

Transformada em Ondeletas Teoria e Aplicações com Python & Matlab

Maurício J. A. Bolzan

*A minha amada Renata Bolzam,
pela imensa paciência com uma das
pessoas mais complicadas do mundo (Eu mesmo!).*

Prefácio

Se você sabe Fourier, você está atrasado 200 anos de conhecimento matemático. Se você sabe Ondeletas, você está atrasado apenas 20 anos.

A idéia inicial deste livro foi dar uma pequena familiaridade sobre a Transformada em Ondeletas (TO) a alunos tanto do nível de graduação como pós-graduação, já que existe o livro Ondas e Ondeletas de Morettin (vide referências bibliográficas) em português, que consideramos excelente e recomendamos fortemente como leitura indispensável. Portanto, procuramos introduzir neste livro alguns programas em Matlab e Phyton que dará aos leitores a oportunidade única em utilizar a TO já nos passos iniciais. Esse talvez seja um dos diferenciais deste livro.

Embora tenhamos buscado o máximo possível tornar o aprendizado da TO fácil, se faz necessário que o leitor já tenha familiaridade com assuntos prévios como séries e Transformada de Fourier (TF). Embora tratemos destes assuntos aqui, porém, nós o fazemos a título de revisão, simplesmente. Essa seria a nossa única recomendação aos leitores. Portanto, a fundamentação matemática que se segue encontra-se descrita em maiores detalhes e profundidade por diversos autores de ondeletas (Daubechies, 1992; DeVore e Lucier; Strang, 1989; Sweldens, 1995; Wicherhauser, 1991) e também em livros universitários de geometria analítica (Boulos e Camargo, 1987), e álgebra

linear (Lipschutz, 2002).

Essa foi a idéia deste livro, uma tentativa de tornar os conceitos matemáticos complexos que envolvem a teoria das Ondeletas mais acessíveis, optando-se aqui por um tratamento menos formal e, com isso, menos pesado e cansativo. Espero que seja de agrado à todos vocês, prezados leitores. Por isso, será muito importante os comentários, críticas e sugestões de vocês para que este manuscrito possa sofrer modificações necessárias para torna-lo melhor.

Maurício J. A. Bolzan
Jataí (GO), 08 de setembro de 2022

Sumário

1	Fundamentos Matemáticos	7
1.1	Análise Vetorial	7
1.1.1	Ortogonalidade	8
1.1.2	Ortogonalidade de Funções	10
1.2	Espaços de Hilbert	12
1.3	Algoritmo Piramidal	13
1.4	Multirresolução	15
1.5	Convolução	18
1.6	Filtros	23
1.6.1	Domínio da Frequência e Filtros	24
1.6.2	Filtro Passa-Baixo	25
1.6.3	Filtro Passa-Alto	29
1.7	Exercícios	32
2	Séries e Transformada de Fourier	35
2.1	Coeficientes de Fourier	35
2.2	Transformada de Fourier (TF)	43
2.3	Problemática da TF	48
2.4	Exercícios	49
3	Série e Transformada em Ondeletas	51
3.1	Introdução	51
3.2	Série de Ondeletas	51
3.3	Funções Ondeletas	56
3.3.1	Ondeleta de Haar	56
3.3.2	Ondeleta de Daubechies-2	59
3.3.3	Ondeleta de Daubechies-4	63

3.3.4	Ondeleta de Morlet	66
3.3.5	Ondeleta de Chapéu Mexicano	68
3.4	Transformada em Ondeleta Discreta (TOD)	72
3.5	Transformada em Ondeletas Contínuas	80
3.5.1	Espectro de Ondeleta Global	82
3.6	Similaridades entre TF e TO	90
3.7	Dissimilaridades entre TF e TO	90
4	Aplicações das Ondeletas	97
4.1	Filtragem de Séries Temporais	97
4.2	Transformada de Ondeletas Cruzadas (TOC)	101
4.3	Coerência de Fase por Transformada de Ondeletas	104
5	Pacotes de Funções Ondeletas em MATLAB e PYTHON	107
5.1	Pacote Wavelet Matlab	107
5.1.1	Wavelet Toolbox	107
5.1.2	Função Wavefun	108
5.1.3	Função Wfilters	108
5.1.4	Função CWT	109
5.1.5	Função DWT	109
5.1.6	Função IDWT	110
5.2	Pacotes e Programas de Ondeletas em MATLAB	110
5.2.1	Stanford University - WaveLab850	111
5.2.2	Colorado University	111
5.2.3	National Oceanography Centre - Coerência de Fase por Ondeleta e Correlação Cruzada por Ondeleta	112
5.3	Pacote Wavelet Python	112
5.3.1	Wavelet Packet	113
5.3.2	Colorado University	113
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	115

Capítulo 1

Fundamentos Matemáticos

Para engenheiros e cientistas, a álgebra linear assume um lugar muito importante hoje em dia, algumas vezes mais do que o Cálculo. Vimos os sistemas analógicos sendo substituídos por digitais; funções são substituídas por vetores e etc. Assim, esta seção será uma pequena introdução sobre vetores e matrizes, fundamental para uma melhor compreensão do funcionamento da TO. Portanto, o objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos necessários para entender melhor a TO tais como, estrutura piramidal, multiresolução, convolução e filtros sem adentrar com formalismos matemáticos exigentes. Para isso, o leitor pode consultar vários livros para saber mais sobre estes assuntos.

1.1 Análise Vetorial

Na teoria de Fourier como na das Ondeletas é muito comum tratar qualquer série temporal (ou espacial) como uma combinação de outras funções matemáticas como as trigonométricas, por exemplo. Ou seja, é possível ver qualquer série de dados como uma combinação de funções que também podem ser vistas como funções vetoriais. Daí se

justifica esta seção. Deste modo, é importante que compreenda-se os procedimentos básicos sobre Análise Vetorial.

Sejam dois vetores quaisquer $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ não paralelos. Para cada vetor $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que:

$$\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 \quad (1.01)$$

Quando o vetor $\vec{v}$ é expresso como na equação 1.1, diz-se que é **Combinação Linear** de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

O conjunto $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ é chamado Base no plano. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não paralelos constitui uma base no plano.

O vetor $\vec{v}$ pode ser representado por $\vec{v} = (a_1, a_2)_B$ ou $v_B = (a_1, a_2)$. Uma base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ é dita Ortonormal se os seus vetores forem ortogonais, que será tratado mais adiante, e unitários, isto é, se $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$.

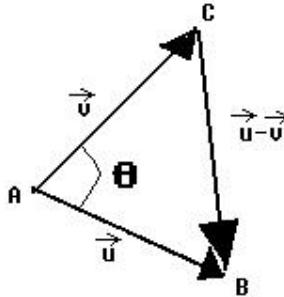
Dentre as infinitas bases ortonormais no plano ou no espaço, uma delas é particularmente importante. Trata-se da base que determina o conhecido sistema cartesiano, e é denominado de base canônica, dado pelos versores (vetores unitários) $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, onde $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ e $\hat{k} = (0, 0, 1)$.

Os vetores que constituem uma base tal como os vetores $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ e os versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, são ditos **Linearmente Independentes** (LI). Isso implica que tais vetores não podem ser escritos como uma combinação linear um do outro e, além disso, são ortogonais entre si. Tal característica de ortogonalidade é de grande importância no presente trabalho e, por isso, será dada atenção mais específica a seguir.

1.1.1 Ortogonalidade

A ortogonalidade entre funções matemáticas é uma das propriedades mais importantes na análise de multirresolução dada pela teoria de Fourier como das Ondeletas. Por isso, é importante que se tenha esse conhecimento para posterior compreensão da análise de multirresolução.

Figura 1.1: Ortogonalidade entre dois vetores. **Fonte:** Autor.



Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos, θ o ângulo entre eles e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC da Figura 1.1 tem-se que:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad (1.02)$$

mas sabendo que

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (1.03)$$

Igualando ambas as equações (1.02) e (1.03):

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad (1.04)$$

daí resulta que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos\theta \quad (1.05)$$

Conclusão: o produto escalar ou produto interno de dois vetores é igual ao produto de seus módulos pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Uma observação importante a ser feita é sobre o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, que é o mesmo do $\cos\theta$, logo:

- 1) $\cos\theta > 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \rightarrow 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$;
- 2) $\cos\theta < 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \rightarrow 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$;
- 3) $\cos\theta = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ$;

Esta última afirmação estabelece a importante condição de ortogonalidade entre dois vetores. Isso é o cerne da decomposição de séries temporais tanto pela Transformada de Fourier (TF) quanto da Transformada em Ondeletas (TO) como será visto mais pra frente.

1.1.2 Ortogonalidade de Funções

Na seção anterior foi definido brevemente o produto escalar entre vetores, também conhecido como produto interno. Agora, irar-se-á definir o produto interno de duas funções, assunto este de grande importância para a TF e, posteriormente, a TO.

Define-se o produto interno de duas funções reais $\Phi_i(t)$, em um intervalo fechado $[a, b]$ onde $i = 1, 2$ à integral:

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int_a^b \rho(t) \Phi_1(t) \Phi_2(t) dt \quad (1.06)$$

onde a integração é feita sobre um intervalo apropriado de t e $\rho > 0$ nesse intervalo, é uma função peso que será, para os propósitos presentes, feita constante e unitária. A definição dada na equação

(1.06) possui a propriedade de simetria (Lemos e Tenório, 2000). Então, dado um sistema infinito de funções $\Phi_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, estas são ditas ortogonais em um intervalo fechado $[a, b]$ se:

$$\int_a^b \Phi_i(t)\Phi_j(t)dt = 0 \quad (1.07)$$

com a condição de que $i \neq j$ (Psikounov, 1972). Com $i = j$ então:

$$\int_a^b [\Phi_i(t)]^2 dt \neq 0 \quad (1.08)$$

Como exemplo de funções ortogonais cita-se as funções trigonométricas, seno e cosseno:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx)dx = \begin{cases} \pi \rightarrow m = n \neq 0 \\ 0 \rightarrow m \neq n \end{cases} \quad (1.09)$$

e também

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} \pi \rightarrow m = n \neq 0 \\ 0 \rightarrow m \neq n \end{cases} \quad (1.10)$$

Portanto, $\text{sen}(nx)$ e $\cos(nx)$ são um conjunto de funções ortogonais no intervalo $(-\pi, \pi)$. Outro ponto importante refere-se ao conceito de **norma** de uma função deriva-se em termos do conceito de produto interno estabelecido anteriormente, dado por:

$$\|\Phi\| = \sqrt{\int_a^b [\Phi_i(x)]^2 dx} \neq 0 \quad (1.11)$$

Se $\|\Phi\| = 1$, a função $\Phi(x)$ é chamada de função normalizada. Caso não for, pode ser normalizada simplesmente definindo uma nova função $\tilde{\Phi} = \Phi/\|\Phi\|$.

Após esta breve introdução sobre espaço vetorial euclidiano, se faz necessário generalizá-lo para incluir outros vetores e funções que possuem os números complexos em sua formulação. Para isso é importante descrever, nem que brevemente, o espaço de Hilbert, muito utilizado no formalismo da Física Quântica (Chpolski, 1978) e, agora, na teoria das funções Ondeletas, sendo esta última requisitora de funções complexas tais como a função Morlet, entre outras, que serão vistas em momento apropriado.

1.2 Espaços de Hilbert

Como mencionado anteriormente, o espaço de Hilbert é uma generalização do espaço euclidiano, ou seja, não está restrito a três dimensões. Além disso, é um espaço onde se utiliza o produto interno, ou melhor, o produto escalar não somente entre vetores mas também em funções matemáticas já tratados nas seções anteriores. Por isso, uma breve introdução sobre o Espaço de Hilbert aqui (obviamente feito de uma maneira bem introdutória) é crucial para a compreensão da teoria das Ondeletas, principalmente quando é mencionado a decomposição de uma série temporal.

O Espaço de Hilbert é definido como um subconjunto $\mathbf{H}$ de um conjunto de números complexos que satisfaz as seguintes propriedades (Gross, 1963):

1. $\mathbf{H}$ é um espaço vetorial, ou seja, os vetores em $\mathbf{H}$ podem ser somados ou multiplicados por escalares complexos conforme as regras