

Mathématiques

IUT 1^{re} année

3^e édition

Thierry Alhalel

Professeur à l'IUT de Blagnac

Florent Arnal

Professeur à l'IUT de Bordeaux

Laurent Chancogne

Professeur à l'INP de Bordeaux

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

© Dunod, Paris, 2017, 2021
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082767-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1. Notions de base	1
1.1 Généralités sur les fonctions	1
1.1.1 Domaine de définition	1
1.1.2 Propriétés graphiques d'une fonction	2
1.1.3 Parité d'une fonction	3
1.1.4 Périodicité	4
1.1.5 Courbes de fonctions liées à une fonction donnée	5
1.2 Trigonométrie	6
1.3 Les nombres complexes	11
1.3.1 Introduction	11
1.3.2 Généralités	11
1.3.3 Forme trigonométrique	12
1.3.4 Forme exponentielle	14
1.3.5 Résolution d'équations	16
1.3.6 Nombres complexes et géométrie	20
1.4 Fonctions usuelles	21
1.4.1 La fonction logarithme népérien	21
1.4.2 Fonctions exponentielles	21
1.5 Limites de fonctions	23
1.5.1 Limites à droite et à gauche	23
1.5.2 Limites des fonctions usuelles	23
1.5.3 Opérations sur les limites	24
1.5.4 Théorèmes de comparaison	26
1.5.5 Asymptotes à une courbe	27
1.6 Continuité et dérivation	28
1.6.1 Dérivation	28
1.6.2 Continuité	36

1.7	Généralités sur le calcul intégral	39
1.7.1	Définition de l'intégrale de Riemann	39
1.7.2	Primitives et intégrales	40
1.7.3	Propriétés de l'intégrale	41
1.7.4	Applications de l'intégrale : valeurs moyenne et efficace	42
1.7.5	Intégration par parties	43
1.8	Suites numériques	45
1.8.1	Généralités	45
1.8.2	Suites arithmétiques et géométriques	46
1.8.3	Variations	47
1.8.4	Suites majorées, minorées	48
1.8.5	Convergence	48
1.9	Exercices pour s'entraîner	50
1.9.1	Exercices de trigonométrie	50
1.9.2	Exercices sur les complexes	52
1.9.3	Exercices sur les fonctions	54
1.9.4	Exercices d'intégration	56
1.9.5	Exercices sur les suites	57
Chapitre 2.	Analyse	61
2.1	Fonctions réciproques	61
2.1.1	Généralités	61
2.1.2	Fonctions monotones	61
2.1.3	Représentation graphique dans un repère orthonormé	62
2.1.4	Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques	63
2.2	Méthodes de calcul intégral	69
2.2.1	Changement de variable	69
2.2.2	Cas de certaines fractions rationnelles	70
2.3	Notion d'intégrale généralisée	80
2.3.1	Intégrale d'une fonction bornée sur un intervalle non borné	80
2.3.2	Intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné	83
2.4	Suites récurrentes linéaires numériques	84
2.4.1	Suites récurrentes linéaires d'ordre 1	84
2.4.2	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	85
2.5	Développements limités	88
2.5.1	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	89
2.5.2	Formules de Taylor	90
2.5.3	Développements limités	91

2.5.4	DL en un réel non nul. Développements asymptotiques	94
2.5.5	Applications	95
2.5.6	Exercices	96
2.6	Résolution d'équations différentielles du 1 ^{er} ordre	101
2.6.1	Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?	101
2.6.2	Comment la résoudre ? Présence et absence des conditions initiales	101
2.6.3	Où trouve-t-on des équations différentielles ?	102
2.6.4	Équations différentielles du 1 ^{er} ordre à variables séparables	102
2.6.5	Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre avec second membre simple	103
2.6.6	Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre et méthode de Lagrange	105
2.7	Résolution d'équations différentielles du 2 ^e ordre	110
2.7.1	Généralités sur les équations différentielles linéaires du second ordre	110
2.7.2	Où trouve-t-on des équations du second ordre ?	111
2.7.3	Équations différentielles linéaires du 2 nd ordre à coefficients constants sans second membre	111
2.7.4	Solution particulière de l'équation avec second membre	113
Chapitre 3.	Algèbre linéaire	117
3.1	Matrices et calcul matriciel	117
3.1.1	Définition et interprétation des matrices	117
3.1.2	Utilité d'une matrice	118
3.1.3	Opérations simples sur les matrices	119
3.1.4	Multiplication de matrices entre elles	120
3.1.5	Quelques propriétés des opérations sur les matrices	121
3.1.6	Matrice transposée	122
3.1.7	Matrices carrées (n, n)	123
3.1.8	Matrices carrées inversibles	124
3.2	Système linéaire d'équations-algorithme du pivot de Gauss	135
3.2.1	Position du problème	135
3.2.2	Écriture matricielle du système	135
3.2.3	Algorithme ou méthode du pivot de Gauss	136
3.3	Déterminants de matrices carrées	143
3.3.1	Calcul pour des matrices carrées d'ordre $n = 2$ et $n = 3$	143
3.3.2	Propriétés générales des déterminants	144
3.3.3	Cas des matrices carrées $n > 3$: mineurs et cofacteurs	144

3.3.4	Application aux systèmes linéaires à n équations et n inconnues	146
3.4	Espaces vectoriels	150
3.4.1	Introduction	150
3.4.2	Définitions et exemples	152
3.4.3	Sous-espaces vectoriels	154
3.5	Familles libres et liées	159
3.5.1	Combinaisons linéaires et familles génératrices	159
3.5.2	Familles libres, bases et dimension	160
3.5.3	Représentation matricielle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$	164
3.5.4	Exercices	166
3.6	Applications linéaires	171
3.6.1	Introduction	171
3.6.2	Image et noyau d'une application linéaire	172
3.6.3	Matrices et applications linéaires	173
3.6.4	Injections, surjections, bijection	175
3.6.5	Applications linéaires et changement de base	177
3.6.6	Exercices	178
3.7	Polynômes et fractions rationnelles	185
3.7.1	Polynômes	185
3.7.2	Fractions rationnelles	188
Chapitre 4.	Mathématiques et solution logicielle	197
4.1	Utilisation d'un logiciel de calcul formel : Maxima	197
4.1.1	Présentation de Maxima	197
4.1.2	Généralités	198
4.1.3	Exemples de calculs effectués par Maxima	198
4.2	Résolution approchée d'équations non linéaires	207
4.2.1	Méthodes itératives	207
4.2.2	Méthode de Newton (ou méthode de la tangente)	212
4.2.3	Comparaison avec la méthode de la dichotomie	216
4.3	Algorithme d'Euler	222
4.3.1	Mise en jambes et principe de l'algorithme	222
4.3.2	Algorithme d'Euler	224
4.3.3	Sensibilité de la méthode d'Euler	226
4.3.4	Programmer Euler avec MAXIMA	228
4.3.5	Programmer Euler en Python	230
	Exercices d'entraînement	231

Objectifs

- Rappeler certaines notions, vues en Terminale au lycée, dont une bonne maîtrise est indispensable pour aborder sereinement les chapitres suivants
- Rappeler les notions fondamentales de l'analyse
- Revoir les connaissances de base sur l'algèbre des nombres complexes et le plan complexe

Conseils

- Apprenez les formules rappelées dans ce chapitre
- Entraînez-vous sur des exercices

1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Les fonctions seront utilisées fréquemment, notamment pour modéliser des phénomènes continus.

1.1.1 Domaine de définition

Définition 1.1

On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de réels.

On notera :

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble D est appelé l'ensemble de définition de f .



Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.

Dans le cas où la fonction n'est connue que par l'écriture de $f(x)$, on sous-entend que *le domaine de définition est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe.*

Exercice 1 : Recherche d'un domaine de définition

Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 > 0$ (l'expression sous le radical doit être positive et le dénominateur doit être non nul). Considérons le polynôme $x^2 - 4$. Ce polynôme admet deux racines : -2 et 2 . On rappelle qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines. Ici, $a = 1$ donc $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

On peut donc conclure que le domaine de définition de f est : $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

1.1.2 Propriétés graphiques d'une fonction

On se place dans un repère **orthonormal** du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble I .

L'ensemble des points M de coordonnées $M(x; f(x))$, $x \in I$, est appelé **courbe représentative** de f ou **graphe** de f .

La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.

Exemple : Représentation graphique de la fonction « Partie entière »

La fonction partie entière, notée E , est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$ pour tout x tel que $n \leq x < n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, on a : $E(0) = 0$; $E(0,5) = 0$ et $E(1) = 1$.

La représentation graphique de cette fonction est la suivante :

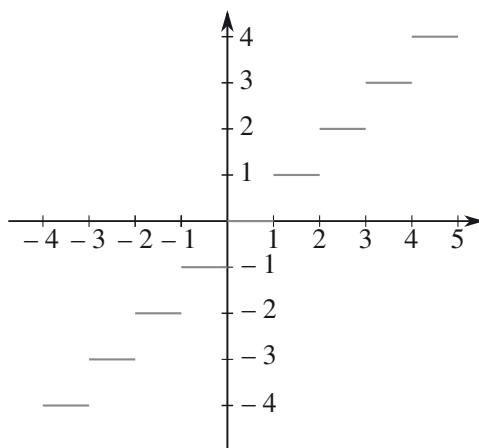


Figure 1.1 Représentation de la fonction « Partie entière »

1.1.3 Parité d'une fonction

Définition 1.3

Un ensemble D de $\mathbb{R}$ est centré en 0 si $\forall x \in D, -x \in D$.

Définition 1.4

Soit f une fonction dont le domaine de définition D est centré en 0.

La fonction est **paire** si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

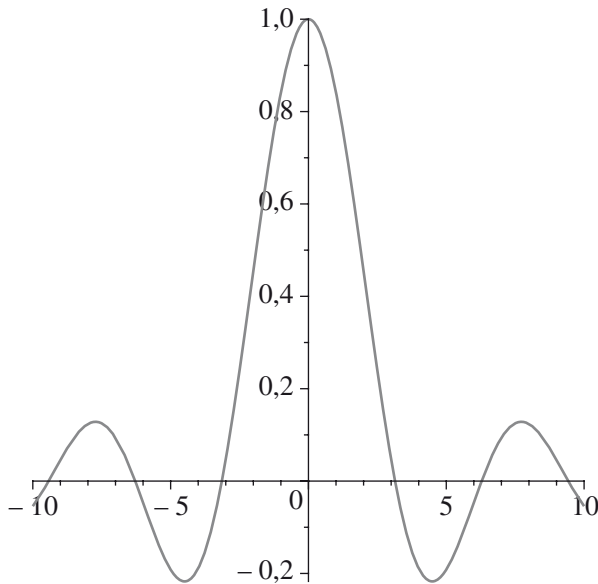


Figure 1.2 Courbe représentant une fonction paire

Définition 1.5

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition D est centré en 0.

La fonction f est dite **impaire** si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Dans ce cas, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'origine O** du repère.

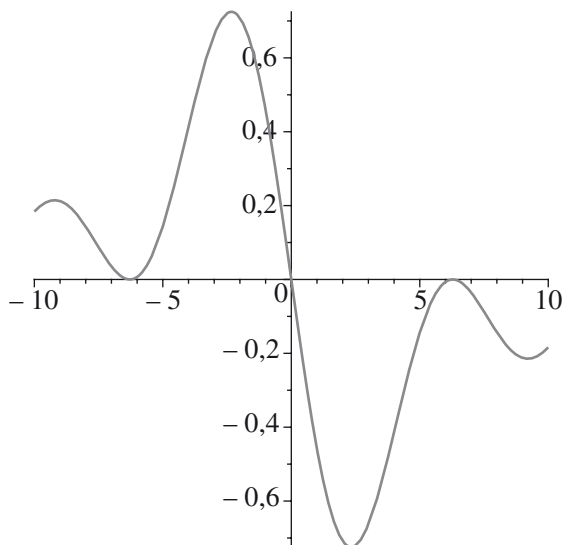


Figure 1.3 Courbe représentant une fonction impaire



- Si f est une fonction impaire définie en 0, alors $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- Pour l'étude d'une fonction paire ou impaire, on peut donc restreindre l'intervalle d'étude.

1.1.4 Périodicité

Définition 1.6

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

La fonction f sera dite **périodique** de période T si T est le plus petit réel strictement positif tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.



Conséquences

En conséquence, on peut restreindre l'étude de la fonction f à un intervalle I de longueur T .

La courbe représentative de f sera obtenue à partir de l'arc d'équation :

$$\begin{cases} y = f(x) & \text{si } x \in I \\ y = 0 & \text{si } x \notin I \end{cases} \text{ par des translations de vecteurs } kT\vec{i} \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Exercice 2

Montrez que la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ est une fonction périodique dont on donnera la période. Représentez cette fonction.

Solution

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :

$$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - [E(x) + 1] = x - E(x) = f(x).$$

Avant de conclure sur la périodicité de f , il faut s'assurer que 1 est le plus petit réel T tel que, pour tout réel x , $f(x+T) = f(x)$.

En particulier, on doit avoir : $f(T) = f(0)$.

Or, si $0 < T < 1$ alors $f(T) = T - E(T) = T$ et $f(0) = 0$ donc $f(T) \neq f(0)$.

La fonction f est donc périodique de période 1. Il suffit de la représenter sur $[0;1[$, en utilisant que sur cet intervalle $f(x) = x$, puis d'effectuer des translations de vecteurs $k\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. La représentation graphique est la suivante :

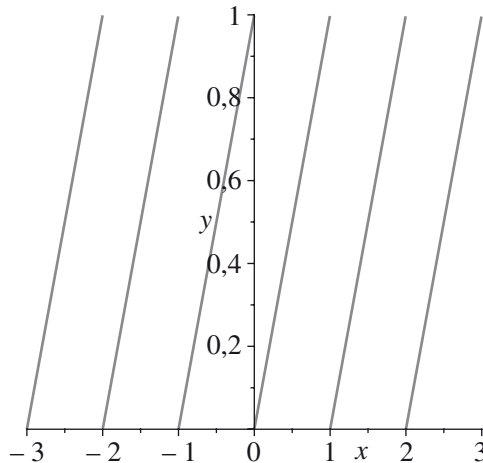


Figure 1.4

1.1.5 Courbes de fonctions liées à une fonction donnée

Nous allons, dans cette partie, considérer les fonctions du type $x \mapsto f(x) + \lambda$ et $x \mapsto f(x + \lambda)$.

Théorème 1.1

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $\lambda\vec{j}$.

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x + \lambda)$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$.

Exercice 3

Déterminez une expression « envisageable » de la fonction g dont la courbe est donnée ci-dessous (on fera le lien avec la fonction « Inverse »).

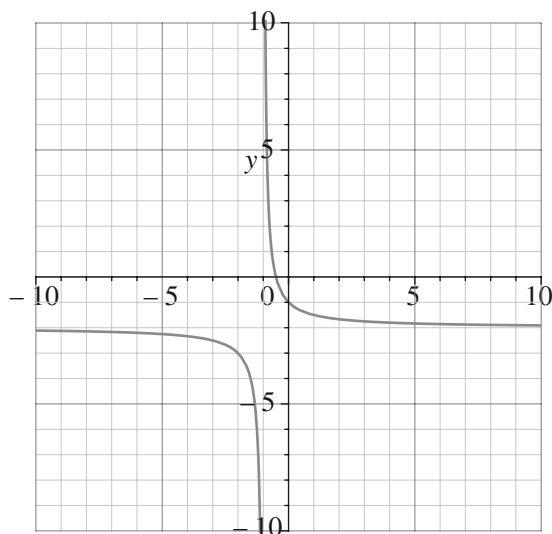


Figure 1.5

Solution

Cette courbe semble être l'image de la courbe de la fonction « Inverse » $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-\vec{i} - 2\vec{j}$ qu'on peut décomposer en deux

translations : l'une de vecteur $-\vec{i}$ et l'autre de vecteur $-2\vec{j}$.

La translation de vecteur $-\vec{i}$ est associée à $f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

La translation de vecteur $-2\vec{j}$ conduit à considérer :

$$g(x) = f(x+1) - 2 = \frac{1}{x+1} - 2 = \frac{-2x-1}{x+1}.$$

1.2 TRIGONOMÉTRIE

Pour tout ce chapitre, le plan sera rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1.7

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens direct.