

Jean-Marie Monier



ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE PC-PSI-PT

**NOUVELLE
ÉDITION**

- ▶ Un cours conforme au programme
- ▶ Des exercices-types résolus
- ▶ Les méthodes à retenir
- ▶ De nombreux exercices et problèmes corrigés

5^e édition

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

PC-PSI-PT

Cours, méthodes et exercices corrigés

Jean-Marie Monier

*Professeur en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*

5^e édition

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com



Maquette intérieure : Lasertex

Couverture : Bruno Loste

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008

© Dunod, Paris, 1996 pour la première édition

ISBN 978-2-10-053970-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Cours

CHAPITRE 1

Compléments d'algèbre linéaire

3

1.1 Espaces vectoriels

4

1.1.1 Familles libres, familles liées, familles génératrices

4

1.1.2 Sommes, sommes directes

4

1.2 Applications linéaires

9

1.2.1 Théorème d'isomorphisme

9

1.2.2 Interpolation de Lagrange

10

1.2.3 Théorème du rang

11

1.3 Dualité

13

1.3.1 Généralités

13

1.3.2 Hyperplans

14

1.3.3 Bases duales

16

1.4 Calcul matriciel

22

1.4.1 Trace

22

1.4.2 Blocs

27

CHAPITRE 2

Déterminants

35

2.1 Le groupe symétrique

36

2.1.1 Structure de $\mathfrak{S}_n$

36

2.1.2 Transpositions

36

2.1.3 Cycles

39

2.2 Applications multilinéaires

41

2.2.1 Généralités

41

2.2.2 Applications multilinéaires alternées

41

2.3 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un ev de dimension n

43

2.3.1 Espace $\Lambda_n(E)$

43

2.3.2 Propriétés

44

2.4 Déterminant d'un endomorphisme

45

2.5 Déterminant d'une matrice carrée

46

2.6	Développement par rapport à une rangée	49
2.6.1	Cofacteurs et mineurs	49
2.6.2	Comatrice	53
2.7	Calcul des déterminants	55
2.7.1	Déterminant d'une matrice triangulaire	55
2.7.2	Manipulation de lignes et de colonnes	55
2.7.3	Cas $n = 2$, $n = 3$	58
2.7.4	Déterminant de Vandermonde	59
2.7.5	Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs	60
2.8	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	64
2.9	Supplément : Rang et sous-matrices	65
2.10	Systèmes affines	68
2.10.1	Position du problème	68
2.10.2	Résolution dans le cas d'un système de Cramer	69
CHAPITRE 3	Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	73
3.1	Éléments propres	74
3.2	Polynôme caractéristique	79
3.3	Diagonalisabilité	86
3.4	Trigonalisation	98
3.5	Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices carrées	106
3.5.1	Généralités	106
3.5.2	Polynômes annulateurs	109
3.5.3	Théorème de Cayley et Hamilton	116
3.5.4	Idéaux de $K[X]$ (PSI)	118
3.6	Applications de la diagonalisation	119
3.6.1	Calcul des puissances d'une matrice carrée	119
3.6.2	Suites récurrentes linéaires simultanées du 1 ^{er} ordre à coefficients constants	123
3.6.3	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants	124
	Problèmes	126
CHAPITRE 4	Espaces préhilbertiens réels	129
4.1	Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques	130
4.1.1	Généralités	130
4.1.2	Interprétation matricielle	132
4.2	Rappels sur les espaces euclidiens	137
4.2.1	Produit scalaire	137
4.2.2	Orthogonalité	141

4.3	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien	146
4.3.1	Endomorphismes symétriques	146
4.3.2	Endomorphismes orthogonaux	153
4.4	Adjoint	158
4.4.1	Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien	158
4.4.2	Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien	162
4.5	Réduction des matrices symétriques réelles	163
4.5.1	Théorème fondamental	163
4.5.2	Réduction simultanée	169
4.5.3	Positivité	170
	Problème	186
CHAPITRE 5	Espaces préhilbertiens complexes	187
5.1	Formes sesquilineaires	188
5.1.1	Généralités	188
5.1.2	Cas de la dimension finie	190
5.2	Espaces préhilbertiens complexes et espaces hermitiens	193
5.2.1	Produit scalaire hermitien	193
5.2.2	Orthogonalité	197
CHAPITRE 6	Géométrie	203
6.1	Courbes du plan	204
6.1.1	Enveloppe d'une famille de droites du plan	204
6.1.2	Rappels sur l'abscisse curviligne et le rayon de courbure	211
6.1.3	Centre de courbure	216
6.1.4	Développée d'une courbe du plan	220
6.1.5	Développantes d'une courbe du plan	223
6.2	Courbes de l'espace	227
6.2.1	Généralités	227
6.2.2	Tangente en un point	229
6.2.3	Abcisse curviligne	231
6.3	Surfaces	235
6.3.1	Généralités	235
6.3.2	Plan tangent en un point	238
6.3.3	Surfaces usuelles	244
6.3.4	Quadriques	252
6.3.5	Surfaces réglées, surfaces développables	261
6.3.6	Exemples de recherche de courbes tracées sur une surface et satisfaisant une condition différentielle	267

Solutions des exercices

Chapitre 1	278
Chapitre 2	284
Chapitre 3	293
Chapitre 4	322
Chapitre 5	347
Chapitre 6	350
Index des notations	373
Index alphabétique	375

Préface

Jeune lycéen, j'avais, pour les manuels scolaires, une vénération quasi-religieuse. Que représentaient pour moi ces livres qu'une main zélée avait soigneusement recouverts en début d'année ? Je ne saurais le dire avec précision : ils contaient, sans doute, la Vérité. À mon sens, par exemple, un théorème ne pouvait être énoncé que dans le scrupuleux respect des termes de l'ouvrage ; approximative, la restitution n'était pas valable. L'utilisation, par les professeurs, des photocopiés (rappels et compléments de cours, énoncés de problèmes ...) n'était pas, alors, habituelle ; je pense, aujourd'hui, que cela était dû bien plus aux difficultés de reprographie qu'à un non-désir de ces professeurs d'imprimer leur griffe personnelle par le choix d'exercices originaux. Ils se référaient constamment aux manuels, en suivaient fidèlement la progression, y puisaient les exercices. Je me souviens, d'ailleurs, d'avoir été troublé quand, en Terminale, mon professeur de Math., que je révérais aussi, se permettait parfois quelques critiques à l'égard d'un ouvrage qu'il nous avait pourtant conseillé ! Quant aux auteurs de ces livres, ils restaient énigmatiques : qui étaient ces demi-dieux détenteurs du Savoir ?

Plus tard, mes rapports d'étudiant avec les manuels didactiques ont, évidemment, évolué, mais je crois avoir, naïvement sans doute, conservé cette approche faite d'envie et de respect qui m'empêche, par exemple, de porter des annotations en marge – je ne jouerai pas la farce d'un Pierre de Fermat ! – et cet a priori favorable qui me rendrait difficile la rédaction d'une critique objective.

Heureusement, tel n'est pas mon propos aujourd'hui ! Mais j'ai voulu, par ces quelques mots, souligner l'importance capitale – même dans le subconscient de chacun – de ces livres de cours sur lesquels vous travaillez durant vos études et qui vous accompagnent toute votre vie.

Aucun professeur, fût-il auteur de manuels, ne songerait à conseiller un livre en remplacement d'un enseignement vivant et vécu. Mais, le cours imprimé, s'il est fidèle à la lettre et à l'esprit du programme d'une classe, peut aider, de façon très importante, l'étudiant consciencieux. Celui-ci, surtout lorsqu'il est débutant, trouvera la sécurité dont il a besoin dans un plan clair, précis, rigoureux, dans une présentation particulièrement soignée où les diverses polices de caractères sont judicieusement alternées, dans la vision d'ensemble des questions dont traite l'ouvrage. Il y recherchera, avec la certitude de les obtenir, telle démonstration qu'il n'a pas bien comprise, tel exemple ou contre-exemple qui l'aidera à mieux assimiler une notion, la réponse à telle question qu'il n'a pas osé poser sinon à lui-même...

Pour que le livre joue ce rôle d'assistant – certes passif mais constamment disponible – il doit, je pense, être proche des préoccupations immédiates de l'étudiant, ne pas exiger, pour sa lecture, un savoir qui n'a pas encore été acquis, ne pas rebuter par l'exposé trop fréquent de notions trop délicates ; mais il doit, cependant, contenir une substance suffisante pour constituer les solides fondations sur lesquelles s'échafaude la pyramide du savoir scientifique.

On l'imagine, dès lors, aisément : l'écriture d'un tel manuel, à l'intention des étudiants des classes préparatoires ou d'un premier cycle universitaire, demande, à côté de la nécessaire compétence, des qualités pédagogiques certaines, affinées par une longue expérience professionnelle dans ces sections, une patience et une minutie rédactionnelles inouïes.

Jean-Marie Monier a eu le courage de se lancer dans ce gigantesque travail et les ouvrages qu'il nous propose aujourd'hui – après les recueils d'exercices qui ont eu le succès que l'on sait – montrent qu'il a eu raison : il a, me semble-t-il, pleinement atteint le but qu'il s'était fixé, à savoir rédiger des livres de cours complets à l'usage de tous les étudiants et pas seulement des polytechniciens en herbe. Les nombreux ouvrages d'approfondissement ou de spécialité seront, évidemment, lus et savourés plus tard, ... par ceux qui poursuivront. Pour l'instant, il faut, à l'issue de la Terminale, assimiler complètement les nouvelles notions de base (la continuité, la convergence, le linéaire...) ; le lecteur est guidé, pas à pas, par une main sûre qui le tient plus fermement dès qu'il y a danger : les mises en garde contre certaines erreurs sont le fruit de l'observation répétée de celles-ci chez les élèves.

À tout instant, des exercices sont proposés qui vont l'interpeller : il sera heureux de pouvoir, quelques dizaines de pages plus loin, soit s'assurer que, par une bonne démarche il est parvenu au bon résultat, soit glaner une précieuse indication pour poursuivre la recherche : le livre forme un tout, efficace et cohérent.

J'ai dit quel rôle majeur dans la formation d'un jeune esprit scientifique peut jouer un manuel qui lui servira de référence pendant longtemps. Sa conception, sa rédaction, sa présentation sont, alors, essentielles : on ne peut que viser à la perfection !

C'est tout le sens du travail effectué par Jean-Marie Monier avec une compétence, un goût, une constance admirables, depuis le premier manuscrit jusqu'aux ultimes corrections, dans les moindres détails, avant la version définitive.

Ces ouvrages qui répondent à un réel besoin aujourd'hui, seront, j'en suis persuadé, appréciés par tous ceux à qui ils s'adressent – par d'autres aussi sans doute – ceux-là mêmes qui, plus tard, diront : « Ma formation mathématique de base, je l'ai faite sur le MONIER ! ».

H. Durand
Professeur en Mathématiques Spéciales PT*
au lycée La Martinière Monplaisir à Lyon

Avant-propos

Ce nouveau Cours de Mathématiques avec exercices corrigés s'adresse aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles (1^{re} année PCSI-PTSI, 2^e année PC-PSI-PT, PC*-PSI*-PT*), aux étudiants du premier cycle universitaire scientifique et aux candidats aux concours de recrutement de professeurs.

Le plan en est le suivant :

Analyse PCSI-PTSI : *Analyse* en 1^{re} année
Algèbre PCSI-PTSI : *Algèbre* en 1^{re} année
Géométrie PCSI-PTSI : *Géométrie* en 1^{re} année
Analyse PC-PSI-PT : *Analyse* en 2^e année
Algèbre et géométrie PC-PSI-PT : *Algèbre et géométrie* en 2^e année.

Cette nouvelle édition répond aux besoins et aux préoccupations des étudiant(e)s.

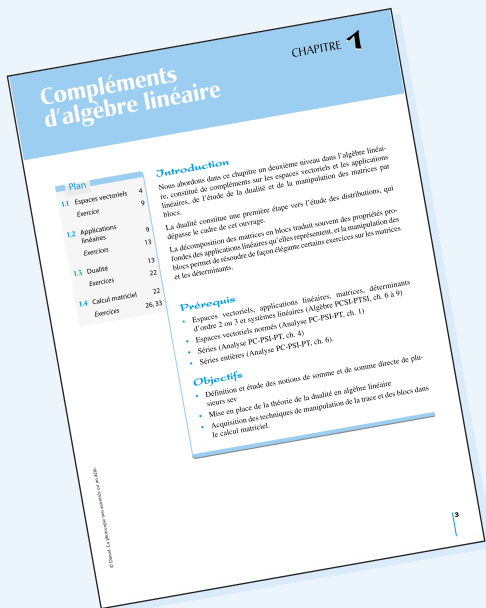
Une nouvelle maquette, à la convivialité accrue, assure un meilleur accompagnement pédagogique. Le programme officiel est suivi de près ; les notions ne figurant pas au programme ne sont pas étudiées dans le cours. Des exercices-types résolus et commentés, incontournables et cependant souvent originaux, aident le lecteur à franchir le passage du cours aux exercices. Les très nombreux exercices, progressifs et tous résolus, se veulent encore plus accessibles et permettent au lecteur de vérifier sa bonne compréhension du cours.

Des compléments, situés à la limite du programme sont traités, en fin de chapitre, sous forme de problèmes corrigés.

J'accueillerai avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien me faire parvenir aux bons soins de Dunod, éditeur, 5, rue Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

Pour bien utiliser



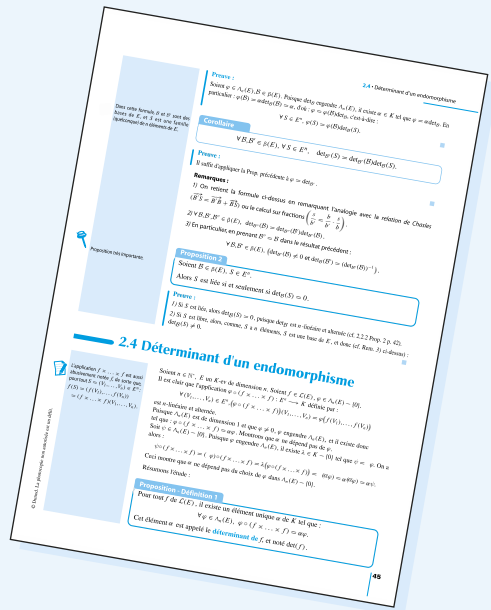
La page d'entrée de chapitre

Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.

Le cours

Le cours aborde toutes les notions du programme de façon structurée afin d'en faciliter la lecture.

La colonne de gauche fournit des remarques pédagogiques qui accompagnent l'étudiant dans l'assimilation du cours. Il existe quatre types de remarques, chacun étant identifié par un pictogramme.



Les pictogrammes dans la marge



Commentaires pour bien comprendre le cours (reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration...).



Indication du degré d'importance d'un résultat.



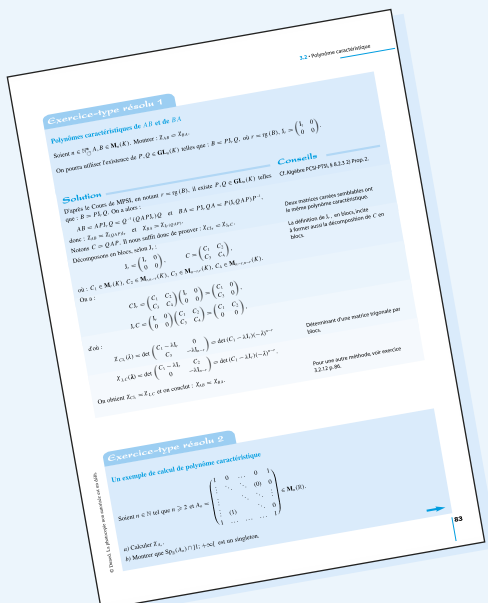
Mise en garde contre des erreurs fréquentes.



Rappel d'hypothèse ou de notation.

Les exercices-types résolus

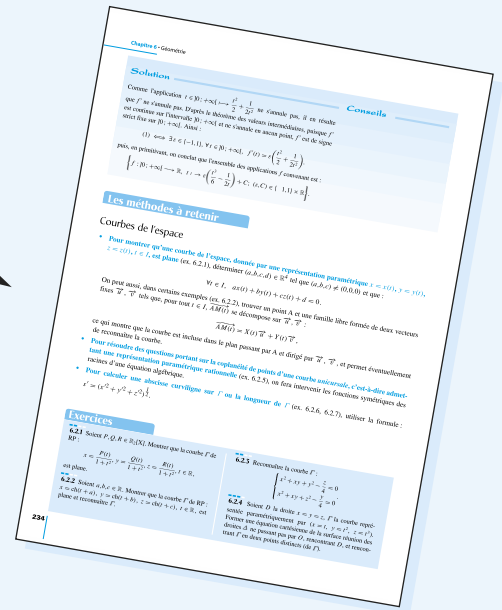
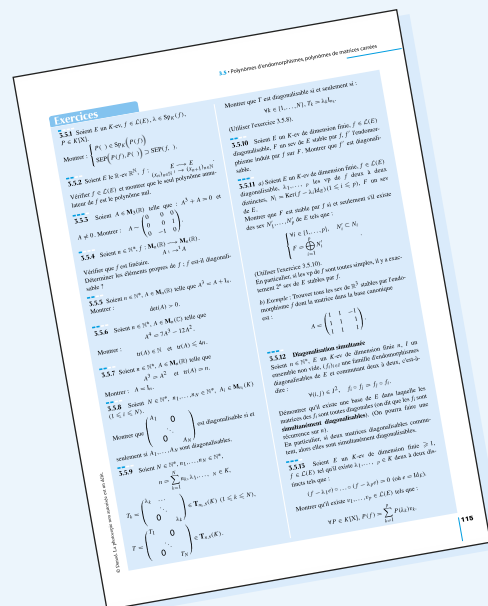
Régulièrement dans le cours, des exercices-types résolus permettent d'appliquer ses connaissances sur un énoncé incontournable. La solution est entièrement rédigée et commentée.



cet ouvrage

Les méthodes à retenir

Régulièrement dans le cours, cette rubrique propose une synthèse des principales méthodes à connaître.



Les exercices et problèmes

Dans chaque chapitre, à la fin d'une sous-partie, des énoncés d'exercices sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4. A la fin de certains chapitres, des énoncés de problèmes proposent d'aller plus loin.

Les solutions des exercices et problèmes

Tous les exercices et problèmes sont corrigés. Les solutions sont regroupées en fin d'ouvrage.



Programmes PC, PSI, PT

Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

- Dans la voie PT, la notion de somme directe (§ 1.1) n'est au programme que dans le cas de deux sev d'un ev de dimension finie.
- Le théorème du § 1.2.1, l'étude de l'interpolation du point de vue de l'algèbre linéaire (§ 1.2.2), la dualité (§ 1.3) ne sont pas au programme PT.
- La notion de base duale (§ 1.3.3) n'est pas au programme PC.

Chapitre 2 : Déterminants

- L'étude du groupe symétrique (§ 2.1) n'est pas aux programmes PC, PT ; la démonstration de l'existence du déterminant est admise.
- La définition et les propriétés de la comatrice (§ 2.6.2) ne sont qu'au programme PSI.

Chapitre 3 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

- Les notions de polynôme d'endomorphisme et de polynôme de matrice ne sont pas au programme PT.
- Le théorème de Cayley-Hamilton (§ 3.5.3) et l'étude des idéaux de $K[X]$ (§ 3.5.4) ne sont qu'au programme PSI.

Chapitre 4 : Espaces préhilbertiens réels

- L'étude (élémentaire) des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques (§ 4.1) n'est pas au programme PC.
- La notion d'adjoint (§ 4.4) et la réduction simultanée (§ 4.5.2) ne sont qu'au programme PSI.

Chapitre 5 : Espaces préhilbertiens complexes

Ce chapitre ne concerne pas la voie PT.

Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit ou de la saisie : Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Jean-Philippe BERNE, Mohamed BERRAHO, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Gilles DEMEUSOIS, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Annie MICHEL, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, Sophie RONDEAU, René ROY, Nathalie et Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ, Gérard SIBERT, Mimoun TAÏBI.

Une pensée émue accompagne les regrettés Gilles CHAFFARD et Alain GOURET.

Enfin, je remercie vivement les Éditions Dunod, Gisèle Maïus, Bruno Courtet, Nicolas Leroy, Michel Mounic, Dominique Decobecq et Éric d'Engenières, dont la compétence et la persévérance ont permis la réalisation de ces volumes.

Jean-Marie Monier

Cours

Plan

1.1	Espaces vectoriels	4
	<i>Exercice</i>	9
1.2	Applications linéaires	9
	<i>Exercices</i>	13
1.3	Dualité	13
	<i>Exercices</i>	22
1.4	Calcul matriciel	22
	<i>Exercices</i>	26, 33

Introduction

Nous abordons dans ce chapitre un deuxième niveau dans l'algèbre linéaire, constitué de compléments sur les espaces vectoriels et les applications linéaires, de l'étude de la dualité et de la manipulation des matrices par blocs.

La dualité constitue une première étape vers l'étude des distributions, qui dépasse le cadre de cet ouvrage.

La décomposition des matrices en blocs traduit souvent des propriétés profondes des applications linéaires qu'elles représentent, et la manipulation des blocs permet de résoudre de façon élégante certains exercices sur les matrices et les déterminants.

Prérequis

- Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants d'ordre 2 ou 3 et systèmes linéaires (Algèbre PCSI-PTSI, ch. 6 à 9)
- Espaces vectoriels normés (Analyse PC-PSI-PT, ch. 1)
- Séries (Analyse PC-PSI-PT, ch. 4)
- Séries entières (Analyse PC-PSI-PT, ch. 6).

Objectifs

- Définition et étude des notions de somme et de somme directe de plusieurs sev
- Mise en place de la théorie de la dualité en algèbre linéaire
- Acquisition des techniques de manipulation de la trace et des blocs dans le calcul matriciel.

K désigne un corps commutatif. Conformément au programme, on peut se limiter aux cas $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$.

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1

Familles libres, familles liées, familles génératrices

E désigne un K -espace vectoriel (en abrégé : K -ev), I désigne un ensemble fini.

Définition 1

On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E tout élément x de E tel qu'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de K , telle que $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$.

Définition 2

1) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **libre** si et seulement si, pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de K :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 \implies (\forall i \in I, \alpha_i = 0).$$

2) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **liée** si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de K , telle que :

$$(\alpha_i)_{i \in I} \neq (0) \text{ et } \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0.$$

Définition 3

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **génératrice de E** (ou : **engendre E**) si et seulement si tout élément de E est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 4

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est appelée **base de E** si et seulement si elle est libre et génératrice de E .

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition-Définition 5

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , alors, pour tout x de E , il existe une famille $(\xi_i)_{i \in I}$ de K , unique, telle que $x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i$. Les ξ_i ($i \in I$) sont appelés les **coordonnées** (ou : **composantes**) de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

1.1.2

Sommes, sommes directes

E désigne un K -ev, I désigne un ensemble fini.



On dit aussi que x est **combinaison linéaire finie** des x_i , $i \in I$.



Cette Définition généralise celle vue en 1^{re} année pour le cas d'une famille finie, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.3.1 Déf.2.