ECG1

# MATHS APPROFONDIES

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



avec copies & corrigés commentés

Chantal Bressollette
Vincent Monceau

ellipses

ECG1

# MATHS APPROFONDIES

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



**Chantal BRESSOLLETTE**
**Vincent MONCEAU**
Agrégés de Mathématiques
Professeurs en classe préparatoire économique
et commerciale voie générale (ECG)
au lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles)

ellipses

**Conception graphique couverture :** Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-116290

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris




Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

# Remerciements

Il me tenait particulièrement à coeur de remercier Chantal, avec laquelle j'ai eu le plaisir d'écrire cet ouvrage, qui m'épaule, m'accompagne et me guide depuis maintenant plusieurs années dans mon travail. Je suis fier d'avoir pu produire cet ouvrage avec une enseignante aussi dévouée et impliquée. Un remerciement spécial à Fabien et Thomas, et leurs relectures et conseils des derniers instants. Il me parait tout naturel de remercier aussi Thaïs, notre éditrice, qui nous a accompagné dans ce beau projet et qui a toujours été de bon conseil et d'une disponibilité à toute épreuve. Enfin, je joins à mes remerciements ceux de ma co-autrice pour nos familles respectives, qui supportent notre travail et notre implication depuis plusieurs années maintenant.

# Avant-propos

Cet ouvrage a été écrit par deux professeurs de mathématiques de classe préparatoire ECG mathématiques approfondies qui enseignent en première année et interviennent aussi en deuxième année. Nous avons tenté de synthétiser en trente devoirs l'essentiel des compétences et des points de cours du programme de première année en utilisant au maximum des exercices importants et classiques que tout étudiant devra avoir traité avant d'aborder les concours.

L'objectif de cet ouvrage est de vous proposer un devoir à réaliser par semaine pendant toute votre première année, en un temps relativement court (autour d'une heure et demie pour la grande majorité des devoirs) ainsi qu'un corrigé détaillé pour chacun de ces devoirs, accompagné de commentaires, de conseils de travail et de rédaction et d'exemples de ce qu'il faut faire, ou ne pas faire, le jour des concours.

Nous espérons que cet ouvrage vous permettra de prendre rapidement le rythme de la première année de classe préparatoire, et que les conseils qui y sont dispensés vous accompagneront durant le reste de votre scolarité, jusqu'aux concours.

# Sommaire


Introduction ..... 9

Table des notions par devoir ..... 17

## Devoirs

- Devoir 1 ..... 20
- Devoir 2 ..... 21
- Devoir 3 ..... 22
- Devoir 4 ..... 24
- Devoir 5 ..... 25
- Devoir 6 ..... 26
- Devoir 7 ..... 27
- Devoir 8 ..... 28
- Devoir 9 ..... 29
- Devoir 10 ..... 30
- Devoir 11 ..... 32
- Devoir 12 ..... 33
- Devoir 13 ..... 34
- Devoir 14 ..... 35
- Devoir 15 ..... 36
- Devoir 16 ..... 37
- Devoir 17 ..... 38
- Devoir 18 ..... 40
- Devoir 19 ..... 42
- Devoir 20 ..... 44
- Devoir 21 ..... 45
- Devoir 22 ..... 47
- Devoir 23 ..... 49
- Devoir 24 ..... 50
- Devoir 25 ..... 51
- Devoir 26 ..... 52
- Devoir 27 ..... 53
- Devoir 28 ..... 55
- Devoir 29 ..... 56
- Devoir 30 ..... 57

## Corrigés

- Corrigé du devoir 1 ..... 60
- Corrigé du devoir 2 ..... 68
- Corrigé du devoir 3 ..... 75
- Corrigé du devoir 4 ..... 84
- Corrigé du devoir 5 ..... 90
- Corrigé du devoir 6 ..... 95
- Corrigé du devoir 7 ..... 104
- Corrigé du devoir 8 ..... 113
- Corrigé du devoir 9 ..... 122
- Corrigé du devoir 10 ..... 132
- Corrigé du devoir 11 ..... 141
- Corrigé du devoir 12 ..... 150
- Corrigé du devoir 13 ..... 158
- Corrigé du devoir 14 ..... 167
- Corrigé du devoir 15 ..... 175
- Corrigé du devoir 16 ..... 185
- Corrigé du devoir 17 ..... 191
- Corrigé du devoir 18 ..... 209
- Corrigé du devoir 19 ..... 218
- Corrigé du devoir 20 ..... 234
- Corrigé du devoir 21 ..... 240
- Corrigé du devoir 22 ..... 254
- Corrigé du devoir 23 ..... 269
- Corrigé du devoir 24 ..... 278
- Corrigé du devoir 25 ..... 285
- Corrigé du devoir 26 ..... 293
- Corrigé du devoir 27 ..... 298
- Corrigé du devoir 28 ..... 319
- Corrigé du devoir 29 ..... 327
- Corrigé du devoir 30 ..... 334

# Introduction

## Mode d'emploi

### Généralités

Cet ouvrage compte deux parties principales. La première, intitulée « Les énoncés », compile les 30 exercices proposés dans cet ouvrage, par ordre chronologique, en suivant la progression du programme de classe préparatoire ECG mathématiques approfondies. La deuxième, intitulée « Les corrigés », compile des corrigés détaillés, question par question, de ces 30 devoirs, en prêtant une attention particulière aux calculs, à la rédaction et aux points de cours. Vous y trouverez aussi de nombreux conseils de rédaction et de méthode, de travail, des remarques de rédaction ou de cours, ainsi que des exemples de production d'élèves sur des questions classiques, afin de vous permettre d'éviter les erreurs classiques et d'améliorer votre rédaction et votre présentation.

Les conseils dispensés dans cet ouvrage sont, eux aussi, chronologiques. Un conseil donné dans le corrigé du premier devoir s'applique à un étudiant de début de première année, et peut être complété par un conseil que vous trouverez plus tard dans l'ouvrage, qui sera alors à destination d'un élève plus avancé dans son année.

La même remarque peut être faite pour la rédaction des corrigés et des méthodes utilisées. Il est évident qu'un élève de fin de première année, ou de deuxième année, a à sa disposition de nombreux outils et moyens pour résoudre des problèmes que ne possède pas un élève de début de première année. Ainsi, les méthodes employées dans les premiers corrigés sont choisies pour être compréhensibles et utilisables par un élève de début de première année, elles ne sont donc pas toujours optimales lorsque regardées avec le bagage mathématique d'un élève sur la fin de sa deuxième année.

### Chronologie

Si vous utilisez cet ouvrage durant votre première année, alors il sera très simple d'utilisation. Chaque devoir de cet ouvrage a pour vocation de couvrir une semaine du programme de première année de classe préparatoire ECG mathématiques approfondies, dans l'ordre, en commençant par la quatrième semaine. Pour vous aider à vous repérer, le tableau ci-après reprend le nom, la durée de réalisation, ainsi que la semaine associés à chaque devoir.

| Numéro | Nom | Durée | Semaine |
|---|---|---|---|
| 1 | Suite de Fibonacci | 1h30 | 4 |
| 2 | Nombres de Catalan | 1h30 | 5 |
| 3 | Puissance matricielle | 2h00 | 6 |
| 4 | Différence symétrique | 1h30 | 7 |
| 5 | Racine et commutant d'une matrice | 1h00 | 8 |
| 6 | Voyage au pays des Bidouillis | 1h30 | 9 |
| 7 | Évènements et probabilités | 1h30 | 10 |
| 8 | Suites définies par des sommes | 1h30 | 11 |
| 9 | Exemples d'applications | 1h30 | 12 |
| 10 | Chaine de Markov | 2h00 | 13 |
| 11 | Suites implicites | 1h30 | 14 |
| 12 | Trois lancers consécutifs | 1h30 | 15 |
| 13 | Fonctions génératrice | 1h30 | 16 |
| 14 | Étude de fonctions | 1h30 | 17 |
| 15 | Suite définie par récurrence | 1h30 | 18 |
| 16 | Fonctions réciproques trigonométriques | 1h30 | 19 |
| 17 | Introduction aux espaces vectoriels | 3h30 | 20 |
| 18 | Problème de Monty Hall | 1h30 | 21 |
| 19 | Familles de polynômes | 3h00 | 22 |
| 20 | Hyperplans et formes linéaires | 1h00 | 23 |
| 21 | Taux de panne | 2h30 | 24 |
| 22 | Symétries d'un espace vectoriel | 2h30 | 25 |
| 23 | Fonction Zeta de Riemann | 1h30 | 26 |
| 24 | Stabilité Poisson-binomiale et loi de Pascal | 1h00 | 27 |
| 25 | Etude d'une fonction définie par une intégrale | 1h30 | 28 |
| 26 | Lagrange et Vandermonde | 1h00 | 29 |
| 27 | Wallis, Stirling et Gaussienne | 4h00 | 30 |
| 28 | Théorème de Weierstrass | 1h30 | 31 |
| 29 | Application polynomiale intégrale | 1h30 | 32 |
| 30 | Lois trinomiales | 1h30 | 33 |

La grande majorité des devoirs présentés dans cet ouvrage peuvent être traités en 1h30 ou 2h. Ce sont donc des exercices longs et complets, qui demandent de la concentration et de la méthode. A ce titre, il est conseillé de placer dans votre emploi du temps un créneau de 2h durant le week-end de chaque semaine concernée par un devoir pour vous atteler à la réalisation du devoir en question, puis un créneau de 2h pour sa correction et un travail de rectification. L'idéal serait de prendre une pause entre ces deux séances de travail, mais suffisamment courte pour que le devoir soit encore frais dans votre esprit.

Il pourrait arriver que cet ouvrage suive une progression légèrement différente de celle de votre professeur, et que deux semaines s'en trouvent inversées ou bien que votre cours avance simplement plus ou moins rapidement que la progression de cet ouvrage. À ce titre, chaque devoir comporte, dans un encadré en début de devoir, la mention de tous les thèmes abordés dans le devoir, afin de vous aider à naviguer entre les différents devoirs.

Si vous utilisez cet ouvrage comme un moyen de réviser en fin de première année ou durant votre deuxième année, alors il est conseillé de vous référer à la table située en fin d'introduction pour faire le lien entre les devoirs et les thèmes abordés, et ainsi pouvoir naviguer avec plus de facilité dans cet ouvrage. Pour permettre ce travail, les devoirs qui ont été choisis sont, pour la grande majorité, des exercices classiques « nommés », suffisamment importants pour qu'un nom fasse référence au concept étudié (polynômes de Lagrange, nombres de Catalan, etc...). Ces devoirs sont des classiques, pour les écrits et les oraux, et peuvent être traités lors de vos révisions.

## Présentation des devoirs

Chaque devoir est précédé d'un encadré de présentation, qui peut contenir les informations suivantes :

- **Remarque :** un devoir précédé d'une remarque prend une forme particulière ou contient une question devant être signalée en amont. Par exemple, le devoir « Introduction aux espaces vectoriels », qui semble très long, est en fait composé de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités séparément.
- **Thèmes abordés :** vous trouverez ici la liste des thèmes abordés par le devoir présenté. Cette liste est reprise pour chaque devoir dans la table présente en fin d'introduction. Il est toujours difficile de classifier les exercices en mathématiques, et les thèmes sont donc larges et se superposent parfois.
- **Informatique :** si le devoir comprend des questions d'informatique (en langage Python), vous trouverez ici la liste des compétences informatiques nécessaires pour pouvoir effectuer les questions d'informatique. Comme aux concours, les questions d'informatique sont rarement nécessaires pour poursuivre le devoir, mais rapportent beaucoup de points (voir les conseils de travail - informatique). Il est possible d'effectuer un devoir même si vous ne maîtrisez pas totalement le point informatique proposé dans ce dernier.

- **Théorèmes importants :** si le devoir fait référence ou nécessite l'utilisation d'un théorème clé ou d'une de ses variantes, vous trouverez ici la liste de ces théorèmes.
- **Durée :** vous trouverez ici une estimation de la durée nécessaire pour traiter le devoir. Il ne s'agit ni d'un objectif, ni d'une norme absolue, chaque élève étant différent et un devoir pourrait vous parler tandis que le suivant pourrait vous poser plus de problèmes. Cette indication est avant tout là pour vous donner une échelle de temps à tenter de respecter.

## Niveau des devoirs

Voilà une question classique d'élève, posée tout au long de la classe préparatoire : « Est-ce que cet exercice est dur ? Est-ce qu'il est de mon niveau ? Est-ce que ce livre n'est pas trop difficile pour moi ? ».

Dans cet ouvrage, vous trouverez des devoirs qui ont été réfléchis pour suivre un modèle similaire aux devoirs de concours, en plus court. C'est-à-dire que les questions y sont très progressives. Les premières questions sont des questions de cours, de méthode, dans lesquelles c'est votre apprentissage et votre maîtrise des éléments centraux du programme qui sont testés et évalués. Mais plus vous avancez dans les devoirs et plus les questions se complexifient et ciblent des compétences plus difficiles à maîtriser. Ainsi, tout élève, où qu'il soit dans son acquisition de ses compétences mathématiques, a intérêt à faire ces différents devoirs.

Effectuer un devoir de cet ouvrage peut vous permettre d'acquérir des compétences que vous ne maîtrisiez pas encore, revoir des méthodes oubliées ou mal comprises, comme permettre à un élève de fin de deuxième année de revoir ces exercices classiques et de parfaire sa rédaction.

## Encadrés dans les corrigés

Les corrigés des devoirs qui sont proposés contiennent de nombreux encadrés, de différents types, pour apporter des conseils, des méthodes, des points de cours ou même présenter des productions d'élèves et enrichir la correction.

- Les encadrés **Commentaires** permettent de faire des remarques générales, de donner un contexte historique ou méthodologique, ou de vous renvoyer vers des annales ou d'autres exercices en lien avec le devoir observé.
- Les encadrés **Conseils** permettent d'approfondir un point de rédaction ou un élément de cours et de méthode. Ils sont destinés à être lus dans un souci d'amélioration des méthodes de travail ou pour focaliser l'attention sur un point particulièrement important de la correction.
- Les encadrés **Point de cours** permettent de mettre en lumière un point de cours particulier, une proposition, une définition ou un théorème, en pointant du doigt les subtilités de ce dernier et son cadre d'application. On y apportera aussi des précisions de notation.
- Les encadrés **Copies élèves** permettent de présenter des reconstitutions de productions d'élèves, souvent pour mettre en lumière les problèmes que ces productions présentent, qu'il s'agisse de soucis de fond ou de forme.

# Conseils généraux

## Méthode de travail

Vous êtes de bons élèves. Vous ne seriez pas en classe préparatoire dans le cas contraire. Vous n'avez peut-être pas eu besoin de conseils pour réussir jusque là. Il se pourrait donc que vous ne lisiez pas les conseils qui suivent, en pensant qu'ils ne s'adressent pas à vous. Il est pourtant quasi-certain que vous soyez grandement concernés par ces derniers. Pourquoi ? Parce que la classe préparatoire va vous placer dans une position où tout est difficile et où il y a trop à faire. Vous serez en retard dans votre travail et vos révision, vous n'arriverez pas à tout faire, et vous ne réussirez pas tous les exercices. Vous allez connaître l'échec et la frustration qui accompagne l'incompréhension. Il y a des chances que vous ne sachiez pas gérer cette frustration et ces difficultés, et il va falloir apprendre à le faire vite. Voici quelques conseils pour prendre un bon départ.

- **Faire preuve d'écoute active.** Rien ne sert de suivre passivement un cours de mathématiques. Si votre seule contribution intellectuelle en deux heures de cours est d'avoir choisi avec quelle couleur souligner vos titres, vous êtes sans doute passés à côté de quelque chose. Un cours de mathématiques, ça va vite. Mais vous devez vous interroger, remettre en question ce qui est écrit au tableau, dit par l'enseignant, et vous devez noter toute question, explicite ou non, posée par l'enseignant afin de pouvoir chercher, seuls, les réponses plus tard. Tout ce que vous mémorisez et intégrez pendant le cours est une chose de plus que vous n'aurez pas à apprendre en soirée.
- **Apprendre le cours.** Le soir même, apprenez votre cours. Apprendre son cours est absolument essentiel, et la plupart des difficultés rencontrées en première année peuvent se résumer à : « Vous ne connaissez pas votre cours ». Pourquoi apprendre son cours le soir même ? Comment apprendre son cours ?

    - Quand les explications sont encore bien fraîches, la mémorisation est plus facile.
    - Demain, vous verrez la suite du cours. Si vous ne connaissez pas le cours d'aujourd'hui, vous ne comprendrez pas le cours de demain.
    - Apprendre, ce n'est pas relire. C'est se poser des questions, c'est remettre en question, c'est connaître les cas d'application et les cas qui ne fonctionnent pas.
    - Pour chaque notion, il faut être capable de faire la liste de toutes les définitions et théorèmes qui lui sont liés et de les énoncer avec la plus grande précision (apprendre mot à mot les théorèmes, y compris les hypothèses).
    - Les démonstrations vues en classe ne font pas partie de ce que vous devez apprendre tout de suite, mais constituent des exercices souvent difficiles et abstraits qu'il vous faudra travailler une fois que vous aurez pris en main les bases du cours.

- **Mettre en pratique le cours.** Après avoir appris les notions théoriques et les méthodes qui jalonnent le cours, la deuxième difficulté résulte dans l'application de ce cours (connaître le théorème de Pythagore sous toutes ses formes est un début, être capable de s'en servir dans une démonstration, voilà une deuxième compétence bien différente). Comment mettre en application son cours ?

- Refaire les exemples du cours est fondamental si vous voulez acquérir de la pratique et de la méthode (et refaire, ce n'est pas relire).
- Reprendre les exercices d'application faits en classe. Ces exercices sont construits autour d'une idée, d'une définition ou d'un théorème, et ne sont qu'application et méthode, ils sont parfaits pour acquérir les bases.
- Faire des exercices d'application plus complets seuls, sans la correction, avec des valeurs différentes, dans d'autres contextes.
- On rappelle encore que lire une correction n'a rien à voir avec faire un exercice. En devoir, vous serez seuls face à votre page blanche. Vous devez être capables de produire la correction, pas de l'assimiler.

- **Aller plus loin.** Vous connaissez votre cours et êtes capable de le mettre en application dans des exercices simples et avec la bonne rédaction ? Il ne reste plus qu'à aller plus loin, mélanger les notions, les théorèmes et effectuer des raisonnements complexes. C'est là qu'interviennent les exercices d'approfondissement. Plus difficiles, ces exercices demandent généralement de manipuler de nombreuses notions dans des cas moins classiques que les exercices d'application.

  - Le plus important pour ces exercices, ce sont les traces de recherche. Les exercices d'approndissement sont des exercices complexes, qu'il est difficile de réussir du premier coup. Il faut donc accepter de passer quelques dizaines de minutes à chercher, à attaquer le problème sous différents angles, à l'aide de différentes propriétés. Ce travail est fait seul, contre soi-même. Il est frustrant, mais essentiel si vous voulez passer un cap.
  - Il est donc important d'accepter de passer du temps seul sur un énoncé, de chercher et de ne pas trouver tout de suite.
  - Prenez le temps de lire les énoncés : Que sait-on ? Quelles sont les données de l'énoncé, que dit le cours sur ces données ? Quelles sont leurs propriétés ? Que demande-t-on ? Quelle forme doit prendre la réponse ? Comment passer de l'un à l'autre ? Quel théorème/ propriété/ calcul sous-jacent me demande-t-on d'utiliser ? Quelles connaissances, quelles compétences veut-on tester ? Les résultats intermédiaires obtenus peuvent-ils être utiles pour répondre à la question ? À quel exercice, déjà vu, cette question me fait-elle penser ?
  - Ue fois une idée en tête, n'oubliez pas de rédiger au mieux votre exercice. Si votre rédaction n'est pas au point en TD ou en exercice, elle ne le sera jamais en devoir.
- **Le retour sur erreur.** La capacité à reprendre les ratés et à apprendre de ses erreurs est une compétence indispensable en classe préparatoire, qu'il faut acquérir au plus tôt. Plus vite vous serez capable de comprendre pourquoi vous échouez, ce qui vous manque et comment adapter votre méthode de travail et plus vite vous progresserez. Le retour sur erreur est l'outil le plus puissant du préparationnaire. Rater, vous tromper, ne pas réussir, c'est ce que vous allez faire pendant deux ans. C'est votre réaction qui sera déterminante. Une règle d'or : ne pas faire deux fois la même erreur.
- **Revoir les connaissances anciennes.** Deux ans, c'est long. Suffisamment long pour oublier au fur et à mesure ce que vous avez appris. Votre travail est donc à la fois d'acquérir de nouvelles connaissances et compétences et de maintenir les anciennes. Il est donc primordial de réserver un temps de travail dédié au maintien des connaissances anciennes.

## La rédaction en devoir

La rédaction est souvent laissée de côté par les élèves de première année. En cause ? Ils pensent que le fond est plus important que la forme. Le problème, c'est que ceci est faux. Certes, le fait qu'un raisonnement soit juste est plus important que le fait qu'un raisonnement soit subtil, bien écrit, facile à suivre. Mais qu'est-ce qu'un raisonnement juste ? Quelles sont les règles de rédaction minimales à respecter pour que la forme soit au service du fond, et pas un frein à votre raisonnement. Si la forme n'est jamais le plus important, une mauvaise rédaction dessert suffisamment votre argumentation pour pénaliser à votre copie. Il est donc essentiel de suivre quelques règles de rédaction, en particulier en devoir, concernant vos exercices.

- **Numéroter les questions.** Votre copie doit être lisible et structurée. Les sujets de DST et de concours peuvent être très longs, et donc numéroter lisiblement et correctement vos questions est essentiel pour ne pas perdre votre examinateur (et donc des points).
- **Encadrer les résultats.** Les rapports de jury sont formels. Les résultats doivent être encadrés. Tous les résultats.
- **Faire des réponses complètes.** Si la question comporte deux questions (La matrice $P$ est-elle inversible ? Si oui, calculer $P^{-1}$) la réponse devra contenir deux réponses, et une phrase complète (La matrice $P$ est inversible et $P^{-1} = ...$). Et toute réponse sera, bien entendu, encadrée.
- **Ecrire avec application et lisiblement.** Si votre écriture est illisible, vous ne serez pas corrigés. Si l'examinateur a un doute et ne parvient pas à lire un opérateur, un indice, une ligne de calcul, vous perdez des points. Dans le doute, vous serez sanctionnés. Vous devez faire en sorte d'être lisibles.
- **Faire des phrases complètes et simples.** Une phrase, ça commence par une majuscule, ça contient un sujet, un verbe, un complément, de la ponctuation, et ça finit par un point. Faites simple. Trois petites phrases simples valent mieux qu'un paragraphe de 15 lignes.
- **Utiliser les quantificateurs.** Un raisonnement mathématique ne peut se faire proprement sans utilisation des quantificateurs. Lorsqu'une variable apparait dans vos calculs, cette dernière doit être quantifiée. Ce n'est pas pour faire joli, ce n'est pas une option. Prenez exemple sur les corrigés de cet ouvrage.
- **Citer les hypothèses et les noms des théorèmes.** Lorsque vous rédigez un raisonnement qui fait intervenir un théorème ou une propriété, citez complètement les hypothèses associées et les conclusions obtenues. Il est important que l'on sache à quoi vous faites référence, et que vous ayez vérifié que vous vous trouvez dans un cadre d'application de ce théorème.
- **On évite les arnaques.** L'élève de lycée est vite tenté de bluffer quand il n'est pas sûr. Les arnaques, ça ne passe jamais, ça ne rapporte jamais aucun point, ça peut mettre votre examinateur de mauvaise humeur et vous faire perdre sa confiance, et donc des points ailleurs. Vous n'apprenez rien en tentant des arnaques à la volée. Faites les choses bien, ou ne les faites pas.

Vous pouvez utiliser les devoirs de cet ouvrage pour améliorer votre rédaction. Les corrigés détaillés sont rédigés avec une exigence souvent supérieure à celle des concours, et de nombreuses remarques sont faites sur les différentes erreurs de rédaction à ne pas faire. Lorsque vous préparez ces devoirs, rédigez les complètement afin de progresser aussi en rédaction.

## Informatique

L'informatique est parfois laissé de côté par les candidats qui décident de faire l'impasse, négligeant les conséquences sur le jury et la note finale. On notera par exemple diverses mentions de l'informatique dans les rapports de jury de concours, qui montrent que les candidats, mêmes lors des concours les plus exigeants, manipulent très mal des concepts pourtant basiques d'informatique, voire ne traitent pas du tout les questions.

- EML BS 2023 : « **Informatique :** De manière générale, ces questions ont été étonnamment peu traitées. Trop de copies restent vagues sur le sens des variables [...]. Question qui n'a quasiment jamais été bien traitée. [...] Question bien mal traitée dans l'ensemble. »
- ESSEC - HEC 2023 : « On rencontre beaucoup d'erreurs dans les paramètres de la fonction « range »[...]. Le dernier test est souvent écrit à l'envers [...] ce qui démontre une mauvaise conception du rôle du test, et surtout du mot-clé 'return'. »
- ESSEC - HEC 2024 : L'informatique comptait pour 8% de la note finale (ce qui fait tout de même $1,6$ point). Mais cette ampleur devient bien plus grande quand on considère la phrase suivante : « Pour avoir 20, il fallait traiter correctement environ 40% du devoir, pour avoir 16, 25% ». On remarquera tout de suite que nos 8% de points « faciles et attendus »peuvent rapidement devenir 20% d'une excellente copie et ouvrir la voie des écoles les mieux classées.
- ESCP - HEC 2024 : L'informatique comptait pour 13% de la note finale (ce qui fait tout de même 2.6 points). Mais cette ampleur devient bien plus grande quand on considère la phrase suivante : « Pour avoir 20, il fallait traiter correctement environ 52% du devoir, pour avoir 16, 36% ».

Il est donc vivement conseillé de travailler régulièrement et assidument l'informatique. À l'écrit, tous les sujets de concours contiennent des questions d'informatique, et ces dernières comptent pour entre 8% à 15% de la note. À l'oral, la proportion d'exercices qui contiennent des questions de Python est importante et le petit nombre de questions fait peser l'informatique très lourd dans la note finale.

# Table des notions par devoir

| Numéro de sujet | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Algèbre | | | ■ | | ■ | | | | | ■ | | | | | |
| Analyse | ■ | ■ | | | | | | ■ | ■ | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| Applications | | | | | | | | | ■ | | | | ■ | | |
| Applications linéaires | | | | | | | | | | | | | | | |
| Bases d'arithmétique | ■ | | | | | | | | ■ | | | | | | |
| Calculs de limites | | | | | | | | ■ | ■ | | ■ | ■ | | ■ | ■ |
| Calculs matriciels | ■ | | ■ | | ■ | | | | | ■ | | | | | |
| Convexité | | | | | | | | ■ | | | | | | ■ | |
| Dénombrement | | | | | | ■ | | | | | | | | | |
| Développements limités | | | | | | | | | | | | | | | |
| Dimension | | | | | | | | | | | | | | | |
| Espaces vectoriels | | | | | | | | | | | | | | | |
| Etude de fonctions | | ■ | | | | | | | ■ | | ■ | | ■ | ■ | ■ |
| Etude de suites | ■ | ■ | ■ | | | | | ■ | | ■ | ■ | ■ | | | ■ |
| Indépendance | | | | | | | ■ | | | | | ■ | | | |
| Intégrales sur un ouvert | | | | | | | | | | | | | | | |
| Intégrales sur un segment | | | | | | | | | | | | | | | |
| Polynômes | | | | | | | | | | ■ | | | ■ | | |
| Probabilités | | | | | | | ■ | | | ■ | | ■ | ■ | | |
| Probabilités discrètes finies | | | | | | | ■ | | | ■ | | ■ | ■ | | |
| Raisonnement par l'absurde | | | | ■ | ■ | | | | ■ | | | | ■ | | |
| Raisonnement par récurrence | ■ | ■ | ■ | | ■ | | | | | ■ | | | | | ■ |
| Séries | | | | | | | | | | | | | | | |
| Sommes et produits | ■ | ■ | ■ | | | | | ■ | | | | | ■ | | |
| Théorie des ensembles | | | | ■ | | | | | | | | ■ | | | |
| Variables aléatoires finies | | | | | | | | | | | | | ■ | | |
| Variables aléatoires infinies | | | | | | | | | | | | | | | |
| Informatique | ■ | ■ | ■ | | | | | ■ | | ■ | ■ | ■ | ■ | | ■ |

| Numéro de sujet | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Algèbre | | ■ | | ■ | ■ | | ■ | | | | ■ | | | ■ | |
| Analyse | ■ | ■ | | ■ | | ■ | | ■ | | ■ | | ■ | ■ | ■ | |
| Applications | | | | | ■ | | ■ | | | | ■ | | | ■ | |
| Applications linéaires | | | | | ■ | | ■ | | | | ■ | | | ■ | |
| Bases d'arithmétique | | | | | | | | | | | | | | | |
| Calculs de limites | ■ | | | | | ■ | | ■ | | ■ | | ■ | ■ | ■ | |
| Calculs matriciels | | ■ | | | | | ■ | | | | ■ | | | | |
| Convexité | | | | | | | | ■ | | | | ■ | | | |
| Dénombrement | | | ■ | | | | | | | | | | | | ■ |
| Développements limités | | | | | | | | | | ■ | | ■ | | ■ | |
| Dimension | | | | ■ | ■ | | ■ | | | | ■ | | | ■ | |
| Espaces vectoriels | | ■ | | ■ | ■ | | ■ | | | | ■ | | | ■ | |
| Etude de fonctions | ■ | ■ | | ■ | | | | ■ | | ■ | | ■ | ■ | ■ | |
| Etude de suites | | ■ | | ■ | | ■ | | ■ | | | | ■ | | | |
| Indépendance | | | ■ | | | | | | ■ | | | | | | ■ |
| Intégrales sur un ouvert | | | | | | | | | | ■ | | ■ | | | |
| Intégrales sur un segment | | | | ■ | ■ | | | ■ | | ■ | | ■ | | ■ | |
| Polynômes | | ■ | | ■ | ■ | | | | | | ■ | | ■ | ■ | |
| Probabilités | | | ■ | | | ■ | | | ■ | | | | ■ | | ■ |
| Probabilités discrètes finies | | | ■ | | | | | | ■ | | | | ■ | | ■ |
| Raisonnement par l'absurde | | | | ■ | ■ | ■ | | | | | | ■ | | | |
| Raisonnement par récurrence | | ■ | | ■ | | ■ | | | | | | ■ | | | |
| Séries | | | | | | ■ | | ■ | ■ | | | | | | ■ |
| Sommes et produits | | | | ■ | | ■ | ■ | ■ | ■ | | ■ | | ■ | | ■ |
| Théorie des ensembles | | ■ | | | | | | | | | | | | | |
| Variables aléatoires finies | | | ■ | | | | | | ■ | | | | ■ | | ■ |
| Variables aléatoires infinies | | | | | | ■ | | | ■ | | | | | | ■ |
| Informatique | ■ | | | ■ | | ■ | ■ | ■ | ■ | | | ■ | | | ■ |

# DEVOIRS

# Devoir 1

## Suite de Fibonacci

### Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Analyse, bases d'arithmétique, calculs matriciels, étude de suites, raisonnement par récurrence, sommes et produits.

**Informatique :** Boucles, demander la valeur d'une variable.

**Théorèmes importants :** Formule du binôme.

**Durée :** 1h30.

---

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la **suite de Fibonacci**, définie par :

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,.$$

**1.** Ecrire, en langage Python, un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel $n$ puis qui calcule et affiche la valeur de $a_n$.

**2.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_n$ est un entier naturel non nul.

**3.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$, $A^3$, $A^4$ et $A^5$.

**4.** **a.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**b.** Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels non nuls. En observant le produit des matrices $A^p$ et $A^q$, montrer que :

$$a_{p+q} = a_p a_{q+1} + a_{p-1} a_q\,.$$

**c.** En déduire que si $r$ est un entier naturel qui divise à la fois $a_p$ et $a_q$ alors $r$ divise $a_{p+q}$.

**d.** Soit $p$ un entier naturel non nul. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_p$ divise $a_{np}$.

**5.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 5. Montrer que si $n$ est un entier naturel qui n'est pas premier, alors $a_n$ n'est pas un nombre premier.

**6.** On peut calculer $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$. Que penser alors de la réciproque de la propriété montrée en **5.** ?

**7.** **a.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

**b.** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_{2n} = \frac{2}{4^n}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}5^p\,.$$

# Devoir 2

## Nombres de Catalan

### Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Analyse, étude de fonctions, étude de suites, raisonnement par récurrence, sommes et produits.

**Informatique :** Boucles, demander la valeur d'une variable.

**Durée :** 1h30.

---

On définit la suite des **nombres de Catalan** par récurrence comme étant la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$C_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\,.$$

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\gamma_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ \gamma_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}\gamma_n\,.$$

Pour tout entier naturel $n$, on pose $P_n$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} x^{k+1}\,.$$

**1.** Ecrire, en langage Python, un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer la valeur d'un entier naturel $n$ puis qui calcule et affiche $\gamma_n$.

**2.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,, \quad x^{n+2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) = P_n(x)\,.$$

**3.** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n'(1) = \frac{n+2}{2} P_n(1)\,.$$

**4.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}'(x) = \gamma_{n+1} + 4xP_n'(x) - 2P_n(x)\,.$$

**5.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ P_n(1) = \gamma_{n+1}$.

**6.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ C_n = \gamma_n$.

**7.** En déduire enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,.$$

# Devoir 3

## Puissance matricielle

### Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Algèbre, calculs matriciels, étude de suites, raisonnement par récurrence, sommes et produits.

**Informatique :** Boucles, demander la valeur d'une variable.

**Théorèmes importants :** Formule du binôme.

**Durée :** 2h00.

---

Soit $M$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce problème est de calculer, de trois manières différentes, la matrice $M^n$ pour $n$ un entier naturel. Dans tout le problème, on notera $I_3$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les trois parties de ce sujet sont INDÉPENDANTES.

### Partie A : Par la formule du binôme.

Dans cette partie uniquement, on considère $J$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** Montrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J^k = 3^{k-1} J\,.$$

**2.** Exprimer la matrice $M$ en fonction des matrices $J$ et $I_3$.

**3.** En utilisant la formule du binôme, déterminer, pour tout entier naturel $n$, les coefficients de la matrice $M^n$ en fonction de $n$.

### Partie B : Par une matrice diagonale.

Dans cette partie uniquement, on considère $P$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** Calculer $P^3 - P^2 + 3I_3$. En déduire que la matrice $P$ est inversible et déterminer son inverse $P^{-1}$.

**2.** Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Que peut-on dire de la matrice $D$ ?

**3.** Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}\,.$$

**4.** En déduire une expression, pour tout entier naturel $n$, des coefficients de la matrice $M^n$ en fonction de $n$.

## Partie C : Par les suites.

**1.** Montrer qu'il existe $a$ et $b$ deux réels que l'on déterminera tels que :

$$M^2 = aM + bI_3\,.$$

**2.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, il existe $a_n$ et $b_n$ deux réels tels que :

$$M^n = a_nM + b_nI_3\,.$$

On donnera les premiers termes des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ et, pour tout entier naturel $n$, une expression de $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.

**3.** Ecrire, en langage Python, un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel $n$ puis qui calcule et affiche les valeurs de $a_n$ et $b_n$.

**4.** On pose alors $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2a_n + b_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 5a_n + b_n\,.$$

**a.** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont géométriques.

**b.** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, une expression de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

**c.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

**5.** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, les coefficients de la matrice $M^n$ en fonction de $n$.

# Devoir 4

## Différence symétrique

### Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Raisonnement par l'absurde, théorie des ensembles.

**Durée :** 1h30.

Soit $\Omega$ un ensemble. Soient $A$, $B$ et $C$ des parties de $\Omega$. On note $A\Delta B$ la **différence symétrique** de $A$ et $B$, c'est-à-dire l'ensemble suivant :

$$A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)\,.$$

Dans tout l'exercice, si $M$ est une partie de $\Omega$ alors on note $\overline{M}$ son complémentaire dans $\Omega$, c'est-à-dire :

$$\overline{M} = \complement_\Omega(M)\,.$$

**1.** Montrer que : $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

**2.** Montrer les égalités suivantes :

- **a.** $A\Delta B = B\Delta A$.
- **b.** $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$.
- **c.** $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.

**3.** Calculer $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$ et $A\Delta\Omega$.

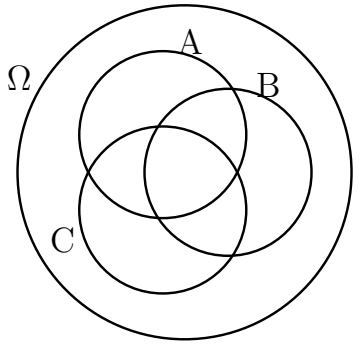
**4.** Montrer que :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)\,.$$

**5.** Montrer que :

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C\,.$$

**6.** Sur le diagramme suivant, colorier les parties représentant $A\Delta(B\Delta C)$.



# Racine et commutant d'une matrice

## Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Algèbre, calculs matriciels, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence.

**Durée :** 1h00.

---

Dans tout cet exercice, $I_3$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M$ et $P$ sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## PARTIE A : Préliminaires.

**1.** Calculer $P^3 - P^2 - 2P$.

**2.** En déduire que la matrice $P$ est inversible et déterminer sa matrice inverse $P^{-1}$.

**3.** Calculer $D = P^{-1}MP$. Que dire de la matrice $D$ ?

## PARTIE B : Commutant d'une matrice.

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on appelle **commutant** de $A$, noté $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent au produit avec $A$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

L'objectif de cette partie est de déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{C}(M)$.

**1.** Déterminer $\mathcal{C}(D)$ où $D$ est la matrice déterminée dans la question **A.3**.

**2.** Dans cette question uniquement, $N$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**a.** Montrer que : $N \in \mathcal{C}(M) \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}NP \in \mathcal{C}(D)$.

**b.** En déduire que : $\mathcal{C}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -x+2z & x+y-2z & x-y \\ -x+z & x+y-z & x-y \\ -x+z & x-z & x \end{pmatrix} \;\middle|\; (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

## PARTIE C : Racine carrée.

Soit $n$ un entier naturel non nul et soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **racine carrée** de $A$, si elle existe, toute matrice $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.

**1.** On suppose que $M$ admet au moins une racine carrée $R$.

**a.** Montrer que $M$ et $R$ commutent.

**b.** En déduire qu'il existe $H$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $H = P^{-1}RP$ et $H^2 = D$.

**2.** La matrice $M$ admet-elle des racines carrées ? Si oui, combien ?

# Devoir 6

## Voyage au pays des Bidouillis

### Présentation du devoir

**Remarque :** La question **4.** de ce devoir est une question de recherche plus difficile.

**Thèmes abordés :** Dénombrement.

**Durée :** 1h30.

---

Dans le monde des **Bidouillis**, il existe trois couleurs de **Bidouillis** : les **Bidouillis** bleus, les rouges et les verts. Une salle de classe compte 6 **Bidouillis** bleus, 8 **Bidouillis** rouges et 4 **Bidouillis** verts. Le sport préféré des **Bidouillis** est le **Kouach**.

Pour faire un match de **Kouach**, il faut trois équipes : l'équipe numéro 1 doit contenir 5 **Bidouillis** mais aucun **Bidouilli** rouge, l'équipe numéro 2 doit contenir 4 **Bidouillis** dont au moins un **Bidouilli** de chaque couleur et l'équipe numéro 3 doit contenir 3 **Bidouillis** qui ne sont pas tous de la même couleur. Dans ces équipes, l'ordre des **Bidouillis** n'a pas d'importance.

1. Combien d'équipes numéro 1 différentes, c'est-à-dire contenant des élèves **Bidouillis** différents, peut-on construire dans cette classe ?
2. Combien d'équipes numéro 2 différentes, c'est-à-dire contenant des élèves **Bidouillis** différents, peut-on construire dans cette classe ?
3. Combien d'équipes numéro 3 différentes, c'est-à-dire contenant des élèves **Bidouillis** différents, peut-on construire dans cette classe ?
4. [**Difficile**] On considère que deux matchs de **Kouach** sont différents si au moins une équipe constituée dans le premier match ne contient pas les mêmes élèves **Bidouillis** que dans le second match. Combien de matchs de **Kouach** différents peut-on jouer dans cette classe ?

Dans la suite du devoir on ne considère plus que les **Bidouillis** bleus et les **Bidouillis** rouges. Il est de convention sociale, chez les **Bidouillis**, de toujours venir aux repas accompagné d'un **Bidouilli** de l'autre couleur, formant ainsi un duo de **Bidouillis**. Un grand repas est organisé dans le monde des **Bidouillis**, où se rendent $n$ duos de **Bidouillis**, où $n$ est un entier naturel non nul, qui doivent s'organiser autour d'une grande table ronde dont les sièges sont numérotés du siège 1 au siège $2n$.

5. De combien de manières peuvent se répartir les **Bidouillis** invités autour de la table (deux répartitions sont considérées différentes si il existe un **Bidouilli** qui n'a pas le même siège dans ces deux répartitions) ?
6. De combien de manières peuvent se répartir les **Bidouillis** invités autour de la table, en respectant une alternance de couleurs ?
7. De combien de manières peuvent se répartir les **Bidouillis** invités autour de la table de manière à ce que les **Bidouillis** membres d'un même duo soient toujours côte-à-côte ?

# Évènements et probabilités

## Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Indépendance, probabilités, probabilités discrètes finies.

**Théorèmes importants :** Formule des probabilités totales.

**Durée :** 1h30.

---

Une usine possède deux chaines de production. Grâce à des tests effectués par des ingénieurs de l'usine, il s'avère que 5% des objets produits par la chaine de production $A$ sont défectueux, de même que 10% des objets produits par la chaine de production $B$.

**1.** Dans cette question uniquement, on fait tourner les deux chaines de production de l'usine pendant une journée. En fin de journée, une étude révèle que 7% des objets produits par l'usine sont défectueux.

   **a.** On choisit un objet produit par l'usine. Quelle est la probabilité $p$ que cet objet ait été produit par la chaine de production $A$ ?

   **b.** On choisit au hasard un objet défectueux produit par l'usine. Quelle est la probabilité que cet objet ait été produit par la chaine de production $A$ ?

**2.** Dans cette question uniquement, on fait fonctionner la chaine de production $A$ de l'usine pour qu'elle produise $n$ objets, où $n$ est un entier naturel non nul. Quelle est la plus petite valeur que l'on peut donner à $n$ pour être certain, avec au moins 90% de certitude, qu'au moins un des objets produits est défectueux ?

**3.** Dans cette question uniquement, on fait fonctionner au hasard la chaine de production $A$ ou la chaine de production $B$ de l'usine pour que la chaine choisie produise $n$ objets, où $n$ est un entier naturel non nul. Quelle est la probabilité que les $n$ objets soient sans défaut ?

**4.** Dans cette question uniquement, on produit $n$ objets, où $n$ est un entier naturel tel que $n \geq 3$, en respectant le protocole suivant : le premier objet est produit par la chaine de production $A$. Tant que les objets produits ne sont pas défectueux, on continue d'utiliser la chaine de production $A$. Si un objet est défectueux, on change alors de chaine de production pour utiliser la chaine de production $B$ jusqu'à la fin de la production, que les objets produits soient défectueux ou non. Quelle est alors la probabilité d'obtenir exactement un objet défectueux durant la production de ces $n$ objets ?

**5.** Dans cette question uniquement, des ingénieurs de l'usine conçoivent une nouvelle chaine de production $C$ pour laquelle la proportion d'objets défectueux produits est un réel $q$ tel que $q \in ]0;1[$.

   **a.** Les ingénieurs lancent alors la production sur la chaine de production $C$ jusqu'à produire un objet défectueux. Exprimer, pour tout entier naturel $n$ non nul, la probabilité $p_n$ que l'on ait ainsi fabriqué $n$ objets en fonction de $q$ et $n$.

   **b.** Quelles sont les valeurs que peut prendre $q$ pour que l'on produise ainsi strictement plus de 10 objets dans au moins 90% des cas ?

# Devoir 8

## Suites définies par des sommes

### Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Analyse, calculs de limites, convexité, étude de suites, sommes et produits.

**Informatique :** Bibliothèque numpy, boucles, calculs de sommes et produits, demander la valeur d'une variable, tableaux unidimensionnels.

**Durée :** 1h30.

---

**1.** On considère $(H_n)$, $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \ ; \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = H_n - \ln(n) \ \ ; \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{n}\,.$$

- **a.** Montrer que : $\forall x \in ]-1;+\infty[,\ \ \ln(1+x) \leq x$.
- **b.** Etudier les variations des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
- **c.** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une même limite que l'on note $\gamma$. Montrer que $\gamma > 0$.
- **d.** La suite $(H_n)$ est-elle convergente ?

**2.** On considère $(S_n)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

- **a.** Ecrire, en langage Python, un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel non nul $n$ puis qui calcule et affiche la valeur de $S_n$.
- **b.** Montrer que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.
- **c.** Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(S_n)$ ?

**3.** Soit $(w_n)$ une suite réelle et $(T_n)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} w_n\,.$$

- **a.** Montrer que si la suite $(T_n)$ converge, alors la suite $(w_n)$ converge vers 0.
- **b.** La réciproque est-elle vraie ?

**4. Moyenne de Cesàro.** Soit $(x_n)$ une suite réelle et $(C_n)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,.$$

- **a.** Montrer que si $(x_n)$ converge vers $L$, alors $(C_n)$ converge vers $L$.
- **b.** Montrer que si la suite $(x_n)$ est bornée, alors la suite $(C_n)$ est bornée.
- **c.** Montrer que si la suite $(x_n)$ est croissante, alors la suite $(C_n)$ est croissante.

# Exemples d'applications

## Présentation du devoir

**Remarque :** Les trois parties de ce devoir sont indépendantes et peuvent être traitées séparément. Le niveau de difficulté est croissant.

**Thèmes abordés :** Analyse, applications, bases d'arithmétiques, calculs de limites, étude de fonctions, raisonnement par l'absurde.

**Théorèmes importants :** Théorème des valeurs intermédiaires.

**Durée :** 1h30 [30 min / 30 min / 30 min].

## PARTIE A : Deux fonctions réelles.

Dans cette partie, on considère $f$ et $g$ les applications définies par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} ]1;+\infty[ & \longrightarrow & ]2;+\infty[ \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+3}{x-1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & ]1;+\infty[ \\ x & \longmapsto & e^{2x}+1 \end{array} \right. .$$

1. Vérifier que les fonctions $f$ et $g$ données dans l'énoncé sont correctement définies.
2. Montrer que les fonctions $f$ et $g$ réalisent des bijections et déterminer leurs bijections réciproques.
3. Que peut-on dire de la fonction $f \circ g$ ?

## PARTIE B : Avec la partie entière.

Dans cette partie, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$ et on considère $L$ l'application définie par :

$$L : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor \end{array} \right. .$$

1. Soit $k$ un entier relatif. Dresser le tableau de variations de $L$ sur l'intervalle $[k; k+1[$. On précisera les limites aux bornes de cet intervalle.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction $L$ sur $[-4; 4]$.
3. L'application $L$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

## PARTIE C : En lien avec l'irrationnalité.

Dans cette partie, on considère $\varphi$ l'application définie par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a;b) & \longmapsto & a + b\sqrt{2} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. Montrer que : $\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varphi(a;b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a;b) = (0;0)$.
3. L'application $\varphi$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

# Devoir 10

## Chaîne de Markov

### Présentation du devoir

**Thèmes abordés :** Algèbre, calculs matriciels, étude de suites, polynômes, probabilités, probabilités discrètes finies, raisonnement par récurrence.

**Informatique :** Bibliothèque numpy, bibliothèque numpy.random, boucles, définition d'une fonction, simulation aléatoire, statistiques, tableaux unidimensionnels.

**Théorèmes importants :** Formule des probabilités totales.

**Durée :** 2h00.

---

Doudou le Hamster dort, mange ou joue. Chaque heure qui passe, il décide de changer, ou non, d'activité selon un protocole bien précis.

- Si Doudou dormait durant l'heure précédente, il décide de dormir durant l'heure suivante dans 60% des cas, de manger durant l'heure suivante dans 20% des cas et de jouer durant l'heure suivante dans 20% des cas.
- Si Doudou mangeait durant l'heure précédente, il décide de dormir durant l'heure suivante dans 20% des cas, de manger durant l'heure suivante dans 40% des cas et de jouer durant l'heure suivante dans 40% des cas.
- Si Doudou jouait durant l'heure précédente, il décide de dormir durant l'heure suivante dans 20% des cas, de manger durant l'heure suivante dans 40% des cas et de jouer durant l'heure suivante dans 40% des cas.

Dans tout l'exercice, on considère les heures représentées par un entier naturel $n$, en sachant que durant l'heure 0, Doudou choisit aléatoirement et de manière équiprobable de dormir, manger ou jouer. On note alors, pour tout entier naturel $n$, $A_n$, $B_n$ et $C_n$ les évènements suivants :

- $A_n$ : « Doudou dort durant l'heure $n$ ».
- $B_n$ : « Doudou mange durant l'heure $n$ ».
- $C_n$ : « Doudou joue durant l'heure $n$ ».

On note aussi, pour tout entier naturel $n$, $a_n$, $b_n$ et $c_n$ les probabilités respectives des évènements $A_n$, $B_n$ et $C_n$. On admet alors que les suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ sont constituées de termes strictement positifs. On considère alors les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**1.** **a.** Ecrire, en langage Python, une fonction `simulation` qui prend en entrée un entier naturel $n$, qui simule cette expérience et qui renvoie en sortie 0 si durant l'heure $n$ de cette simulation, Doudou dort, 1 si durant l'heure $n$ de cette simulation, Doudou mange et 2 si durant l'heure $n$ de cette simulation, Doudou joue.

**b.** On propose alors le programme suivant, écrit en langage Python.

```
n = 100
S = np.array([simulation(n) for i in range(1000)])
F = np.array([0,0,0])
for i in range(1000) :
    F[S[i]] = F[S[i]] + 1
print(F/1000)
```

A l'exécution du programme, le résultat suivant est renvoyé dans la console Python :

```
[0.342 0.319 0.339]
```

Proposer une interprétation de ce résultat.

**2.** Soit $Q(X) = X(X-1)(5X-2)$. Montrer que le polynôme $Q$ est un polynôme annulateur de la matrice $M$.

**3.** Soit $n$ un entier naturel. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H_n$ et un unique triplet de réels $(\alpha_n; \beta_n; \gamma_n)$ tels que :

$$X^n = Q(X)H_n(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n \,.$$

**4.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, le triplet $(\alpha_n; \beta_n; \gamma_n)$ est solution du système suivant :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} \gamma_n & = & 0 \\ \alpha_n + \beta_n + \gamma_n & = & 1 \\ 4\alpha_n + 10\beta_n + 25\gamma_n & = & 25\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \end{cases} .$$

**5.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression des coefficients de la matrice $M^n$ en fonction de $n$.

**6.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 0,6a_n + 0,2b_n + 0,2c_n \,.$$

**7.** Exprimer de la même manière, pour tout entier naturel $n$, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.

**8.** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n \,.$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0 \,.$$

**9.** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, une expression de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.

**10.** Commenter le résultat obtenu dans la question précédente. Ce résultat est-il en accord avec les résultats obtenus dans la question **1.b** de cet exercice ?