

Introduction à la mécanique non linéaire

Calcul des structures par éléments finis

Jean-Charles Craveur

Philippe Jetteur

DUNOD

Illustration de couverture : © Angelatriks – Shutterstock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2010
2020 pour la nouvelle présentation
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
ISBN 978-2-10-081247-9
www.dunod.com

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1. Contraintes	1
1.1. Introduction.....	1
1.2. Vecteur des contraintes	2
1.3. Matrice des contraintes	4
1.4. Equations d'équilibre	6
1.5. Contraintes principales.....	9
1.6. Contraintes équivalentes	12
1.7. Références bibliographiques	15
2. Déformations	17
2.1. Tenseur des déformations	17
2.2. Approximation linéaire	19
2.3. Matrice des déformations.....	20
2.4. Transformations et interprétation	20
2.5. Références bibliographiques	22
3. Lois de comportement	23
3.1. Introduction.....	23
3.2. Loi de Hooke généralisée.....	24
3.3. Matériau isotrope	26
3.4. Energie de déformation.....	29
3.5. Non linéarités matérielles.....	32
3.6. Courbe contrainte-déformation	35
3.7. Références bibliographiques	36
4. Mécanique linéaire.....	37
4.1. Introduction.....	37
4.2. Principe des travaux virtuels	38
4.3. Membrane triangulaire du premier degré.....	40
4.4. Membrane triangulaire isoparamétrique du premier degré	44
4.5. Charges équivalentes	49
4.6. Post-traitement	50
4.7. Mécanique linéaire.....	51
4.8. Linéarité matérielle	52
4.9. Linéarité géométrique	52
4.10. Charges vives et charges mortes	53
4.11. Conditions aux limites bilatérales	54
4.12. Références bibliographiques	55
5. Mécanique non linéaire	57
5.1. Non linéarités matérielles.....	57

5.2. Non linéarités géométriques.....	58
5.3. Mécanique non linéaire.....	60
5.4. Premier exemple	62
5.5. Deuxième exemple.....	63
5.6. Troisième exemple.....	65
5.7. Références bibliographiques	66
6. Approche cinématique.....	67
6.1. Introduction.....	67
6.2. Etirement et déformation (cas 1D).....	69
6.3. Décomposition polaire du jacobien.....	73
6.4. Mesure de déformation (cas 3D).....	74
6.5. Grandes rotations – grandes déformations	75
6.6. Premier exemple	76
6.7. Remarque concernant la variation de volume	79
6.8. Second exemple	80
6.9. Références bibliographiques	81
7. Contraintes en non linéaire.....	83
7.1. Contraintes de Cauchy	83
7.2. Formule de Nanson	85
7.3. Contraintes PK1	86
7.4. Contraintes PK2.....	87
7.5. Traction et rotation rigide autour de Oz.....	90
7.6. Notion d'objectivité	94
7.7. Théorème des travaux virtuels, couples contrainte-déformation	96
7.8. Références bibliographiques	97
8. Forces internes et matrice tangente.....	99
8.1. Introduction.....	99
8.2. Forces internes	100
8.3. Modification de l'équilibre, matrice tangente	104
8.4. « Précontrainte »	108
8.5. Matrice tangente, exemple de construction.....	111
9. Méthodes numériques	115
9.1. Introduction.....	115
9.2. Méthodes tangentes, cas 1D.....	119
9.3. Newton-Raphson pour des structures à N DDL.....	121
9.4. Précision, convergence.....	124
9.5. Exemple	126
9.6. Autres algorithmes de résolution	128
9.7. Stratégies à déplacements imposés	131
9.8. Autres stratégies incrémentales.....	132
9.9. Incrémentation manuelle ou automatique	136
9.10. Références bibliographiques	139

10. Stabilité, flambage	141
10.1. Rappels de RDM.....	141
10.2. Stabilité et flambage des structures.....	148
10.3. Approche statique	151
10.4. Structure parfaite et flambage linéaire	153
10.5. Structure imparfaite et flambage linéaire	161
10.6. Analyse non linéaire et pivots négatifs	164
10.7. Types d'analyses en non linéaire	167
10.8. Bifurcation stable	170
10.9. Point limite.....	173
10.10. Bifurcation instable	176
10.11. Approche dynamique pour le flambage	177
10.12. Plasticité et flambage	177
10.13. Intérêt de la stabilité linéaire	178
10.14. Références bibliographiques	179
11. Plasticité.....	181
11.1. Limite élastique, Observations.....	181
11.2. Hypothèses.....	185
11.3. Matériaux et modèles de comportement	186
11.4. Contrainte équivalente, critère de plasticité	187
11.5. Gestion de la plasticité	192
11.6. Formulation theorique.....	194
11.7. Loi d'écoulement	200
11.8. Relation contrainte - déformation totale.....	201
11.9. Intégration numérique	203
11.10. Matériau isotrope - critère de von Mises.....	205
11.11. Loi de comportement : exemples et données.....	209
11.12. Effet de la température	213
11.13. Décharges.....	214
11.14. Matrice tangente, intégration numérique	216
11.15. Post-traitement	219
11.16. Calcul linéaire puis non linéaire.....	221
11.17. Références bibliographiques	221
12. Contact.....	223
12.1. Introduction.....	223
12.2. Résolution du problème de contact	224
12.3. Programmation mathématique	229
12.4. Double boucle : itérations découplées.....	230
12.5. Recherche topologique.....	231
12.6. Problèmes courants	235
12.7. Fonctionnalités additionnelles.....	238
12.8. Frottement.....	241
12.9. Post-traitement	244
12.10. Problème lié aux faces à 8 noeuds	244
12.11. Références bibliographiques	246

13. Dynamique non linéaire	247
13.1. Introduction.....	247
13.2. Réponse dynamique transitoire linéaire	247
13.3. Schéma de Newmark en analyse non linéaire	252
13.4. Réponse dynamique non linéaire et flambage.....	254
13.5. Exemple d'application	257
13.6. Références bibliographiques	259
14. Divers.....	261
14.1. Force de pression et matrice associée	261
14.2. Force centrifuge	264
14.3. Degré de liberté de rotation.....	265
14.4. Corps rigide.....	269
14.5. Ressort uniaxial.....	270
14.6. Ressort triaxial, bushing.....	272
14.7. Déplacement imposé.....	274
14.8. Flexibilité dans une contrainte cinématique.....	275
14.9. Matériau avec dommage	276
14.10. Fatigue	278
14.11. Références bibliographiques	280
15. Hyperélasticité	281
15.1. Introduction et propriétés	281
15.2. Observations expérimentales	282
15.3. Applications industrielles et hypothèses	283
15.4. Courbe classique	283
15.5. Potentiel exprimé en fonction des invariants	285
15.6. Essais mécaniques et invariants	287
15.7. Lois de Mooney-Rivlin	291
15.8. Potentiel exprimé en fonction des étirements	293
15.9. Aspect élément fini	293
15.10. Références bibliographiques	295
16. Exercices stabilité, flambage.....	297
16.1. Point limite, premier exemple	297
16.2. Point limite, deuxième exemple.....	298
16.3. Point limite, troisième exemple	301
16.4. Bifurcation d'une plaque carrée.....	305
16.5. Bifurcation d'une plaque rectangulaire	310
16.6. Cylindre sous pression	313
16.7. Cylindre raidi en compression	315
16.8. Références bibliographiques	318
17. Exercices plasticité.....	319
17.1. Premier exemple : 3 barres.....	319
17.2. Deuxième exemple : sphère	321
17.3. Troisième exemple : portion de cylindre.....	329
17.4. Plasticité et contact	330

17.5. Plasticité et flambage	333
17.6. Plasticité et thermique	338
17.7. Références bibliographiques	344
Index Alphabétique	346

AVANT-PROPOS

Le calcul de structures par éléments finis est une discipline née il y a environ 50 ans, où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique, d'où sa complexité et les différentes approches que l'on peut en avoir. Les progrès réalisés en informatique, tant par la puissance de calcul que par une interactivité toujours plus grande et des interfaces homme/machine sans cesse améliorées, ont contribué à une large diffusion de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) dans les bureaux d'études, puis, naturellement, une utilisation sans cesse croissante des programmes de calcul par éléments finis par des personnels familiers de la CAO. Les analyses, qui étaient principalement statiques linéaires il y a encore 10 ans, sont pour une bonne part d'entre elles devenues statiques non linéaires voire dynamiques non linéaires. La raison en est relativement simple : à vouloir toujours tout optimiser, on met moins de matière qu'avant. En conséquence, les structures sont plus souples et les hypothèses de mécanique linéaire en arrivent à ne plus être valables : le non linéaire a envahi les bureaux d'études et lors du dimensionnement, on peut être confronté à de grands déplacements, du flambage, de la plasticité, du contact...

La formation à la mécanique non linéaire, généralement très théorique, est dispensée à la fin du second cycle de l'enseignement supérieur. Les outils de calcul employés pour illustrer ces cours sont souvent utilisés « en boîte noire ». Les étudiants ont du mal à faire la part des choses entre la modélisation, les éléments finis, la mécanique non linéaire, l'analyse numérique..., ce qui est tout à fait normal eu égard à la masse de connaissance et à la complexité que tout cela représente.

Nous avons depuis longtemps des documents plus ou moins mis en forme. C'est lors du congrès de Giens en mai 2009 que Roger Ohayon nous a demandé où en était le projet dont nous avons vaguement parlé deux ans plus tôt et nous avons incités à le faire aboutir. C'est chose faite, et nous le remercions. Cet ouvrage n'est ni un cours sur la méthode des éléments finis, ni un ouvrage théorique sur la mécanique non linéaire, ni un guide d'utilisation d'un logiciel particulier. Il constitue une aide pour l'utilisateur de code éléments finis qui y trouvera des éléments théoriques puis pratiques dans les exercices développés en seconde

partie. Toutes les simulations numériques ont été faites avec le code de calcul par éléments finis SAMCEF[®], développé par la société SAMTECH.

Nous remercions Éric Carnoy, directeur général de SAMTECH et Alain Le Méhauté, directeur général de l'ISMANS, pour leur confiance et leur soutien quant à la pédagogie que nous développons. Nos remerciements vont également à Philippe Pasquet et Michael Bryuneel de SAMTECH pour leur relecture attentive et leurs remarques. Nous ne saurions terminer cet avant-propos sans une petite pensée pour les élèves de l'option MCOP (Modélisation, Calcul et OPTimisation) de l'ISMANS qui servent depuis des années de « cobayes pédagogiques », cet ouvrage constituant une partie de leur enseignement de troisième année.

Pour finir, nous adressons un grand merci à nos femmes et enfants pour leur patience et leurs encouragements.

Coulaines et Liège, juin 2010

Chapitre 1

Contraintes

1.1. INTRODUCTION

On ne s'intéresse qu'aux **milieux continus** qui sont des domaines de l'espace à trois dimensions. Ce sont des corps purement fictifs où la matière est uniformément distribuée dans le volume, de sorte que tout élément infinitésimal a les mêmes propriétés que le corps lui-même. On suppose de plus qu'au voisinage d'un point quelconque du milieu, ces propriétés sont des fonctions continues et différentiables par rapport à toutes les variables définissant le point (coordonnées, temps...). Par exemple, la masse volumique et la température sont des fonctions des coordonnées et du temps.

Ces milieux continus ne subissent que des **transformations continues**. En particulier, deux points initialement voisins le restent à tout instant, tout en ayant des déplacements de petite ou grande amplitude. On en déduit qu'un ensemble continu (ligne, surface, volume) se transforme en un ensemble continu de même nature. On se place pour ce chapitre dans le domaine linéaire, c'est-à-dire dans l'hypothèse des petits déplacements. La cavitation (formation de trous), les failles et glissements de terrain sont des phénomènes qui ne respectent pas la continuité requise pour être abordés dans un cours de mécanique des milieux continus mais relèvent par exemple de la mécanique du contact ou de la tribologie.

Les forces susceptibles d'agir sur un corps sont de deux types différents :

- les forces de surface
- les forces de volume

Les **forces de surface** sont réparties sur la surface (ou portion de surface) extérieure du corps. Elles ont la dimension d'une pression en N/m^2 dans le

système international (SI). Les **forces de volume** s'exercent dans tout ou partie du volume du corps. Elles ont pour dimension le N/m^3 dans le système SI. Les forces de gravitation, les forces centrifuges, les forces d'inertie en sont des exemples. On conçoit bien qu'un corps soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures doit être capable d'« encaisser » les efforts. La contribution à l'effort ne sera pas la même en tout point intérieur au corps : des zones seront plus sollicitées que d'autres, les efforts internes sont variables en direction et en intensité d'un point à un autre. Il est donc très important de décrire précisément la répartition des contributions de la matière. Tous les principes de la mécanique font appel à la notion d'action extérieure (cf. cours de RDM [1], [2]), que sont les efforts et moments appliqués par l'opérateur et toutes les forces et moments de liaisons mécaniques appliqués par le reste du monde sur le corps étudié. Pour étudier la répartition des efforts et moments en un point M situé à l'intérieur de la matière, il faut effectuer une coupe fictive par un plan contenant ce point.

1.2. VECTEUR DES CONTRAINTES

De manière à simplifier grandement les équations, on supposera que le repère de référence, noté arbitrairement (Ox, Oy, Oz) , est un **repère orthonormé direct**. Le domaine matériel D est coupé en deux parties (1) et (2) par un plan noté Π . Soient F_1 et F_2 les deux systèmes partiels de forces extérieures respectivement appliqués aux parties (1) et (2).

On isole la partie (1). Il convient de remplacer la matière enlevée par les efforts qu'elle exerçait sur la partie restante afin que celle-ci conserve ses caractéristiques. Par la coupe, il y a eu extériorisation des efforts internes dont la répartition est supposée continue. La partie (1) est maintenant soumise à des efforts extérieurs qui sont F_1 et tous les efforts de liaison entre les deux parties.

On appelle **facette** un élément infinitésimal de surface dS appartenant au plan de coupe de normale $\vec{n}$. Cette facette est définie en un point par la **direction et le sens de sa normale extérieure**. Les efforts internes qui s'exercent autour d'un point M de la facette se réduisent à une résultante $\Delta\vec{F}$ et à un couple. On admet que le couple peut être négligé en choisissant un élément de surface aussi petit que nécessaire, ce qui est toujours possible car le milieu est supposé continu (figure 1.1). $\Delta\vec{F}$ est la force interne qui représente l'action exercée en M par la partie (2) sur la partie (1). On appelle **vecteur contrainte** en M suivant la normale $\vec{n}$ le vecteur défini par :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{dS}$$

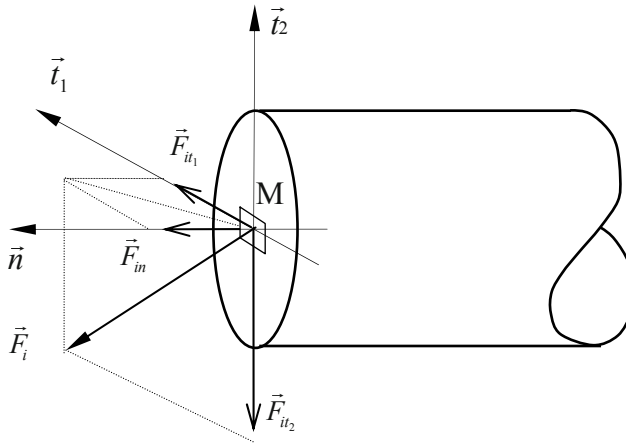


Figure 1.1 : Forces internes et contraintes

La notion de contrainte et sa formalisation sont dues au mathématicien français Cauchy. Une contrainte est homogène à une pression, c'est-à-dire à une force par unité de surface. Elle s'exprime dans le système international en Pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) mais on utilise souvent comme unité le Mega-Pascal ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$). Ce vecteur contrainte peut être projeté sur la normale $\vec{n}$ et selon deux directions orthogonales qui lui sont orthogonales et sont contenues dans le plan de la facette. Les intensités « moyennes » de la force projetée sur les trois axes du trièdre en M (normale sortante et deux axes du plan de la facette), ou composantes du vecteur contrainte, sont :

$$\frac{\Delta \mathbf{F}_n}{dS}, \frac{\Delta \mathbf{F}_{t1}}{dS} \text{ et } \frac{\Delta \mathbf{F}_{t2}}{dS}$$

Ces rapports ont une limite finie lorsque dS tend vers 0. Par abus de langage, on parle de contrainte au point M (figure 1.2). En fait, il s'agit des trois composantes du vecteur contrainte au point M, dans le plan de coupe dont la normale est orientée selon $\vec{n}$.

$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{dS}$ est une **contrainte normale** car c'est la composante du vecteur contrainte au point M orthogonale au plan de coupe. On la note traditionnellement σ_{nn} . C'est une traction si elle est dirigée dans le sens de la normale sortante, auquel cas elle a une valeur positive. C'est une compression si elle est dirigée dans le sens de la normale rentrante, auquel cas, elle a une valeur négative. $\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_{t1}}{dS}$ et $\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_{t2}}{dS}$ sont les **contraintes tangentielles** ou **contraintes de cisaillement** et elles sont notées respectivement σ_{nt1} et σ_{nt2} ou

τ_{nt1} et τ_{nt2} . On utilise plutôt la notation σ pour les contraintes normales et τ pour les contraintes tangentielles. Le vecteur contrainte sur une facette s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau} = \sigma \vec{n} + \tau_{nt1} \vec{t}_1 + \tau_{nt2} \vec{t}_2$$

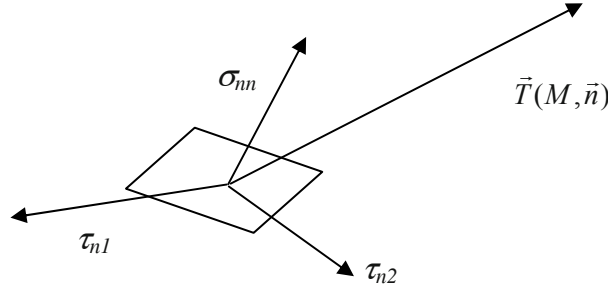


Figure 1.2 : Composantes du vecteur contrainte

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \vec{T}(M, \vec{n})^T \cdot \vec{n} &= \vec{n}^T \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \\ \vec{T}(M, \vec{n})^T \cdot \vec{t}_1 &= \tau_{nt1} \quad \vec{T}(M, \vec{n})^T \cdot \vec{t}_2 = \tau_{nt2} \end{aligned}$$

Dans la notation σ_{ij} ou τ_{ij} , le premier indice indique que la normale au point considéré est portée par l'axe dont le vecteur directeur est i . Le second indice indique quelle est la composante du vecteur contrainte qui est considérée. Généralement, les contraintes maximales apparaissent à la surface des structures. Sur tout élément de matière d'une surface libre, la contrainte normale est nulle. On accède par les jauges de contrainte ou d'autres techniques comme la photoélasticimétrie aux autres composantes du vecteur contrainte en ce point du bord libre. On peut donc connaître par la mesure les composantes du vecteur contrainte sur un bord libre. Bien que la notion de contrainte soit très largement utilisée en mécanique, c'est une notion purement mathématique. Une contrainte ne se mesure pas. On a accès, sur la surface externe des solides, à des déformations par l'intermédiaire des jauges de déformations, que les francophones appellent souvent jauges de contraintes et les anglophones « *strain gauges* ».

1.3. MATRICE DES CONTRAINTES

En faisant varier l'orientation de la facette dS autour du point M , on y définit une infinité de vecteurs contraintes qui forment le **faisceau des contraintes** en M , l'extrémité du vecteur contrainte en M décrivant dans l'espace une surface. La contrainte normale et les contraintes tangentielles changent avec

l'orientation de la normale sortante. La connaissance au point M d'une matrice 3x3 appelée matrice des contraintes est néanmoins suffisante pour déterminer l'état de contrainte en ce point pour une orientation quelconque de la facette. Il y a en un point d'une structure un état de contrainte mais une infinité de facettes qui passent par ce point, donc une infinité de vecteurs à trois composantes qui caractérisent cet état de contrainte. Si on retourne la facette pour observer l'action de (1) sur (2) plutôt que celle de (2) sur (1), les vecteurs contraintes sont opposés, les normales aussi donc les contraintes sont égales car le principe fondamental de l'équilibre (ici action-réaction) permet d'écrire :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) + \vec{T}(M, -\vec{n}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

La contrainte en M dans le plan de la facette caractérise intrinsèquement ce qui s'y passe et ne dépend pas du fait que l'on examine les « contraintes » appliquées par (2) sur (1) ou par (1) sur (2). Prenons maintenant trois axes de référence absolus, par exemple les axes Ox , Oy et Oz . On suppose connus les vecteurs contraintes en M suivant les directions de ces trois axes.

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad \vec{T}(M, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad \vec{T}(M, \vec{z}) = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Soit un tétraèdre infinitésimal d'origine M dont trois arêtes sont parallèles aux axes, en équilibre (figure 1.3). La facette $A_1A_2A_3$ de surface dS est orientée par la normale $\vec{n}$ dont les cosinus directeurs sont notés n_i (ce sont les trois composantes du vecteur unitaire dans le repère de référence). La facette MA_1A_2 de surface dS_3 est orientée par $-\vec{z}$. La facette MA_1A_3 de surface dS_2 est orientée par $-\vec{y}$, la facette MA_2A_3 de surface dS_1 par $-\vec{x}$. Par définition des cosinus directeurs, on a les relations : $dS_i = n_i dS$.

Ce tétraèdre étant en équilibre, la somme vectorielle des efforts qui y sont appliqués est nulle.

$$\vec{T}(M, -\vec{x})dS_1 + \vec{T}(M, -\vec{y})dS_2 + \vec{T}(M, -\vec{z})dS_3 + \vec{T}(M, \vec{n})dS = \vec{0}$$

On projette sur les trois axes de coordonnées et on met en place la matrice des contraintes au point M, notée $[\sigma]$. On vient de montrer que si on connaît les vecteurs contraintes sur trois facettes deux à deux perpendiculaires, on peut calculer le vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque [3].

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = [\sigma] \vec{n}$$

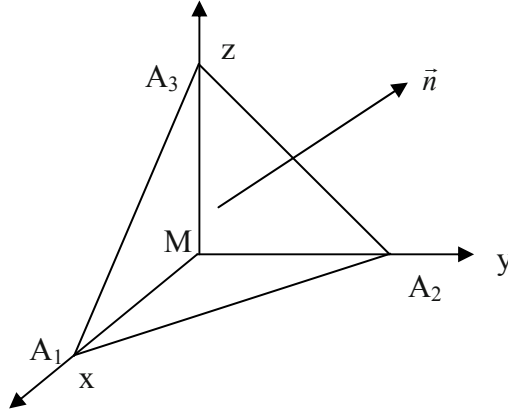


Figure 1.3 : Équilibre du tétraèdre

1.4. ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Pour simplifier l'exposé, on montre comment obtenir les équations d'équilibre dans le cas 2D. Ces équations se généralisent directement en 3D. Isolons autour du point M un petit « volume » élémentaire de côtés dx et dy , et intéressons-nous aux contraintes qui agissent sur les faces de ce volume. Le volume élémentaire étant arbitraire et infinitésimal, il est toujours possible de choisir des dimensions arbitraires telles que les contraintes évoluent peu entre deux faces parallèles, auquel cas un développement limité au premier ordre s'avère suffisant pour donner l'évolution des contraintes. On suppose que les forces de volume éventuelles, de projection F_x et F_y , ont une résultante qui passe par le centre de gravité du volume, à savoir le point M. Les lignes d'action de ces efforts passant par le point M, leur moment par rapport au point M est nul. On suppose, au vu des dimensions arbitraires des côtés du volume, qu'il en est de même pour les contraintes normales (c'est d'ailleurs une des hypothèses introduites lors de la définition des contraintes) : elles n'engendrent aucun moment. C'est la raison pour laquelle les contraintes normales ne sont pas représentées sur la figure 1.4. La convention est que, ayant choisi une facette de référence, le cisaillement y soit représenté dans le sens trigonométrique ; sur la facette suivante, le cisaillement est représenté dans le sens opposé. Le volume élémentaire étant en équilibre dans la structure, la somme des moments autour de M dans le plan xOy est nulle. Lorsqu'un effort fait basculer la structure de x

vers y dans le sens trigonométrique, le moment associé est compté positivement. Il est négatif dans le cas contraire.

Le moment au point M généré par la contrainte $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ est le produit de la contrainte par la surface sur laquelle elle agit, puis par le bras de levier :

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2}$$

Du fait de l'équilibre en rotation, la somme des quatre moments dus aux contraintes tangentielles appliquées sur le volume élémentaire autour de l'axe Oz est nulle :

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} dydz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{2} dx dz - \tau_{yx} \frac{dy}{2} dx dz + \tau_{xy} \frac{dx}{2} dydz = 0$$

L'équation ci-dessus est vraie quel soit le petit élément de volume donc :

$$-2\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + 2\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = 0$$

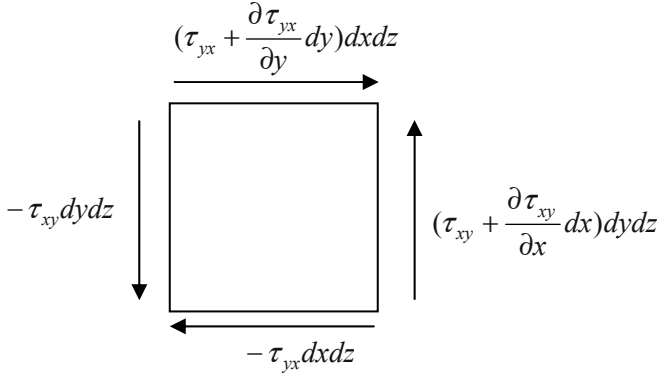


Figure 1.4 : Équilibre en rotation (cisaillements)

Les longueurs dx et dy étant arbitraires et infinitésimales, il est légitime de supposer que les variations des contraintes sur dx et dy sont négligeables par rapport aux contraintes elles-mêmes. Il reste après simplification l'égalité entre les deux contraintes de cisaillement agissant sur deux facettes perpendiculaires :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Par un raisonnement similaire sur les autres faces du volume élémentaire, on montre que le tenseur des contraintes est symétrique : c'est le théorème de réciprocité des contraintes tangentielles.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{ou} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Ceci implique qu'avec la convention de signe utilisée, les contraintes de cisaillement agissant sur deux faces adjacentes sont toutes les deux orientées vers l'arête commune ou en sens inverse, sinon il n'y aurait pas équilibre en rotation. Il en résulte que la matrice des contraintes est entièrement déterminée par la connaissance de six de ses neuf termes : les trois contraintes normales et trois des six contraintes de cisaillement. La matrice des contraintes, qui représente un tenseur symétrique, est une matrice symétrique donc égale à sa transposée. Après l'équilibre en rotation, on peut écrire l'équilibre en translation. Sur chaque facette d'un élément de cube, la force interne a trois composantes : une composante normale à la facette et une projection sur chacun des deux axes définissant le plan de la facette. La somme de toutes les forces dans chaque direction est nulle pour chaque volume élémentaire d'une structure elle-même en équilibre et après simplification, il reste :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

Par un raisonnement analogue, la somme des forces appliquées sur l'axe y est nulle ainsi que celle sur l'axe z. On obtient des formules équivalentes à la précédente en permutant les indices, qui se regroupent en une seule en adoptant les conventions classiques pour les indices muets et les dérivées partielles :

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

Elle est vraie en tout point du solide et est considérée comme l'équation de base de la mécanique des milieux continus, c'est l'équation d'équilibre en volume. L'équation d'équilibre en surface est :

$$[\sigma] \cdot \vec{n} = \vec{f}_s$$

$\vec{f}_s$ est la force de surface (3 composantes dans le repère structural), $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes exprimé dans ce même repère, et $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire orienté perpendiculaire à la surface externe du volume au point considéré. Sur une surface libre, $\vec{f}_s$ est nulle. Sur une surface fixée, $\vec{f}_s$ représente la réaction par unité de surface.