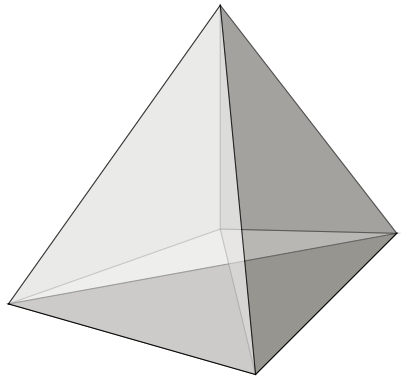
1.2.5 Solides de Kuratowski

Graphe complet à 5 sommets

Le graphe complet à 5 sommets, comme son nom l'indique, comprend 5 sommets, et chacun de ces sommets est adjacent aux 4 autres sommets.

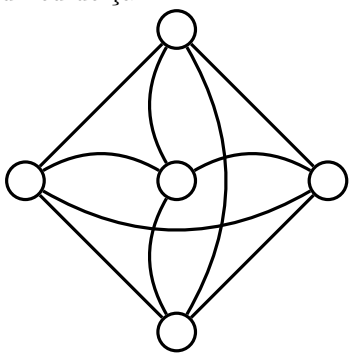


En voici la version tridimensionnelle : un tétraèdre et son centre, relié à chacun de ses sommets :

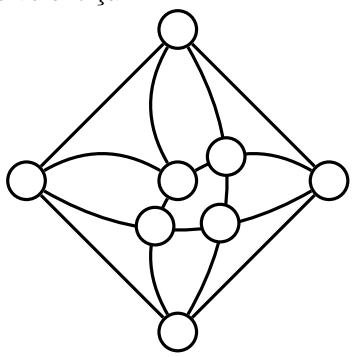


Les enfants non lecteurs ont tendance à imaginer des sommets aux croisements (or il n'y en a pas ; K_5 n'est réellement constitué que de 5 sommets de degré 4 et 10 arêtes) :

Au lieu de ça :



ils voient ça :



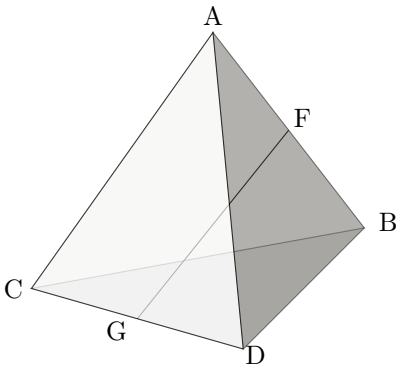
Une question se pose : y a-t-il un moyen de dessiner ce graphe de telle manière qu'aucune arête n'en croise une autre ?

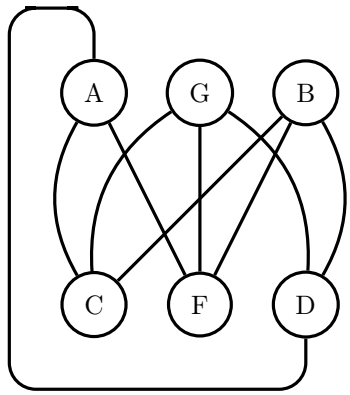
Kuratowski a démontré en 1930 [Kur30] que quel que soit l'angle de vue de K_5, il y aura nécessairement des arêtes qui se croisent. Il n'existe donc aucun moyen de dessiner ce graphe sur une feuille sans que deux arêtes au moins ne se croisent. On dit que K_5 n'est pas planaire.

Graphe complet bipartite

L'autre graphe de Kuratowski s'obtient aussi à partir d'un tétraèdre, mais cette fois-ci en ajoutant les milieux de deux arêtes opposées. Sur les 6 arêtes du tétraèdre, il y en a 2 qui ont été divisées en deux (en leur milieu) et on passe donc à 8 arêtes.

Plus celle joignant les deux milieux en question, cela fait un total de 9 arêtes pour ce graphe, noté $K_{3,3}$ toujours en l'honneur de Kuratowski, et appelé ***graphe complet bipartite 3, 3*** :

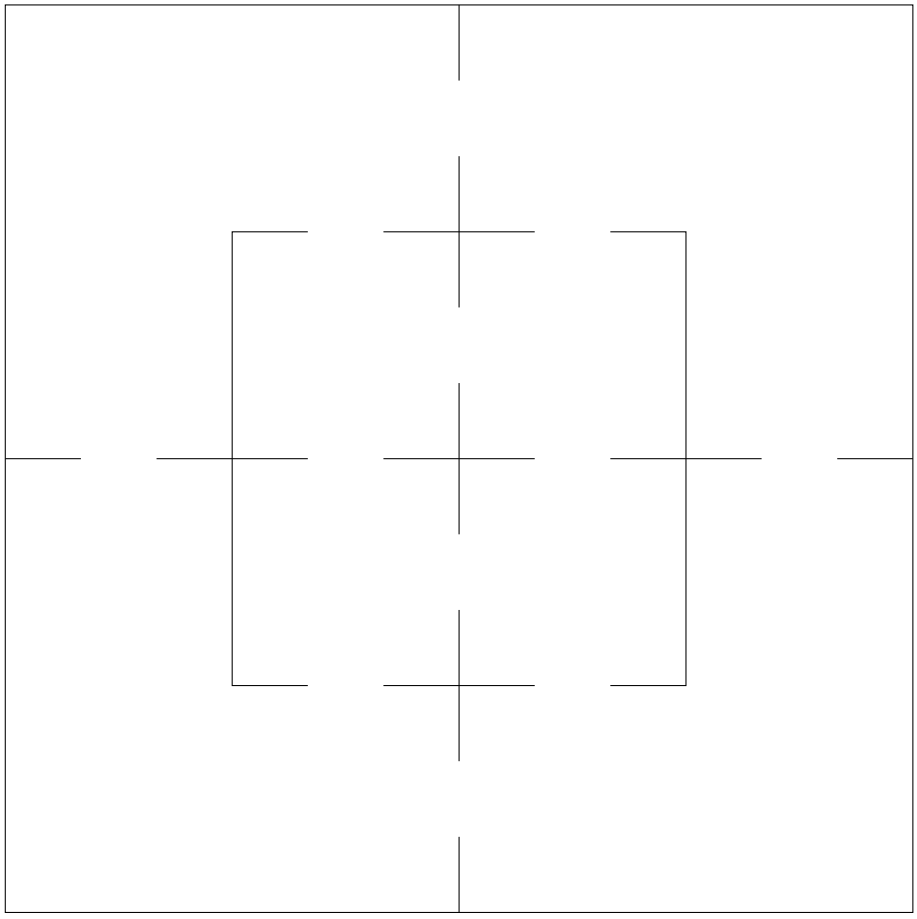




L'adjectif « bipartite » signifie qu'on peut grouper ses sommets en deux parties, l'une constituée des 3 sommets du haut et l'autre constituée des 3 sommets du bas.

Mais bipartite ne veut pas seulement dire qu'il y a deux catégories de sommets, mais aussi que deux sommets d'une même catégorie ne sont jamais adjacents entre eux. Cette notion reviendra dans le chapitre sur la coloration de graphes mais aussi dans celui sur les fonctions.

Par exemple ci-dessus aucun des sommets A, B et G n'est adjacent à un autre de ces sommets, et aucun des sommets C, F et D n'est adjacent à aucun autre de ces sommets.



Le graphe du cube vu par un architecte : chaque pièce de cette maison est un des sommets du cube et deux sommets sont adjacents lorsqu'il y a une porte entre les deux pièces correspondantes.

Chapitre 2

Coloriage

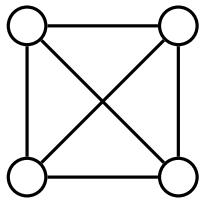
2.1 Planarité

2.1.1 Définition

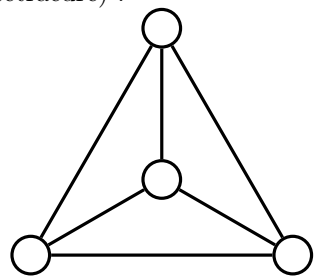
Représentations

Un graphe peut avoir plusieurs représentations [1]

Par exemple le graphe du tétraèdre peut être dessiné ainsi :



ou ainsi (selon l'angle de vue sur le tétraèdre) :



La première de ces deux représentations laisse à désirer parce que les deux diagonales du carré se croisent : dans l'espace les deux arêtes ne sont pas au même niveau et ne se croisent pas. Dans le plan, on a du mal à voir laquelle des deux arêtes passe au-dessus de l'autre.

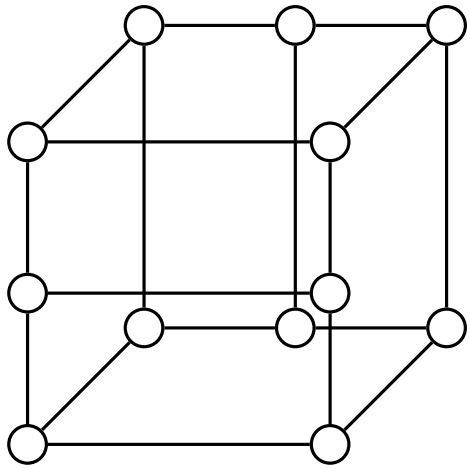
La seconde représentation du graphe K_4 est meilleure parce qu'aucune arête n'y croise une autre arête : on dit qu'il s'agit d'une ***représentation planaire*** du graphe K_4.

1. Une permutation des sommets (opération qui revient à les mélanger, comme on mélange des cartes au poker) qui aboutit à une nouvelle représentation du même graphe s'appelle un ***automorphisme du graphe***. Les automorphismes sont réifiés dans l'activité en ligne [BT18].

Graphes planaires

Si un graphe possède au moins une représentation planaire, c'est un ***graphe planaire***. La seconde représentation du graphe K_4 montre que K_4 est planaire. Le chapitre précédent montrait d'autres exemples de graphes planaires : le cube, les prismes, l'octaèdre...

Un jeu assez difficile consiste à donner un graphe planaire et demander d'en faire une représentation planaire. Par exemple, avec le cube de Bidiakis :



Le jeu ***planarity***, ingrédient des distributions libres et disponible sur les « stores » des téléphones portables, consiste justement à trouver, par déplacement des sommets, une représentation planaire d'un graphe engendré aléatoirement.

2.1.2 Théorème de Kuratowski

On a vu que les graphes K_5 et $K_{3,3}$ de Kuratowski n'admettent pas de représentation planaire. Ils sont même caractéristiques de la non-planarité [Kur30] :

> ***Théorème (Kuratowski 1930)***
> ***Un graphe est planaire si et seulement si on ne peut en extraire ni un*** K_5 ***ni un*** $K_{3,3}$ ***(éventuellement par subdivision*** [a] ***).***
>
> *a.* Subdiviser un graphe revient à rajouter un sommet (de degré 2) au milieu d'une arête.

Les graphes K_5 et $K_{3,3}$, publiés en 1930 [Kur30] par Kuratowski, ne sont pas les plus vieux exemples connus de graphes non planaires : dans les années 1880, Julius Petersen inventait ce graphe :