

Matthieu Marouby

MATHS ET INFORMATIQUE

BCPST 2

TOUT-EN-UN

l'intelligence

DUNOD

Relecture scientifique : Julien Lequeurre, Olivier Archer et Laurent Bras

Couverture : création Hokus Pokus, adptation studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepasse>

© Dunod, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088655-5

Table des matières

Avant-propos.....	v
-------------------	---

Analyse

1 Séries réelles.....	1
2 Intégrales généralisées	37
3 Équations différentielles.....	81

Algèbre

4 Polynômes	107
5 Espaces vectoriels	137
6 Applications linéaires.....	171
7 Valeurs propres, vecteurs propres.....	219
8 Géométrie	269

Probabilités

9 Concepts de base des probabilités.....	311
10 Variables aléatoires réelles discrètes	357
11 Couples de variables aléatoires discrètes.....	415
12 Variables aléatoires à densité.....	485
13 Théorèmes limites	551

Annexes

14 Éléments d'informatique.....	591
15 Formulaire et tables.....	613

Avant-propos

L'ouvrage que vous tenez entre les mains s'adresse aux élèves de deuxième année de BCPST. Il couvre l'intégralité du programme 2021 de mathématiques. Bien que le programme d'informatique ne soit pas traité dans son ensemble, les principaux algorithmes classiques sont rappelés en annexe. De plus, lorsque cela s'y prêtait, des éléments d'informatique ont été intégrés aux cours et aux exercices de mathématiques.

Ce livre n'a pas vocation à remplacer les notes que vous prendrez en cours ou les documents pédagogiques qui vous auront été distribués, ni à se substituer aux interactions avec un professeur. Il doit être considéré comme un complément, apportant un regard supplémentaire pour enrichir votre compréhension des concepts abordés.

Il est structuré en trois grandes parties et une annexe qui recouvrent l'essentiel du programme : analyse, algèbre, probabilités, ainsi qu'une section d'annexes comprenant un rappel des algorithmes usuels et un formulaire.

Chaque chapitre se compose de cinq sections :

- **Le cours**, avec les démonstrations essentielles permettant d'éclairer la compréhension des concepts et d'explicitier les hypothèses des théorèmes et propositions.
- **Les méthodes à maîtriser** illustrées par des exemples détaillés représentatifs des situations rencontrées dans les exercices.
- **Une interro de cours** conçue pour vérifier votre capacité à mobiliser l'essentiel des connaissances et à répondre à des questions courtes.
- **Une large sélection d'exercices**, classés par difficulté croissante. Cette section est divisée en deux parties :
 - *Pour s'entraîner* : des exercices permettant d'acquérir et de consolider les méthodes classiques.
 - *Pour aller plus loin* : des exercices plus ambitieux, proches de ceux rencontrés en concours.

De nombreux exercices utilisent des notions vues en première année et sont l'occasion de faire un point sur vos acquis.

- **La correction détaillée des exercices.**

Tout au long de l'ouvrage, les symboles suivants sont utilisés :



signale un éclairage particulier ou complémentaire sur le point évoqué ;



met en garde contre un piège fréquent à éviter ou insiste sur un point clé dont la compréhension est parfois ardue.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à l'amélioration de cet ouvrage. Je remercie tout d'abord mes élèves, dont les retours m'ont permis d'affiner mes explications et d'améliorer les exercices. Je n'oublie pas mes éditeurs, Emmanuelle Chatelet et Brice Martin dont les commentaires m'ont permis de nettement éclaircir certains de mes propos. Merci ensuite à Mathieu Leroy-Lerêtre pour son aide précieuse sur la partie informatique. Je remercie également mes proches collègues Olivier Archer et Laurent Bras qui ont partagé avec moi leurs documents de cours, enrichi mes réflexions au cours de nombreuses discussions tout au long de ces dernières années et relu cet ouvrage. Enfin, un immense merci à Julien Lequeur, qui a accepté de relire l'intégralité du livre et dont la rigueur mathématique et les remarques pertinentes ont été une source d'inspiration.

Séries réelles

Le cours

■ 1 Définitions et convergence

Définition

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite définie à partir de n_0 .

On appelle série de terme général u_n la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ définie par, pour $N \geq n_0$,

$$S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

On dit que u_n est le terme d'indice n de la série, on parle de terme général, et S_N sa somme partielle d'ordre N . On note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$ la série de terme général u_n .

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ des sommes partielles converge. La limite de cette suite est appelée somme de la série et est notée

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Déterminer la nature de la série consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.



Remarquons que, pour tous $N_1 \geq n_0$ et $N \geq N_1$, on a

$$\sum_{n=N_1}^N u_n = S_N - S_{N_1-1}.$$

Ainsi, peu importe à partir de quel rang la somme commence, la nature de la série sera la même. Cependant, la valeur de la somme de la série sera évidemment différente.

Proposition

Si la série de terme général u_n converge, **alors** la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

DÉMONSTRATION. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0 + 1$. Il suffit de remarquer que $S_N - S_{N-1} = u_N$. Si la série de terme général u_n converge vers une limite S , alors on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S$ et aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{N-1} = S.$$

On a donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N - S_{N-1} = 0$, autrement dit $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = 0$. □



Attention à lire correctement la proposition précédente : **il s'agit d'une implication et surtout pas d'une équivalence**. On trouvera un contre-exemple incontournable un peu plus tard.

L'expression contraposée de cette proposition est peut-être plus utile.

Corollaire

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série de terme général u_n est divergente.



Dans ce cas, on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Proposition

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$, $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles et λ, μ deux réels.

Si les séries de terme général respectif u_n et v_n sont convergentes, alors la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

DÉMONSTRATION. Considérons, pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=n_0}^N (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^N u_n + \mu \sum_{n=n_0}^N v_n.$$

Si les deux sommes du terme de droite de l'égalité convergent lorsque $N \rightarrow +\infty$, alors le terme de gauche de l'égalité converge aussi et en passant à la limite, on obtient bien

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

□



Les deux théorèmes suivants ont une hypothèse soit d'inégalité, soit d'équivalence, mais ne concernent que la nature d'une série. Ainsi, même si ces hypothèses ne sont pas vraies pour tous les termes mais seulement à partir d'un certain rang, la conclusion reste vraie.

Théorème de comparaison pour deux séries à termes positifs

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles telles qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, tel que $\forall n \geq n_1$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- (1) Si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente.
- (2) Si la série de terme général u_n est divergente, alors la série de terme général v_n est divergente.

DÉMONSTRATION. Notons, pour tout $N \geq n_1$, $S_N = \sum_{n=n_1}^N u_n$ et $T_N = \sum_{n=n_1}^N v_n$.

Remarquons que, pour tout $N \geq n_1$, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ et $T_{N+1} - T_N = v_{N+1} \geq 0$. Autrement dit, les suites $(S_N)_{N \geq n_1}$ et $(T_N)_{N \geq n_1}$ sont croissantes.

On a, pour tout $n \in \llbracket n_1, N \rrbracket$, $u_n \leq v_n$. Ainsi, en ajoutant toutes ces inégalités, on obtient

$$\sum_{n=n_1}^N u_n \leq \sum_{n=n_1}^N v_n,$$

autrement dit $S_N \leq T_N$.

- (1) Si la série de terme général v_n est convergente, alors $(T_N)_{N \geq n_1}$ est convergente, et on a,

$$\text{pour tout } N \geq n_1, T_N \leq \sum_{n=n_1}^{+\infty} v_n.$$

$$\text{Ainsi, on a, pour tout } N \geq n_1 \in \mathbb{N}, S_N \leq \sum_{n=n_1}^{+\infty} v_n.$$

Ainsi, la suite $(S_N)_{N \geq n_1}$ est majorée. Comme elle est aussi croissante, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente. Autrement dit la série de terme général u_n est convergente.

- (2) Si la série de terme général u_n est divergente, alors $(S_N)_{N \geq n_1}$ est une suite croissante diver-

gente, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$.

Or on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N \leq T_N$.

Par minoration, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = +\infty$. La série de terme général v_n est divergente.

Notons enfin que, bien entendu, si on a la nature de la série de terme général u_n , il suffit d'échanger les rôles de u_n et v_n . □



Remarquons que, au passage, nous avons montré que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante.

Théorème de convergence pour deux séries à termes positifs équivalents

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles positives.

Si on a $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

DÉMONSTRATION. Comme les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_n)_{n \geq n_1}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$ tels que $\forall n \geq n_1, u_n = \alpha_n v_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de limite, il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $\forall n \geq n_2, |\alpha_n - 1| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{3}{2}$.

En multipliant le tout par $v_n \geq 0$ on a donc $\frac{1}{2}v_n \leq \alpha_n v_n \leq \frac{3}{2}v_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_2, \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$.

Si la série de terme général v_n est convergente, alors celle de terme général $\frac{3}{2}v_n$ aussi et par le théorème précédent, celle de terme général u_n est convergente.

Si la série de terme général v_n est divergente, alors celle de terme général $\frac{1}{2}v_n$ aussi et par le théorème précédent, celle de terme général u_n est divergente.

Les séries sont donc de même nature. $\square$



Notons que si, pour tout $n \geq n_2, v_n \geq 0$, comme pour tout $n \geq n_2, \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$,

on a pour tout $n \geq n_2, u_n \geq 0$.

Ainsi, on a en réalité besoin du signe d'une seule de ces séries.

Enfin, notons que s'il s'agit de séries à termes négatifs, il suffit de considérer les séries de terme général $-u_n$ et $-v_n$ (qui sont positives) avant d'appliquer le résultat.

Définition

On considère une série de terme général u_n . On dit que la série est absolument convergente si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Dans ce cas, on dit aussi que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Proposition

Considérons une série de terme général u_n .

Si la série est absolument convergente, alors elle est aussi convergente.

DÉMONSTRATION. Considérons une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

Notons, pour tout $n \geq n_0, u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.

Remarquons ainsi, que pour tout $n \geq n_0, u_n^+ \geq 0, u_n^- \geq 0, u_n^+ - u_n^- = u_n$ et $u_n^+ + u_n^- = |u_n|$.

On a donc $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$. Si la série de terme général u_n converge absolument, alors $\sum |u_n|$ converge et d'après le théorème de comparaison à termes positifs, il en est de même pour $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$.

Par somme de séries convergentes, la série $\sum (u_n^+ - u_n^-)$, c'est-à-dire $\sum u_n$, est aussi convergente. $\square$



Notons $\sum u_n$ une série absolument convergente. Nous admettrons alors que la valeur de la somme de la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ ne dépend pas de l'ordre de sommation de ses termes. Autrement dit, si besoin, pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ est absolument convergente, on peut par exemple dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$ (on ajoute d'abord les termes pairs, puis les termes impairs).

■ 2 Les séries de référence

Proposition

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. On a alors $S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$. Cependant, pour tout $n \in \llbracket N+1, 2N \rrbracket$, on a, puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\frac{1}{2N} \leq \frac{1}{n}$.

En ajoutant toutes ces inégalités, on a $\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} \leq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$.

Or $\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$. On a ainsi, pour tout $N \geq 1$, $S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}$.

Si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ était convergente, alors on aurait $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

Cela implique $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} - S_N = 0$, ce qui est impossible étant donné que $S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

Par ailleurs, on a, pour tout $N \geq 1$, $S_{N+1} - S_N = \frac{1}{N+1} \geq 0$. Ainsi, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. D'après le théorème de convergence des suites monotones, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$. $\square$



■ C'est l'exemple classique de suite divergente dont le terme général tend vers 0 en $+\infty$.

Proposition

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que $\sum \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$ est une série convergente.

En effet, on a, pour tout $N \geq 2$, $\sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}$.

En posant $k = n - 1$ dans la première somme, on obtient $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N}$.

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$. La série de terme général $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

Ensuite, remarquons que, pour tout $n \geq 2$, on a $n^2 \geq n^2 - n = n(n-1) > 0$. En appliquant la fonction inverse strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.

Nous venons de montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. $\square$



Les séries de la forme $\sum (\alpha_n - \alpha_{n+1})$ comme celle que vous avez croisée dans la preuve sont dites télescopiques. Dans la preuve employée, on montre que la série $\sum (\alpha_n - \alpha_{n+1})$ est de même nature que la suite (α_n) . On pourra consulter l'exercice 1.4 pour un résultat similaire généralisé.

Séries géométriques et dérivées

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $-1 < q < 1$ et

(1) La série de terme général q^n est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

(2) La série de terme général nq^{n-1} est convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

(3) La série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

DÉMONSTRATION. Notons, pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $S_N(q) = \sum_{n=0}^N q^n$.

(1) On a alors, $\forall N \geq 0$, $S_N(q) = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$. Si $q \in]-1, 1[$, il suffit alors de faire tendre N vers

l'infini pour obtenir $\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1} = 0$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(q) = \frac{1}{1 - q}$.

Si $q \notin]-1, 1[$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc la série est divergente.

(2) Remarquons que, $\forall N \geq 1$, $S_N(q)$ est un polynôme en q , donc en dérivant par rapport à q ,

on a $S'_N(q) = \sum_{n=1}^N nq^{n-1}$, en notant que l'on peut commencer la somme en $n = 1$ car le terme en $n = 0$ est nul.

Par ailleurs, l'autre expression est aussi dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). On a, $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$S'_N(q) = \frac{-(N+1)q^N(1-q) + (1-q^{N+1})}{(1-q)^2} = \frac{1 - (N+1)q^N + (N+1)q^{N+1} - q^{N+1}}{(1-q)^2}.$$

Ainsi, $S'_N(q) = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{Nq^N}{(1-q)^2} - \frac{Nq^N}{(1-q)^2} + N \frac{q^{N+1}}{(1-q)^2}$. Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} q^N = 0$ et, par croissances

comparées, $\lim_{N \rightarrow +\infty} Nq^N = 0$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S'_N(q) = \frac{1}{(1-q)^2}$, ce qui nous donne le résultat attendu.

Enfin si $q \notin]-1, 1[$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série est divergente.

(3) C'est la même technique que le deuxième point : il suffit de dériver une nouvelle fois S'_N puis d'obtenir la $\lim_{N \rightarrow +\infty} S''_N(q)$ par croissances comparées pour $q \in]-1, 1[$. Et, pour $q \notin]-1, 1[$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série est divergente. L'expression est encombrante mais ne présente aucune difficulté.

□

Le résultat suivant est admis.

Série exponentielle

Pour tout x réel, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente et on a

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$



Lorsqu'on a une série dont le terme général est de la forme $n^2 q^n$ ou $n^2 \frac{x^n}{n!}$, il est souvent pertinent de remarquer que $n^2 = n(n-1) + n$ pour faire apparaître les termes généraux de séries géométriques dérivées ou de simplifier $n(n-1)$ avec $n!$. Vous trouverez des exemples dans certains exercices (voir par exemple l'exercice 1.1) et dans le chapitre sur les variables aléatoires.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Déterminer la nature et calculer la somme d'une série

Dans le cas où on souhaite montrer la convergence et calculer la somme d'une série, il faut se ramener à une série connue ou déterminer s'il y a un télescopage, c'est-à-dire une simplification de la somme lorsqu'on développe les termes. On peut suivre les indications suivantes :

- Si le terme général contient une factorielle au dénominateur, on peut essayer de se ramener à une série exponentielle.
- Sinon, si le terme général contient des éléments de la forme q^n , se ramener à une série géométrique en factorisant par le premier terme. S'il y a des termes en nq^n , penser à une série géométrique dérivée, n^2q^n à une série géométrique dérivée seconde.
- Sinon, il faut penser à faire apparaître un télescopage.

Nous noterons qu'il est souvent prudent de travailler sur la somme partielle avant de passer à la limite pour éviter de manipuler des termes mal définis.

Exemple d'application

Déterminer la nature et calculer la somme des séries suivantes :

$$1. S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \quad 2. S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{2^{2n}}{5^{n+1}}; \quad 3. S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

1. Il s'agit certainement de se ramener à une série exponentielle étant donné sa forme. Posons,

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, S_{1,N} = \sum_{n=0}^N \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

$$\text{Posons le changement d'indice } k = n + 1, \text{ on alors } S_{1,N} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^k}{k!}.$$

Ainsi, en ajoutant et retranchant le premier terme qui manque, on a

$$S_{1,N} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Ainsi, S_1 est une série convergente et on a $S_1 = \frac{e^2 - 1}{2}$.

$$2. \text{ Posons, pour tout } N \in \mathbb{N}, S_{2,N} = \sum_{n=0}^N n \frac{2^{2n}}{5^{n+1}}.$$

Commençons par mettre de côté le terme nul en $n = 0$ puis factorisons par le premier terme pour faire apparaître une série géométrique dérivée (cette technique marche souvent pour ce genre de série). On a ainsi

$$S_{2,N} = \sum_{n=1}^N n \frac{2^{2n}}{5^{n+1}} = \frac{2^2}{5^2} \sum_{n=1}^N n \frac{2^{2n-2}}{5^{n-1}}.$$

On a alors, comme $\sum_{n=1}^N nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ pour $q \in]-1, 1[$,

$$S_{2,N} = \frac{2^2}{5^2} \sum_{n=1}^N n \left(\frac{2^2}{5}\right)^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{4}{25} \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{25} 25 = 4.$$

Ainsi, S_2 est une série convergente et on a $S_2 = 4$.

3. Cette série ne ressemble à aucune série de référence, essayons de faire apparaître un télescopage. Notons pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, $S_{3,N} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} S_{3,N} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k} \text{ en posant } k = n+2 \text{ dans la deuxième somme} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \left(\sum_{k=3}^N \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \text{ en isolant les termes de bord} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{3,N} = \frac{3}{2}$.

La série est donc convergente et $S_3 = \frac{3}{2}$.



Voir exercices 1.1 et 1.4.

Méthode 1.2 : Déterminer la nature d'une série à termes positifs

Dans le cas où on souhaite montrer la convergence **sans** calculer la somme d'une série à termes positifs, il faut étudier le terme général et utiliser

- Le théorème de comparaison pour deux séries à termes positifs en majorant le terme général par celui d'une série convergente (pour montrer qu'elle converge) ou en le minorant par celui d'une série divergente (pour montrer qu'elle diverge).
- Le théorème de convergence pour deux séries à termes positifs équivalents, auquel cas, on détermine un équivalent du terme général et la nature de la série correspondante.

Exemple d'application

Étudier la convergence des séries de terme général

$$1. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 2. v_n = \frac{1}{(n+2)!} \quad 3. w_n = \frac{n + \sqrt{n}}{5^n + n^2}.$$

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n}$. Or u_n comme $\frac{1}{n}$ sont des termes positifs et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n est elle aussi divergente.
2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \frac{1}{n!}$. Or v_n comme $\frac{1}{n!}$ sont des termes positifs et comme la série de terme général $\frac{1}{n!}$ est convergente (c'est le terme général d'une série exponentielle avec $x = 1$), d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n est elle aussi convergente.
3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{5^n \left(1 + \frac{n^2}{5^n}\right)}$. Par croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{5^n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{n^2}{5^n}} = 1$. Ainsi, $w_n \sim \frac{n}{5^n} \sim 5n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ qui est de la forme $5nq^{n-1}$ où $q = \frac{1}{5} \in]-1, 1[$.
Or w_n et $5n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ sont des termes positifs et la série de terme général $5n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ est convergente car $n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée. Ainsi, d'après le théorème de convergence pour des séries équivalentes à termes positifs, la série de terme général v_n est elle aussi convergente.



Voir exercices **1.3**, **1.6**, **1.7**, **1.11** et **1.13**.

Méthode 1.3 : Déterminer la nature d'une série à termes quelconques

Dans le cas où on souhaite montrer la convergence **sans** calculer la somme d'une série, on peut montrer la convergence absolue.

En cas d'échec, s'il y a alternance du signe des termes de la série, on peut penser à utiliser le théorème de convergence des suites adjacentes appliqué aux suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

Exemple d'application

Étudier la convergence des séries de terme général

$$1. u_n = \frac{\sin(n)}{2^n} \quad 2. v_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \frac{|\sin(n)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

Or, $\frac{1}{2^n}$ est le terme positif général d'une série géométrique convergente puisque $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ est convergente. Ainsi, la série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente.

2. L'absolue convergence ne s'applique pas puisque $|u_n| = \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente.

On pose alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$.

Considérons $S_{2(N+1)} - S_{2N} = \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} + \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} = \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+1} \leq 0$, ainsi $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

De plus, $S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = \frac{(-1)^{2N+3}}{2N+3} + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} = -\frac{1}{2N+3} + \frac{1}{2N+2} \geq 0$, ainsi $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Enfin $S_{2N+1} - S_{2N} = -\frac{1}{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Les suites $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite finie. Ainsi, comme la suite des termes pairs et celle des termes impairs convergent vers la même limite, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Autrement dit la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.



Voir exercices 1.2, 1.3, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10 et 1.12.

Interro de cours

1. Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? Vous justifierez vos réponses.
 - (a) La série de terme général $\frac{1}{n(2n+1)}$.
 - (b) La série de terme général $\frac{3^n}{n+1}$.
 - (c) La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
 - (d) La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$.
 - (e) La série de terme général $\frac{5^{-n}}{n+2}$.
 - (f) La série de terme général $\frac{n^3-4}{(n+1)!}$.
2. Déterminer la nature et calculer la somme de la série de terme général, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)}$.
3. Déterminer la nature et calculer la somme de la série de terme général, pour $n \geq 0$, $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. La série de terme général, pour $n \geq 1$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle absolument convergente ? convergente ?
5. Est-ce que les propositions suivantes sont vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, vous les justifierez, dans le cas contraire, vous exhiberez un contre-exemple.
 - (a) Une série convergente est absolument convergente.
 - (b) Une série positive dont la suite des sommes partielles est majorée est convergente.
 - (c) Une série dont la suite des sommes partielles est minorée est divergente.
 - (d) Une série dont le terme général est équivalent à $-\frac{1}{n^2}$ est convergente.
 - (e) Une série dont le terme général est $u_n + v_n$ où u_n est le terme général d'une série convergente et v_n celui d'une série divergente est une série divergente.
 - (f) Une série dont le terme général est $u_n + v_n$ où u_n et v_n sont chacun le terme général d'une série divergente est une série divergente.

Exercices

Applications directes du cours

Exercice 1.1

1. Montrer la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}; & \text{(b)} \quad S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}; & \text{(c)} \quad S_3 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}; \\ \text{(d)} \quad S_4 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{2n}}; & \text{(e)} \quad S_5 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n}{n!}; & \text{(f)} \quad S_6 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{2n-1}n!}. \end{aligned}$$

2. Étudier la convergence et la valeur de la somme de la série de terme général $\ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
3. Déterminer a, b, c trois réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\frac{n-3}{n(n^2-1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-3}{n(n^2-1)}$.

Exercice 1.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- Montrer que les séries $S(x)$ et $T(x)$ sont convergentes.
- Déterminer les valeurs explicites de $S(x)$ et de $T(x)$. On pourra s'intéresser à $S(x) + T(x)$ et $S(x) - T(x)$.

Exercice 1.3

Étudier la convergence des séries suivantes (on ne s'intéressera pas à calculer la somme des séries considérées) :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad S_1 &= \sum \frac{1}{n^2+1}; & \text{(b)} \quad S_2 &= \sum \frac{(n+2)!}{(n+3)!}; & \text{(c)} \quad S_3 &= \sum \frac{n+1}{n!+2}; \\ \text{(d)} \quad S_4 &= \sum \frac{\ln(n)}{n^3}; & \text{(e)} \quad S_5 &= \sum \frac{(-2)^n}{(2n)!}; & \text{(f)} \quad S_6 &= \sum \frac{5^n - 2^n}{3^n}; \\ \text{(g)} \quad S_7 &= \sum \frac{\sin(n)}{n^2}; & \text{(h)} \quad S_8 &= \sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); & \text{(i)} \quad S_9 &= \sum \sin \left(\frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Exercice 1.4

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, donner la valeur de la somme de la série.

Exercice 1.5

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

1. Montrer que, si la suite $(n^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Montrer que, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors la série de terme général u_n est divergente.
3. Application : Quelle est la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)}; \quad v_n = \frac{n^3}{2^n}; \quad w_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}.$$

Exercice 1.6

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle de termes strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ où ℓ est un réel positif.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n est divergente.
3. Est-il possible de conclure si $\ell = 1$?

Exercice 1.7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $S_\alpha = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Montrer que, si $\alpha \geq 2$, la série est convergente.
2. Montrer que, si $\alpha \leq 1$, la série est divergente.
3. Soit $\alpha \in]1, 2[$. Soit $N \in \mathbb{N}$, avec $N \geq 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} dt$.

On découpera l'intégrale de $\int_1^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ selon les intervalles de la forme $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que la série S_α est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 1.8

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S_n - \ell| \leq u_{n+1}.$$

3. Une première application : Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$? On note S la somme de

cette série. Donner un majorant de $\left| S - \sum_{k=3}^n \frac{(-1)^k}{\ln(k)} \right|$.

4. Une deuxième application : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. Montrer que v_n est bien défini et déterminer la nature de la série de terme général v_n .

Pour aller plus loin**Exercice 1.9**

On note, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Lorsque la série de

terme général est convergente, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $S'_N(x) - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^N x^{N+1}}{1+x}$.
2. En déduire que $|S_N(1) - \ln(2)| \leq \frac{1}{N+2}$.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ et, si elle est convergente, que vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} ?$$

Exercice 1.10

On note, pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Lorsque la série de

terme général est convergente, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{1}{1+x^2} - S'_N(x) \right| \leq x^{2N+2}$.
2. En déduire que $|\arctan(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{2N+3}$. Quelle est la valeur de $S(x)$?
3. Montrer que $\left| \pi - 4 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| \leq \frac{4}{2N+3}$.
4. Écrire une fonction en Python qui donne une valeur approchée à ε près de π où ε est donné en argument.

Exercice 1.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On note $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. En encadrant f sur tout intervalle de la forme $[k, k+1]$,

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

3. En déduire que, en $+\infty$, $u_n \sim \frac{1}{n}$ puis la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Exercice 1.12

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \notin \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$. Montrer que $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.
2. À l'aide de la question précédente, montrer que la série de terme général $\frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.
3. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 1.13

Soient α, β deux réels. On note $S_{\alpha, \beta}$ la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

1. Montrer que, si $\alpha > 1$, la série $S_{\alpha, \beta}$ est convergente. On pourra montrer que, à partir d'un certain rang, $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \leq \frac{1}{n^{\alpha'}}$ avec $\alpha' = \frac{\alpha+1}{2}$ et utiliser le résultat de l'exercice 1.7.
2. En s'inspirant de la technique précédente, montrer que, si $\alpha < 1$, la série est divergente.

3. Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au cas $\alpha = 1$. On pose $f_\beta : [3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
- $$x \longmapsto \frac{1}{x \ln(x)^\beta}.$$

Montrer que f_β est décroissante sur $[3, +\infty[$.

4. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$,

$$\int_3^{N+1} f_\beta(t) dt \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \leq \int_3^N f_\beta(t) dt + \frac{1}{3 \ln(3)^\beta}.$$

Pour ce faire on découpera $\int_3^{N+1} f_\beta(t)$ sur les intervalles de la forme $[n, n+1]$.

5. En utilisant le changement de variable $u = \ln(t)$ calculer $\int_3^a f_\beta(t) dt$ avec $a \geq 3$. On distinguera les cas $\beta \neq 1$ et $\beta = 1$.

6. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ en fonction de β .

7. Conclure en résumant les cas.

Corrections

Interro de cours

1. (a) **Elle est convergente** : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n(2n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

(b) **Elle est divergente** : On a, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n+1} = +\infty$, donc la série de terme général $\frac{3^n}{n+1}$ ne peut pas être convergente.

(c) **Elle est divergente** : On a $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente puis par équivalence la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est aussi divergente.

(d) **Elle est convergente** : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

(e) **Elle est convergente** : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{5^{-n}}{n+2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Or la série de terme général $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est convergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{5^{-n}}{n+2}$ est convergente.

(f) **Elle est convergente** : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\frac{n^3-4}{(n+1)!} \sim_{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}$. Or $\frac{1}{(n-2)!}$ est, au décalage d'indice près, le terme général de la série exponentielle en 1, donc convergente. D'après le théorème des séries à termes positifs équivalents, la série de terme général $\frac{n^3-4}{(n+1)!}$ est convergente.

2. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, quel que soit $N \geq 1$, posons $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$.

On a ainsi $S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1}$.

Notons que cette dernière inégalité provient de la linéarité de la somme finie, qui ne peut pas être appliquée pour les sommes de séries puisque les séries qui apparaissent sont divergentes.

Après le changement d'indice $k = n + 1$ dans la seconde, on a $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}$.

Ainsi, $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$. Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$, donc la série est convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^N \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^k}{k!}$ en posant le changement d'indice $k = n + 1$.

On fait apparaître la somme partielle d'une série exponentielle car

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{2^k}{k!} - 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^2 - 1.$$

Ainsi, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2 - 1$.

4. La série n'est pas absolument convergente : on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

Or, comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries positives, la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

On pose alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Considérons $S_{2(N+1)} - S_{2N} = \frac{(-1)^{2N+2}}{\sqrt{2N+2}} + \frac{(-1)^{2N+1}}{\sqrt{2N+1}} = \frac{1}{\sqrt{2N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \leq 0$, ainsi $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

De plus, $S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = \frac{(-1)^{2N+3}}{\sqrt{2N+3}} + \frac{(-1)^{2N+2}}{\sqrt{2N+2}} = -\frac{1}{\sqrt{2N+3}} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}} \geq 0$, ainsi $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Enfin $S_{2N+1} - S_{2N} = -\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Les suites $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite. Ainsi, comme la suite des termes pairs et celle de termes impairs convergent la même limite, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Autrement dit la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente mais pas absolument convergente.

5. (a) **Faux** : Voir le deuxième exemple de la méthode 1.3 ou la question précédente pour un contre-exemple.

(b) **Vrai** : Notons $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, c'est-à-dire $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ avec $u_n \geq 0$

le terme général de cette série. On a $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$, donc la suite des sommes partielles est croissante. Comme elle est en plus majorée, d'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, autrement dit, la série est convergente.

(c) **Faux** : Considérons par exemple $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ qui converge vers 2 et dont la suite des sommes partielles est minorée par 0.

(d) **Vrai** : Son terme général est, en valeur absolue, équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, d'après le théorème de convergence pour deux séries à termes positifs équivalents, la série est absolument convergente, donc convergente.

(e) **Vrai** : Si la série de terme général $u_n + v_n$ était convergente, alors celle de terme général $(u_n + v_n) - u_n = v_n$ aussi, ce qui est exclu.

(f) **Faux** : Un exemple non trivial est de prendre $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n+1}$, deux séries divergentes, alors que $u_n + v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ est le terme général d'une série convergente d'après la deuxième question. Plus trivialement, il suffirait de prendre $v_n = -u_n$ avec u_n terme général d'une série divergente.

Exercice 1.1

1. (a) Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_{1,N} = \sum_{n=0}^N \frac{n+1}{n!}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 S_{1,N} &= \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \text{ en posant } k = n-1 \text{ dans la première somme} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e + e
 \end{aligned}$$

Ainsi, la série converge et $S_1 = 2e$.

Notons qu'il aurait été possible de dire que la série était égale à la combinaison linéaire des séries de terme général $\frac{n}{n!}$ et $\frac{1}{n!}$ à condition d'avoir auparavant montré qu'il s'agissait de séries convergentes.

(b) Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_{2,N} = \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{2^n}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 S_{2,N} &= \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1) + n}{2^n} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^N \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{n}{2^{n-1}} \text{ en enlevant les termes nuls.}
 \end{aligned}$$

On reconnaît alors les sommes partielles de séries géométriques dérivée, car $\frac{n}{2^{n-1}}$ est de la forme nq^{n-1} , et dérivée seconde car $\frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$ est de la forme $n(n-1)q^{n-2}$ avec $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi, } S_{2,N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ainsi, la série converge et $S_2 = 4 + 2 = 6$.

(c) Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_{3,N} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+2)!}$. On a ainsi, en posant $k = n + 2$, $S_{3,N} = \sum_{k=2}^{N+2} \frac{1}{k!}$.

En ajoutant les termes manquants pour commencer à $k = 0$, on a $S_{3,N} = \sum_{k=0}^{N+2} \frac{1}{k!} - 1 - 1$.

On retrouve une série exponentielle de référence convergente, on a $S_{3,N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e - 2$. Ainsi,

$$S_3 = e - 2.$$

(d) Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $S_{4,N} = \sum_{n=2}^N \frac{1}{3^{2n}} = \frac{1}{3^4} \sum_{n=2}^N \frac{1}{(3^2)^{n-2}}$.

En posant $k = n - 2$, on a $S_{4,N} = \frac{1}{3^4} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{(3^2)^k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^4} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{72}$.

Ainsi, la série converge et $S_4 = \frac{1}{72}$.

(e) On a

$$\begin{aligned}
 S_5 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \text{ en enlevant les termes nuls} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \text{ en posant } k = n - 2
 \end{aligned}$$

Ainsi la série converge et $S_5 = e$.

(f) Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $S_{6,N} = \sum_{n=0}^N \frac{2^{n+1}}{3^{2n-1}n!} = 6 \sum_{n=0}^N \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1}{n!}$.

On a alors $S_{6,N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 6e^{2/9}$.

Ainsi, la série converge et $S_6 = 6e^{2/9}$.

2. Posons, pour tout $N \geq 1$, $S_N = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$. On a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-\ln(n) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+3)) \\ &= -\sum_{n=1}^N \ln(n) + \sum_{n=1}^N \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \sum_{n=1}^N \ln(n+3) \end{aligned}$$

Posons $k = n + 1$ dans la deuxième, $k = n + 2$ dans la troisième et $k = n + 3$ dans la quatrième somme.

$$\begin{aligned} S_N &= -\sum_{n=1}^N \ln(n) + \sum_{k=2}^{N+1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{N+2} \ln(k) - \sum_{n=4}^{N+3} \ln(k) \\ &= -\ln(2) - \ln(3) - \sum_{n=1}^N \ln(n) + \ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=3}^N \ln(k) + \ln(N+1) + \ln(3) \\ &\quad + \sum_{k=3}^N \ln(k) + \ln(N+1) + \ln(N+2) - \sum_{k=3}^N \ln(k) - \ln(N+1) - \ln(N+2) - \ln(N+3) \\ &= \ln(3) + \ln \left(\frac{N+1}{N+3} \right). \end{aligned}$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{N+3} = 1$, donc par composition, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{N+1}{N+3} \right) = 0$.

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \ln(3)$. La série est donc convergente et on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right) = \ln(3)$.

3. Cherchons a, b, c trois réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\frac{n-3}{n(n^2-1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$. En multipliant cette égalité par $n(n^2-1)$, on a $n-3 = an(n+1) + b(n^2-1) + cn(n-1)$.

Cherchons des valeurs acceptables de ces trois réels pour les valeurs de n égales à $-1, 0$ et 1 .

En prenant $n = -1$, on obtient $-4 = 2c$, donc $c = -2$. En prenant $n = 0$, on a $-3 = -b$ donc $b = 3$ et enfin, en prenant $n = 1$, on obtient $-2 = 2a$, donc $a = -1$.

Vérifions que les valeurs trouvées conviennent pour tout $n \geq 2$. On a

$$\frac{-1}{n-1} + \frac{3}{n} + \frac{-2}{n+1} = \frac{-n(n+1) + 3(n^2-1) - 2n(n-1)}{n(n^2-1)} = \frac{n-3}{n(n^2-1)}.$$

Posons maintenant $S_N = \sum_{n=2}^N \frac{n-3}{n(n^2-1)} = \sum_{n=2}^N \left(\frac{-1}{n-1} + \frac{3}{n} + \frac{-2}{n+1} \right)$. On a

$$\begin{aligned} S_N &= -\sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} + 3 \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + 3 \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{\ell=3}^{N+1} \frac{1}{\ell} \end{aligned}$$

En posant dans la première somme $k = n - 1$ et $\ell = n + 1$ dans la troisième. Ainsi

$$\begin{aligned}
S_N &= -1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{3}{2} + 3 \sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{3}{N} - 2 \sum_{\ell=3}^{N-1} \frac{1}{\ell} - \frac{2}{N} - \frac{2}{N+1} \\
&= \frac{1}{N} - \frac{2}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série est bien convergente et on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-3}{n(n^2-1)} = 0$.

Exercice 1.2

1. Remarquons que $\left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \frac{(|x|^2)^n}{(2n)!} \leq \frac{(|x|^2)^n}{n!}$. Or ce dernier terme est le terme général d'une série de référence convergente (série exponentielle en $|x|^2$), donc, d'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge absolument donc converge.

De la même façon, $\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| = |x| \frac{(|x|^2)^n}{(2n+1)!} \leq |x| \frac{(|x|^2)^n}{n!}$, et en utilisant la même technique, on montre la convergence de la série de terme général $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

2. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $S_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $T_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Comme $S_N(x)$ contient les termes pairs et $T_N(x)$ les termes impairs, on a

$$S_N(x) + T_N(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^x.$$

Ainsi, $S(x) + T(x) = e^x$.

Et de la même façon,

$$S_N(x) - T_N(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{-x}.$$

Ainsi, $S(x) - T(x) = e^{-x}$.

En faisant la somme de ces deux égalités et en divisant par 2, on obtient $S(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

En faisant la différence de ces deux égalités et en divisant par 2, on obtient $T(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Exercice 1.3

(a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ est convergente.

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente,

donc d'après le théorème sur séries à termes positifs équivalents, la série de terme général $\frac{(n+2)!}{(n+3)!}$ est divergente.

(c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n!+2} \sim \frac{1}{(n-1)!}$. Or la série de terme général $\frac{1}{(n-1)!}$ est convergente (au changement d'indice $k = n-1$ près, c'est la série égale à e^1), donc d'après le théorème sur séries à termes positifs équivalents, la série de terme général $\frac{n+1}{n!+2}$ est convergente.

(d) Une étude rapide de fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ montre que cette fonction est toujours positive sur $] -1, +\infty[$, ce qui implique $\ln(x+1) \leq x$, donc en particulier $\ln(n) \leq n-1 \leq n$.

On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\ln(n) \leq n$ puis $0 \leq \frac{\ln(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

(e) On a, pour tout $n \geq 0$, $\left| \frac{(-2)^n}{(2n)!} \right| \leq \frac{2^n}{n!}$. Comme $\frac{2^n}{n!}$ est le terme général d'une série exponentielle convergente, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\left| \frac{(-2)^n}{(2n)!} \right|$ est convergente. Ainsi, S_5 est absolument convergente donc convergente.

(f) On a, pour tout $n \geq 0$, $\frac{5^n - 2^n}{3^n} \sim \left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Comme le terme général ne tend pas vers 0, la série S_6 ne peut pas être convergente donc diverge grossièrement.

(g) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $|\sin(n)| \leq 1$ puis $0 \leq \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$ est convergente. S_7 est donc absolument convergente donc convergente.

(h) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, en utilisant la quantité conjuguée

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente donc celle de terme général $\frac{1}{2n}$ aussi. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série S_8 est divergente.

On aurait aussi pu regarder les sommes partielles et faire apparaître un télescopage.

(i) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et comme $\sin(x) \sim_0 x$, on a par substitution, $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$, et que $\forall x \in [0, 1]$, $\sin(x) \geq 0$, on a $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$, on peut donc

utiliser le théorème de convergence de séries à termes positifs équivalents, ainsi S_9 est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, donc convergente.

Exercice 1.4

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, S_N la somme partielle associée à la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$, autrement dit $S_N = \sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N u_{n+1} - \sum_{n=0}^N u_n \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} u_k - \sum_{n=0}^N u_n \text{ en posant } k = n + 1 \text{ dans la première somme} \\ &= \sum_{k=1}^N u_k + u_{N+1} - u_0 - \sum_{n=1}^N u_n \\ &= u_{N+1} - u_0 \end{aligned}$$

Ainsi, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, la suite des sommes partielles converge vers $\ell - u_0$. Ainsi, la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge et la somme de sa série vaut $\ell - u_0$.

Mais si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, la suite des sommes partielles diverge aussi donc la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ diverge.

Exercice 1.5

1. Si la suite $(n^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors elle est bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, |n^2 u_n| \leq M$, donc, $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{M}{n^2}$.

Comme $\frac{M}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (car $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente), d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ est convergente, donc la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.

2. Commençons par le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la définition de limite appliquée pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, il existe un rang $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|n u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$, ce qui implique $n u_n \geq \frac{\ell}{2}$ soit $u_n \geq \frac{\ell}{2n}$. Comme $\frac{\ell}{2n}$ est le terme général d'une série divergente, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n est divergente.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$, alors il existe $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, $n u_n \geq 1$, donc $u_n \geq \frac{1}{n}$. Le même théorème permet de conclure.

Enfin, pour le cas où $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ définie par, pour tout $n \geq n_0$, $v_n = -u_n$ ce qui donnera la divergence de la série de terme général v_n , donc celle de terme général u_n .