

C. DESCHAMPS | F. MOULIN

N. CLEIREC | J.-M. CORNIL | Y. GENTRIC | F. LUSSIER | C. MULLAERT | S. NICOLAS



MATHS

PCSI-PTSI

TOUT-EN-UN

2^e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077903-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

La réforme du lycée, qui a suivi celle du collège, a débuté par la classe de seconde en septembre 2010 et elle s'est achevée, en 2012, avec la mise en œuvre des nouvelles classes de terminale. Les étudiants qui entreprennent des études en classes préparatoires depuis septembre 2013 ont bénéficié, durant toute leur scolarité, de programmes rénovés, en particulier en mathématiques. Afin d'assurer une nécessaire continuité, de nouveaux programmes de classes préparatoires étaient donc indispensables.

En mathématiques, en 1995, lors de la mise en place des programmes de l'époque, les Éditions Dunod nous avaient confié la tâche de fournir aux étudiants un ouvrage de référence clair et précis, complétant le cours, irremplaçable, du professeur. Nous avons alors tenté un pari : faire tenir exposés et exercices, avec corrigés, en un seul volume, le premier « tout-en-un » (depuis très largement imité!), qui a remporté un grand succès.

Aujourd'hui, avec une équipe partiellement renouvelée et de grande qualité, nous publions ce nouveau « tout-en-un » destiné aux classes préparatoires de première année PCSI et PTSI. Tout en gardant les grands principes de l'ancien ouvrage, ce nouveau « tout-en-un » a plusieurs ambitions :

- Être spécifique aux classes de PCSI et de PTSI afin d'être au plus près des programmes, très voisins, de ces deux sections et des objectifs de leur formation mathématique. Évidemment, des indications comme ci-contre permettent aux étudiants de retrouver dans l'ouvrage quelques spécificités de chacune d'entre elles : par exemple les chapitres de géométrie propres à la filière PTSI, ainsi que les parties du programme destinées à son option PSI.
- Proposer un cours et des applications en conformité avec le texte, mais aussi avec l'esprit des programmes. Dans ce but, par exemple, la première partie « Techniques de calcul » est là pour aider les étudiants à réaliser la transition entre les programmes rénovés du lycée et les objectifs de la « formation mathématique » en classes préparatoires. Ces premiers chapitres ont pour mission de consolider et d'élargir les acquis du secondaire, en particulier dans la pratique du calcul, afin d'aborder dans les meilleures conditions le cœur du programme ; à dessein, certaines définitions précises et constructions rigoureuses ont donc été différées à des chapitres ultérieurs (avec un pictogramme comme ci-contre indiquant la page à laquelle se référer).
- Tout comme dans l'ouvrage MPSI, mettre en œuvre de nouvelles méthodes d'acquisition des connaissances en proposant à l'étudiant une démarche pour s'appropriier les théories du programme, théories indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines.



En pratique :

- Le livre débute par un chapitre 0 : « Pour commencer » ; il ne s'agit pas d'un cours de logique mais d'une acquisition, a minima, de notions fondamentales (assertions, ensembles, quantificateurs), chacune étant très largement illustrée.
- De très nombreux exemples, souvent simples et issus de connaissances du lycée, illustrent chaque définition.
- Les propositions et théorèmes sont énoncés, suivis immédiatement d'exemples élémentaires d'applications, et leurs démonstrations sont l'occasion d'un travail personnel de l'étudiant. Nous avons choisi de ne pas faire figurer systématiquement, à la suite de l'énoncé, la rédaction complète de ces démonstrations, mais plutôt d'indiquer à l'étudiant le principe de celles-ci avec les éléments qui lui permettront de la construire par lui-même et ainsi de mieux s'approprier la propriété. Évidemment, guidé par un renvoi précis en fin du chapitre, il pourra ensuite consulter la démonstration complète et vérifier (ou compléter) son travail personnel.
- Lorsque plusieurs preuves étaient possibles, nous avons choisi de ne pas privilégier systématiquement la plus courte, souvent au profit de constructions explicites. C'est volontaire ; durant leurs études au lycée nos étudiants n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de celles-ci.
- Au cours du déroulement de chaque chapitre, l'étudiant trouvera, pour illustrer immédiatement l'usage des propositions et théorèmes, de très nombreux exercices simples qu'il doit évidemment chercher et dont il pourra consulter une solution en fin de chapitre afin de vérifier son propre travail.
- Régulièrement l'étudiant trouvera des « points méthode » qui, pour une situation donnée, lui offrent une ou deux possibilités d'approche de la résolution de problèmes correspondants. Évidemment il trouvera après ce « point méthode » un ou plusieurs exemples ou exercices l'illustrant.
- Enfin, à l'issue de chaque chapitre, il trouvera des exercices plus ambitieux demandant plus de réflexion, à chercher une fois le chapitre totalement maîtrisé. Certains, plus difficiles, sont signalés par des étoiles ; les solutions de tous ces exercices complémentaires sont données, mais de façon plus succincte que les solutions des exercices fondamentaux figurant dans le déroulement du cours.
- Bien entendu nous sommes très intéressés par toute remarque que les étudiants, nos collègues, tout lecteur... seraient amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

Claude Deschamps et François Moulin

Le site

les-maths-en-prepas.fr

Ce livre est prolongé par un site web qui vous aidera à assimiler efficacement le programme de première année. Ce site, en synergie complète avec l'ouvrage mais qu'il ne remplace absolument pas, a été développé par certains des auteurs du livre pour offrir des compléments pédagogiques impossibles à mettre dans un ouvrage papier sous peine de le rendre illisible. Ces compléments portent à la fois sur les exercices et sur le cours.

- En ce qui concerne les **exercices**, il ne s'agit pas juste d'une série supplémentaire d'exercices corrigés. Au contraire, l'interactivité que permet l'ordinateur ou la tablette est mise à profit pour vous fournir des niveaux d'explication bien plus détaillés que ceux d'un livre, pour vous proposer des pistes, voire de fausses pistes qu'il est bon d'avoir explorées afin de bien comprendre pourquoi elles ne mènent à rien. C'est vous-même qui choisirez, en fonction des problèmes de compréhension que vous rencontrerez, d'accéder ou non à ces différents niveaux d'explication, avant d'aboutir à une solution exhaustive et complètement rédigée.
- En ce qui concerne le **cours**, la présentation des chapitres vous aidera à réviser plus efficacement en vue d'une colle ou d'une interrogation écrite. Après avoir étudié et travaillé votre cours sur papier avec le livre, la forme interactive du site vous permettra d'évaluer l'état exact de vos connaissances. Plutôt que de relire des pages de cours (ou des fiches, par nature incomplètes) au risque de vous y endormir, vous pourrez bénéficier de la présentation inversée des chapitres : partant de la table des matières et affinant par étapes successives, elle est conçue pour vous inciter à vous demander ce qu'il peut y avoir dans chaque partie qui n'est pas encore développée, quel théorème ou quelle propriété peut bien s'y trouver, quel en est l'énoncé exact, et quels exemples, contre-exemples ou cas particuliers peuvent vous fournir une aide précieuse pour « assurer » ce résultat. Cette démarche, privilégiée par les auteurs du site, est exactement celle dont vous aurez besoin lors d'une interrogation orale ou écrite.

Que ce soit pour les exercices ou pour le cours, il ne faut pas chercher sur ce site des questions ou des exercices pointus issus des oraux des écoles les plus prestigieuses. Le but poursuivi est avant tout pédagogique : permettre à chacun, quel que soit son niveau, d'acquérir les bases et les réflexes indispensables pour effectuer une bonne première année, et de ne plus avoir d'angoisse sur les notions au programme. L'idée essentielle est qu'en allant voir un peu plus loin que le simple énoncé d'un théorème ou d'une formule, en assimilant en même temps le principe de la démonstration, des exemples et des contre-exemples, il est plus facile d'en avoir une connaissance précise.

Enfin, bon nombre de questions sont enrichies de **graphiques interactifs animés** qui vous faciliteront l'assimilation de certaines notions en les visualisant et les manipulant plus facilement.

Table des matières

Préface	iii
Le site <code>les-maths-en-prepas.fr</code> complémentaire du livre	v
Table des matières	vi
Chapitre 0. Pour commencer	1
I Assertions, ensembles et prédicats	3
II Quantificateurs	7
Démonstrations et solutions des exercices du cours	14
Partie I. Techniques de calcul	
Chapitre 1. Droite numérique, fonctions à valeurs réelles	19
I Ensemble des nombres réels	20
II Fonctions réelles	29
III Dérivabilité – Rappels de Terminale	40
IV Fonctions trigonométriques	51
Démonstrations et solutions des exercices du cours	66
Exercices	85
Chapitre 2. Calculs algébriques	95
I Symboles $\sum$ et $\prod$	96
II Coefficients binomiaux, formule du binôme	111
III Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues	115
Démonstrations et solutions des exercices du cours	118
Exercices	129

Chapitre 3. Nombres complexes	135
I L'ensemble des nombres complexes	137
II Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$	150
III Applications géométriques	156
Démonstrations et solutions des exercices du cours	160
Exercices	175
Chapitre 4. Fonctions usuelles	189
I Fonctions logarithmes et exponentielles	190
II Fonctions sinus et cosinus hyperboliques	194
III Fonctions puissances	196
IV Fonctions circulaires réciproques	200
V Fonctions à valeurs complexes	206
Démonstrations et solutions des exercices du cours	210
Exercices	220
Chapitre 5. Primitives et équations différentielles linéaires	231
I Primitives	232
II Équations différentielles linéaires du premier ordre	245
III Équations différentielles linéaires du second ordre à coeffi- cients constants	253
Démonstrations et solutions des exercices du cours	259
Exercices	274
Partie II. Raisonnement et vocabulaire	
Chapitre 6. Raisonnement, opérations sur les ensembles	291
I Implication et équivalence	292
II Opérations sur les ensembles	297
III Pratique de la démonstration	303
Démonstrations et solutions des exercices du cours	310
Chapitre 7. Applications, relations	315
I Applications, fonctions	316
II Relations binaires	328
Démonstrations et solutions des exercices du cours	334
Exercices	341

Chapitre 8. Dénombrément et arithmétique	349
I Le principe de récurrence	350
II Ensembles finis	354
III Dénombrément	358
IV Arithmétique dans $\mathbb{N}$	366
Démonstrations et solutions des exercices du cours	377
Exercices	393
 Partie III. Analyse	
Chapitre 9. Nombres réels, suites numériques	413
I L'ensemble des nombres réels	415
II Généralités sur les suites réelles	421
III Limite d'une suite réelle	424
IV Opérations sur les limites	430
V Suites monotones, suites adjacentes	435
VI Démontrer la convergence d'une suite	437
VII Suites complexes	438
VIII Suites récurrentes	442
IX Relations de comparaison sur les suites	447
Démonstrations et solutions des exercices du cours	457
Exercices	483
 Chapitre 10. Limites et continuité	497
I L'aspect ponctuel : limites, continuité	498
II L'aspect global : fonctions continues sur un intervalle	523
III Extension aux fonctions à valeurs complexes	531
Démonstrations et solutions des exercices du cours	535
Exercices	550
 Chapitre 11. Dérivation	559
I Dérivée	560
II Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	569
III Fonctions continument dérivables	579
IV Extension aux fonctions complexes	586
Démonstrations et solutions des exercices du cours	592
Exercices	607

Chapitre 12. Intégration	621
I Intégration des fonctions en escalier	623
II Intégration des fonctions continues	627
III Extension aux fonctions à valeurs complexes	631
IV Intégration et dérivation	633
V Calcul d'intégrales	637
VI Formules de Taylor	643
VII Approximations numériques	647
Démonstrations et solutions des exercices du cours	652
Exercices	675
 Chapitre 13. Analyse asymptotique	 689
I Fonctions dominées, fonctions négligeables	690
II Fonctions équivalentes	694
III Développements limités : généralités	705
IV Opérations sur les développements limités	716
V Applications des développements limités	731
VI Développements asymptotiques	735
Démonstrations et solutions des exercices du cours	738
Exercices	761
 Chapitre 14. Séries numériques	 773
I Généralités	774
II Séries à termes réels positifs	779
III Séries absolument convergentes	785
IV Représentation décimale d'un réel	787
Démonstrations et solutions des exercices du cours	789
Exercices	801
 Partie IV. Géométrie	
 Chapitre 15. Géométrie élémentaire du plan	 819
I Modes de repérage	823
II Produit scalaire	825
III Transformations du plan euclidien	829
IV Orthogonalité et bases orthonormales	834
V Produit mixte	838
VI Droites	841
VII Cercles	846
Démonstrations et solutions des exercices du cours	850
Exercices	861

Chapitre 16. Géométrie élémentaire de l'espace	875
I Modes de repérage	879
II Produit scalaire	881
III Produit vectoriel et produit mixte	886
IV Droites et plans	894
V Sphères	902
VI Transformations de l'espace euclidien	904
Démonstrations et solutions des exercices du cours	909
Exercices	922
 Partie V. Algèbre	
Chapitre 17. Systèmes linéaires	933
I Introduction	934
II Systèmes linéaires et matrices	943
III Discussion et résolution d'un système	953
Démonstrations et solutions des exercices du cours	963
Exercices	981
 Chapitre 18. Calcul matriciel	989
I Définitions	990
II Combinaisons linéaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	993
III Produit de matrices	995
IV Opérations élémentaires	1004
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1014
Exercices	1025
 Chapitre 19. Polynômes	1033
I Anneau des polynômes à une indéterminée	1034
II Divisibilité et division euclidienne	1041
III Fonctions polynomiales et racines	1043
IV Dérivation	1051
V Étude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	1055
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1059
Exercices	1072

Chapitre 20. Espaces vectoriels	1081
I Espaces vectoriels	1083
II Sous-espaces vectoriels	1087
III Applications linéaires	1093
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1102
Exercices	1117
Chapitre 21. Décompositions en algèbre linéaire	1121
I Familles génératrices, familles libres, bases	1122
II Bases et applications linéaires	1132
III Sommes, sommes directes	1139
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1151
Exercices	1168
Chapitre 22. Dimension finie	1177
I Espaces vectoriels de dimension finie	1178
II Sommes et dimensions	1186
III Applications linéaires et dimension finie	1189
IV Changement de bases et matrices	1194
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1201
Exercices	1222
Chapitre 23. Déterminant	1235
I Déterminant d'une matrice carrée de taille n	1236
II Propriétés du déterminant	1244
III Déterminant d'un endomorphisme	1251
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1254
Exercices	1263
Chapitre 24. Espaces euclidiens	1275
I Produit scalaire	1276
II Orthogonalité	1282
III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	1288
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1293
Exercices	1302

Partie VI. Probabilités

Chapitre 25. Probabilités sur un univers fini	1309
I Univers finis	1310
II Espaces probabilisés	1314
III Probabilités conditionnelles	1319
IV Indépendance	1326
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1332
Exercices	1345
 Chapitre 26. Variables aléatoires sur un univers fini	 1361
I La variable aléatoire	1362
II Couples de variables aléatoires	1373
III Indépendance de variables aléatoires	1378
IV Espérance d'une variable aléatoire	1383
V Variance	1388
Démonstrations et solutions des exercices du cours	1394
Exercices	1415

Chapitre 0 : Pour commencer

I	Assertions, ensembles et prédicats	3
1	Assertions	4
2	Ensembles	4
3	Prédicats	5
4	Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET »	5
II	Quantificateurs	7
1	Quantificateur universel et existentiel	7
2	Négation et quantificateurs	10
3	Succession de quantificateurs	11
4	De la bonne utilisation des symboles	13
	Démonstrations et solutions des exercices du cours . .	14

Pour commencer

0

L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- la *construction* d'objets mathématiques, qui peuvent être des nombres, des figures géométriques, des fonctions, . . . , ainsi que la caractérisation à l'aide de *définitions* de certains d'entre eux ; ces objets servant souvent de modèles pour étudier les phénomènes physiques, chimiques, biologiques, etc ;
- la *recherche de propriétés* que peuvent posséder ces objets, ce qui amène à énoncer des **conjectures** c'est-à-dire des propriétés que l'on pense vraies car on a pu les vérifier sur plusieurs cas particuliers, par observation de dessins ou encore par utilisation de moyens informatiques ;
- la *démonstration* de certaines propriétés énoncées précédemment ; une fois démontrées, ces propriétés prennent le nom de théorèmes, propositions, lemmes, corollaires, etc.

Dans ce livre, pour distinguer les différents résultats que nous allons démontrer, nous leur donnons les noms de :

- **proposition** pour la plupart des résultats,
- **théorème** pour les résultats les plus fondamentaux,
- **corollaire** pour les conséquences immédiates de résultats précédents,
- **lemme** pour certains résultats préliminaires, utiles pour la suite, mais dont l'intérêt intrinsèque est assez limité.

I Assertions, ensembles et prédicats

Vous avez certainement déjà rencontré des affirmations telles que :

- 1 « 7 est un entier pair » ;
- 2 « $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ » ;
- 3 « f est une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » ;
- 4 « toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue » ;
- 5 « toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable » ;
- 6 « on a $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ » ;
- 7 « on a $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ » ;
- 8 « le nombre x est un carré » ;
- 9 « un triangle est rectangle si, et seulement si, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ».

Parmi les affirmations précédentes, vous pouvez justifier, ou vous savez :

- que certaines, comme 2, 4, et 9, sont vraies ;
- que d'autres, comme 1 et 5, sont fausses.

Mais il en existe plusieurs qui dépendent de variables plus ou moins explicitées et qui peuvent être vraies dans certains cas et fausses dans d'autres.

- L'affirmation 3 est vraie lorsque f est la fonction $x \mapsto 2x + 1$, mais elle est fausse lorsque f est la fonction $x \mapsto x^2$.
- L'affirmation 6 est vraie pour quelques (rares) valeurs de a et b , mais elle est fausse dans une grande majorité de cas.
- L'affirmation 7 est vraie lorsque a et b sont des complexes quelconques, mais elle n'est pas toujours vraie si a et b désignent des matrices 2×2 .
- L'affirmation 8 dépend évidemment de x , mais elle dépend aussi de la nature des valeurs que peut prendre cette variable x :
 - * si l'on travaille avec des entiers naturels, elle n'est vraie que pour certaines valeurs de x : lorsque x est « un carré parfait » ;
 - * si l'on travaille avec des nombres réels, elle est vraie lorsque x est un nombre positif ;
 - * si l'on travaille avec des nombres complexes, elle est vraie pour tout x .

Par suite, lorsque les affirmations dépendent de variables, il est indispensable de préciser dans quels *ensembles* on prendra ces variables.

1 Assertions

La notion d'assertion sera considérée comme une notion première, que nous ne définirons pas rigoureusement : il faut bien partir de quelque chose !

- Intuitivement, une **assertion** est une phrase mathématique, sans variable, à laquelle on peut donner un sens.
- Dans le cadre de notre étude, on admet qu'une telle assertion est soit **vraie** soit **fausse**, et qu'elle ne peut être simultanément vraie et fausse : c'est ce que l'on appelle le **principe du tiers exclu**.

Exemples

1. « 2 est un entier impair » est une assertion fausse.
2. « $(1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ » est une assertion vraie.
3. « $1 = 2 +$ » n'est pas une assertion ; d'ailleurs, sur une telle entrée, l'analyseur syntaxique de tout langage informatique, voire celui de votre calculatrice, retournerait alors un message de type « **syntax error** ».

Conventions Si P est une assertion :

- on écrit la plupart du temps « on a P » ou « ...donc P » au lieu de « P est vraie » ou « donc P est vraie » ;
- de même on écrit « supposons P » au lieu de « supposons P vraie ».

2 Ensembles

La théorie des ensembles a vu le jour dans le dernier quart du XIX^e siècle. Il n'est pas question dans cette section d'en faire une étude axiomatique abstraite, mais plutôt d'en donner le vocabulaire et les règles d'utilisation. Les notions d'**ensemble** et d'**élément** sont ici considérées comme des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une « collection d'objets » qui sont les « éléments » de cet ensemble.

Notations

- Lorsque a est un élément et E un ensemble :
 - * l'assertion $a \in E$, qui se lit « a appartient à E » ou « E contient a », est vraie si a est élément de E , et elle est fausse dans le cas contraire ;
 - * lorsque a n'est pas élément de E , on écrit $a \notin E$.
- Les notions d'*ensemble* et d'*élément* sont relatives puisque nous verrons dans la suite qu'un ensemble peut être élément d'un autre ensemble (*cf.* définition 7 de la page 300).
- L'usage veut que, lorsque l'on choisit les notations, on désigne habituellement les éléments par des lettres minuscules et les ensembles par des lettres majuscules : on écrira donc plutôt $a \in E$ pour signifier que « l'élément a appartient à l'ensemble E » mais, comme toujours, il y a des exceptions (comme par exemple pour les éléments de $\mathcal{P}(E)$ que nous verrons page 300).

Description d'un ensemble Lorsque p est un entier naturel non nul et que l'on dispose de p éléments distincts notés $a_1, \dots, a_p$, alors on admet qu'il existe un unique ensemble E contenant ces p éléments et aucun autre, ensemble que l'on note alors $E = \{a_1, \dots, a_p\}$.

Exemples

- $E = \{1, 3, 5, 7\}$ est l'ensemble contenant les quatre premiers entiers impairs.
- On peut parfois être amené à utiliser la notation $\{a_1, \dots, a_p\}$ avec des éléments pas tous distincts : par exemple, si $a_1 = a_2$, alors on a $\{a_1, a_2\} = \{a_1\}$.

3 Prédicats

On appelle **prédicat** toute phrase mathématique faisant intervenir (au moins) une variable et telle que, dès que l'on attribue une valeur à chaque variable y figurant, on obtienne une assertion qui est donc soit vraie soit fausse.

Exemples

1. « $x^2 - 1 = 0$ » est un prédicat qui est vrai si l'on donne au réel x les valeurs ± 1 , et qui est faux dans tous les autres cas.
2. « $x^2 - 1 \geq 0$ » est un prédicat dont la variable x peut appartenir à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{C}$ puisque l'on n'utilise pas d'inégalité sur $\mathbb{C}$.
3. « $x^2 + x + 1 + y^2 = 0$ » est un prédicat à deux variables, chacune d'entre elles pouvant appartenir à $\mathbb{C}$.

4 Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET »

En Mathématiques, il est utile de nier certaines relations ou d'en relier d'autres par « et », « ou » voire « si ... , alors ». Toutefois dans le langage courant ces mots de liaison, ces **connecteurs**, n'ont pas une signification unique :

- Le « *ou* » peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :
 - *ou* exclusif ex : fromage *ou* dessert,
 - *ou* mathématique ex : s'il pleut *ou* s'il fait du vent, je ne sors pas,
 - *ou* conditionnel ex : mange ta soupe *ou* tu seras puni(e).
- De même le « *et* » peut avoir le sens temporel de « puis », lorsque l'on dit « je prends un livre sur l'étagère et je le lis ».

Une telle multiplicité de significations est évidemment impensable lorsque l'on fait des mathématiques, ce qui justifie les définitions suivantes qui ne font que codifier une partie du langage courant le plus usuel.

Définitions

Définition 1

- Si P est une assertion alors $\text{NON } P$, appelée **négation** de P , est une assertion qui est vraie lorsque P est fausse et uniquement dans ce cas.
- si P et Q sont deux assertions alors $P \text{ OU } Q$ est une assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie.
- si P et Q sont deux assertions alors $P \text{ ET } Q$ est une assertion qui est vraie lorsque les deux assertions sont vraies et uniquement dans ce cas.

Remarque Dans le texte de ce chapitre nous noterons ces connecteurs « NON », « OU », « ET », pour les distinguer de ceux du langage courant, mais rapidement ensuite, nous utiliserons les graphismes classiques « non », « ou », « et ».

Exemples

1. Si a est un élément et si E est un ensemble, alors l'assertion « $\text{NON } (a \in E)$ » se note aussi « $a \notin E$ ».
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion « $\text{NON } (x = 0)$ » se note aussi « $x \neq 0$ ».
3. Si x est un nombre réel quelconque, l'assertion « $x^2 - 1 = 0$ » et l'assertion « $(x = 1) \text{ OU } (x = -1)$ » sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'assertion « $(x-1)^2 + y^2 = 0$ » et l'assertion « $(x = 1) \text{ ET } (y = 0)$ » sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
Il n'en est évidemment pas de même si $x \in \mathbb{C}$ ou $y \in \mathbb{C}$, puisque, par exemple, si $x = 0$ et $y = i$ la première assertion est vraie mais pas la seconde.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion « $-1 \leq x \leq +1$ » devrait se noter :

$$(-1 \leq x) \text{ ET } (x \leq +1).$$

Bien que tout humain comprenne la première forme, c'est sous la seconde qu'il faut l'écrire dans n'importe quel langage de programmation.

6. Si P est une assertion alors :
 - $P \text{ ET } (\text{NON } P)$ est fausse, c'est le **principe du tiers exclu**,
 - $P \text{ OU } (\text{NON } P)$ est vraie, puisque toute assertion est vraie ou fausse.

Rappelons qu'en Mathématiques, ce n'est pas parce que l'on a écrit une assertion qu'elle est vraie. Il arrive donc souvent d'avoir à nier une assertion, et vous avez certainement déjà dû faire une démonstration par l'absurde où, pour démontrer une propriété P , vous avez supposé $(\text{NON } P)$ vraie.

Règles de négation

Exemple Si x est un réel, on visualise immédiatement sur l'axe réel que :

- la négation de « $x \geq -1$ » est « $x < -1$ » ;
- la négation « $x \leq 1$ » est « $x > 1$ » ;
- l'assertion « $(x \geq -1) \text{ ET } (x \leq 1)$ » et l'assertion « $(x < -1) \text{ OU } (x > 1)$ » sont, chacune, la négation de l'autre.

Conformément à l'usage courant et aux exemples précédents, on utilise les règles suivantes pour nier une assertion de type P ET Q ou de type P OU Q .

Règles de négation du « ET » et du « OU »

Si P et Q sont deux assertions, alors :

- l'assertion $\text{NON}(P \text{ ET } Q)$ s'écrit aussi $(\text{NON } P) \text{ OU } (\text{NON } Q)$;
- l'assertion $\text{NON}(P \text{ OU } Q)$ s'écrit aussi $(\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } Q)$.

Remarque Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement, et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

p.14

Exercice 1 Soit A , B et C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$.

1. Écrire une assertion portant sur AB , BC et CA , et exprimant que $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral.
2. En déduire une assertion exprimant que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral.
3. Comment exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle ?

II Quantificateurs

1 Quantificateur universel et existentiel

Soit $A(x)$ un prédicat à une variable x défini sur E , c'est-à-dire tel que pour tout élément $x_0 \in E$, l'écriture $A(x_0)$ soit une assertion. On peut alors construire :

- l'assertion : $\forall x \in E \quad A(x)$
 - * qui se lit « pour tout x de E , on a $A(x)$ »,
 - * qui, par définition, est vraie lorsque l'assertion $A(x_0)$ est vraie pour tout élément x_0 de l'ensemble E ;

le symbole « $\forall$ » est appelé **quantificateur universel** ;

- l'assertion : $\exists x \in E \quad A(x)$
 - * qui se lit « il existe un x de E tel que $A(x)$ »,
 - * qui, par définition, est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x_0 de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x_0)$ soit vraie ;

le symbole « $\exists$ » est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geq 0$ » est vraie. En effet pour tout nombre réel x_0 choisi, les règles de calcul sur les nombres réels nous disent que $x_0^2 + 1$ est supérieur (ou égal) à 1, et donc positif.
2. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \geq 0$ » est fausse puisque, si l'on donne à x la valeur $x_0 = 0$, alors on a $x_0^2 - 1 < 0$.
3. L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \geq 0$ » est vraie, puisque le nombre réel $x_0 = 1$ vérifie bien $x_0^2 - 1 \geq 0$.

p.14 **Exercice 2** Que pensez-vous de « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$ » ?

p.14 **Exercice 3** Que pensez-vous de « $\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 + 1 = 0$ » ?

Remarques

- Malgré les apparences, « $\forall x \in E \quad A(x)$ » ne dépend d'aucun x !
La lettre x figurant dans cette assertion a le statut de **variable muette**. En effet cette assertion peut aussi être écrite : « $\forall y \in E \quad A(y)$ », ou encore « $\forall z \in E \quad A(z)$ », sans en modifier le sens.
- Il en est de même de l'assertion « $\exists x \in E \quad A(x)$ » : elle affirme qu'il existe (au moins) un élément x de E tel que $A(x)$ soit vrai, mais n'en définit aucun en particulier.

Exemples Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ », qui pourrait tout aussi bien s'écrire « $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \geq 0$ », traduit « la fonction f est positive » ;
- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ » se traduit par « la fonction f s'annule ».

Dans aucune de ces phrases en français, il n'y a la moindre trace du moindre x !

Point méthode (quand on a une conclusion du type « $\forall x \in E \quad A(x)$ »)

Pour démontrer une assertion de ce type, on commence la plupart du temps par fixer un élément quelconque x de E , avec lequel on doit alors travailler pour démontrer que l'assertion $A(x)$ est vraie. Une telle démonstration doit donc commencer par « Soit x un élément de E » ou encore « Soit $x \in E$ ».

Point méthode (quand on a une conclusion du type « $\exists x \in E \quad A(x)$ »)

Pour démontrer une assertion de ce type, la première méthode à laquelle penser est de construire un élément x de E tel que $A(x)$ soit vraie.

Exemples Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + x + 1$.

- Démonstration de l'assertion $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

et donc $f(x) \geq \frac{3}{4} > 0$. On a ainsi prouvé $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.

- Démonstration de l'assertion $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 2$.

En prenant $x = 1$, on a $f(x) = 3$. Par suite, on a prouvé $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 2$.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type « $\forall x \in E \quad A(x)$ »)

Si l'on sait que « $\forall x \in E \quad A(x)$ » est vraie, alors on peut évidemment utiliser $A(x)$ avec n'importe quel élément $x \in E$ mais, la plupart du temps, il suffit de choisir un « bon élément », un « élément judicieux », dépendant du but que l'on veut atteindre.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type « $\exists x \in E \quad A(x)$ »)

Si l'on sait que « $\exists x \in E \quad A(x)$ » est vraie, alors on peut prendre un élément $x \in E$ tel que $A(x)$ soit vrai, mais il est indispensable d'introduire un tel élément par une phrase du type « Prenons $x \in E$ tel que $A(x)$ » ; il faut alors faire avec cet élément qui nous est donné, offert, et l'on ne peut pas, sans justification supplémentaire, lui attribuer d'autres propriétés.

Exemples Étant donné deux réels a et b , on considère ici la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout x réel, par $f(x) = ax^2 + b$.

- Montrons que si l'on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors on a $a = b = 0$.

Supposons donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + b = 0$.

* En utilisant cette hypothèse avec $x = 0$, on obtient $b = 0$.

* Puis, en utilisant alors l'hypothèse avec $x = 1$, on obtient $a = 0$.

On en déduit $a = b = 0$, ce qui termine la démonstration.

Remarque Parmi l'infinité des valeurs possibles pour x , on n'en a utilisé que deux ; mais cela a suffi pour établir ce que l'on voulait !

- On suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Montrons que si l'on a $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors les réels a et b vérifient $ab < 0$.

Par hypothèse, on peut trouver un réel x tel que $ax^2 + b = 0$. Prenons un tel x .

* Comme $b \neq 0$ on a $x \neq 0$ et donc $x^2 > 0$.

* On a alors $ab = a(-ax^2) = -a^2x^2$.

On en déduit $ab < 0$, ce qui termine la démonstration.

Remarque

Le nombre réel x fourni par l'hypothèse « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ » étant, *a priori*, quelconque, nous avons dû justifier $x \neq 0$ pour pouvoir utiliser la relation $x^2 > 0$.

p.14

Exercice 4 Soit a et b deux entiers naturels. On suppose :

$$(\exists x \in \mathbb{N} \quad a = bx) \quad \text{et} \quad (\exists x \in \mathbb{N} \quad b = ax). \quad (*)$$

Montrer que $a = b$.

Chapitre 0. Pour commencer

Remarque L'hypothèse (*) ci-dessus nous dit qu'il existe un réel x tel que $a = bx$ et qu'il existe un réel x tel que $b = ax$. Rien ne dit qu'il s'agit du même réel. La variable x figurant dans (*) est muette, et (*) aurait pu aussi s'écrire :

$$(\exists x_1 \in \mathbb{N} \quad a = bx_1) \quad \text{et} \quad (\exists x_2 \in \mathbb{N} \quad b = ax_2).$$

On ne peut donc pas commencer la résolution de l'exercice précédent en disant : « Prenons un réel x tel que $a = bx$ et $b = ax$ ».

2 Négation et quantificateurs

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » peut se traduire en français par la phrase : « pour tout réel x , on a $x^2 - 1 = 0$ ». Elle est évidemment fausse.

Sa négation, « on peut trouver un réel x tel que $x^2 - 1 \neq 0$ », qui est donc vraie, s'écrit mathématiquement « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \neq 0$ ».

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour écrire que f est la fonction nulle, c'est-à-dire que toutes les valeurs qu'elle prend sont nulles, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».
- La négation de cette affirmation est « la fonction f prend des valeurs non nulles », ce qui donne l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ ».
- Attention de ne pas confondre cette assertion avec « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ »
 - * qui exprime que f ne s'annule pas,
 - * dont la négation (f s'annule) est « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».

Conformément à l'usage courant et aux exemples précédents, on utilise les règles suivantes pour nier une assertion commençant par un quantificateur.

Règles de négation des quantificateurs

Soit E un ensemble et $A(x)$ un prédicat de la variable x définie sur E .

- La négation de « $\forall x \in E \quad A(x)$ » est « $\exists x \in E \quad \text{NON } A(x)$ ».
- La négation de « $\exists x \in E \quad A(x)$ » est « $\forall x \in E \quad \text{NON } A(x)$ ».

Remarque Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

p.14

Exercice 5 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Comment, à l'aide de $f(x)$, écrire que f est positive?
2. Écrire la négation de cette assertion.
3. Que pensez-vous de « $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) \geq 0 \text{ ou } f(x) \leq 0)$ » ? (i)
4. Que pensez-vous de « $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 0)$ » ? (ii)

3 Succession de quantificateurs

Dans ce qui précède nous n'avons utilisé que des prédicats à une variable, mais en général les choses sont un peu plus compliquées. Traitons un exemple.

Exemple Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un réel donné.

* Pour exprimer « f présente un minimum en a », on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a).$$

* Si f ne présente pas de minimum en a , on le traduit avec la négation de l'assertion précédente, à savoir « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a)$ ».

- Si l'on veut exprimer « f présente un minimum », c'est-à-dire « il existe (au moins) une valeur de a telle que $f(a)$ soit minimum », on écrit donc :

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a).$$

- Pour exprimer « f ne présente aucun minimum », on peut dire en français « il n'existe aucun point où f présente un minimum » ou encore « en a , réel quelconque, f ne peut pas présenter de minimum », ce qui se traduit par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a).$$

En fait, l'exemple précédent est construit à partir de « $f(x) \geq f(a)$ », qui est un prédicat des deux variables x et a puisque f est fixée.

- L'écriture « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a)$ », où l'on a **quantifié** x , (*i.e.* on a fait précéder x d'un quantificateur), nous donne un prédicat de la seule variable a , exprimant que « f présente un minimum en a ».
- L'écriture « $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a)$ » utilise une succession de quantificateurs, ce qui a rendu muettes les deux variables x et a ; effectivement, cela exprime seulement « f présente un minimum », qui ne dépend ni de a , ni de x .

Règle

Si, dans un prédicat à plusieurs variables, on en quantifie une, alors cette variable devient muette, et ce qui reste ne dépend plus de cette variable.

Ce que l'on a vu dans l'exemple précédent se généralise aussi à la négation d'une assertion commençant par une suite de quantificateurs, en appliquant successivement à chaque quantificateur (de gauche à droite) les règles de négation des assertions commençant par un seul quantificateur.

Règles générales de négation des quantificateurs

Pour nier une assertion commençant par une suite de quantificateurs :

- on remplace tout « $\forall x \in E$ » par « $\exists x \in E$ » et l'on nie ce qui suit ;
- on remplace tout « $\exists x \in E$ » par « $\forall x \in E$ » et l'on nie ce qui suit.

Point méthode

Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

Exemple L'assertion « tout entier naturel est le carré d'un entier naturel » s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n = p^2.$$

- Sa négation est donc : $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \neq p^2$.
- Pour démontrer que l'affirmation initiale est fausse, on peut par exemple dire que 2 n'est le carré d'aucun entier, ce qui est facile à justifier.
- Que vient-on de faire dans le point précédent ? S'agit-il d'une démonstration ou d'un contre-exemple ? En fait c'est une question de point de vue et d'intention initiale, plus que de raisonnement.
 - * Si, au départ, on a l'idée de prouver que l'assertion donnée est vraie, alors l'entier exhibé est un contre-exemple prouvant que cette assertion est fausse.
 - * En revanche, si au départ on a l'idée de prouver que l'assertion donnée est fausse, alors l'entier exhibé prouve que sa négation est vraie.

p.15

Exercice 6 Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et le justifier.

- | | |
|---|---|
| (i) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x \leq y$ | (iii) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x < y$ |
| (ii) $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leq y$ | (iv) $\forall y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leq y$ |

p.15

Exercice 7 Reprendre l'exercice précédent mais avec $E = \mathbb{R}$.

p.15

Exercice 8 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire une assertion exprimant que f est majorée par un réel M donné.
2. Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
3. Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Autre exemple d'utilisation d'un prédicat à deux variables

Pour toute valeur du réel m , alors appelé paramètre, considérons l'équation, de la variable réelle x , notée (E_m) : $x^2 - m = 0$.

Cas particuliers. Il est alors évident que :

- (E_1) possède une solution, et donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » est vrai,
- (E_{-1}) n'a pas de solution, et donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$ » est faux.

Plus généralement, pour tout m réel donné on peut essayer de déterminer le nombre de solutions de (E_m) , voire leurs valeurs : cela s'appelle résoudre et discuter l'équation (E_m) .

- Ainsi « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - m = 0$ » est un prédicat, dépendant de la seule variable m , qui signifie que l'équation (E_m) possède au moins une solution.
- Il est ici assez facile de justifier que :
 - * si $m > 0$ l'équation (E_m) possède deux solutions $\pm\sqrt{m}$,
 - * si $m = 0$ l'équation (E_m) possède une seule solution 0,
 - * si $m < 0$ l'équation (E_m) ne possède aucune solution.
- Par suite l'assertion « $\forall m \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - m = 0$ » est vraie.

En revanche cette assertion, seule, donne comme unique information :

« Pour tout $m \geq 0$ l'équation (E_m) possède (au moins) une solution ».

Elle ne donne ni le nombre exact de solutions de l'équation E_m , ni évidemment leur expression.

p.15

Exercice 9 Dans cet exercice, x et y désignent des variables réelles.

- Traduire en français le prédicat « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$ » et dire pour quelles valeurs de sa variable il est vrai.
- Résumer le résultat obtenu sous forme d'une seule assertion quantifiée.

4 De la bonne utilisation des symboles

Comme on vient de voir, l'usage des symboles mathématiques, et en particulier des quantificateurs, obéit à des règles strictes.

- Ce sont des outils d'écriture très utiles lorsqu'on veut énoncer de manière précise et concise une propriété mathématique, et leur utilisation est même quasiment *indispensable pour obtenir automatiquement une négation correcte de la plupart des assertions non évidentes*.
- En revanche, il ne faut pas mélanger dans une même phrase les quantificateurs et le langage français : les symboles mathématiques ne sont pas des sténogrammes et ne doivent pas être utilisés comme abréviations. Des phrases telles que « la fonction $\in$ l'ensemble des fonctions paires » ou « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)$ existe » sont à proscrire et seront évidemment très mal accueillies par un correcteur !
- Toutefois il est toléré d'utiliser à l'intérieur d'une phrase de rédaction des incises telles que « $a \in E$ » voire « $E \subset F$ » et plus généralement toute assertion mathématique complète comme vous pouvez en voir dans ce livre.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Le triangle $\mathcal{T}$ est équilatéral lorsque $AB = BC = CA$, mais une telle écriture, que l'on utilise couramment, n'est pas syntaxiquement correcte car l'égalité est binaire et ne peut donc relier que deux éléments.

Pour avoir une assertion syntaxiquement correcte on peut écrire :

$$(AB = AC) \quad \text{et} \quad (BA = BC).$$

2. Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral, on nie la relation précédente, soit :

$$(AB \neq AC) \quad \text{ou} \quad (BA \neq BC).$$

3. Le triangle $\mathcal{T}$ est isocèle lorsqu'il a deux côtés égaux, ce qui s'écrit encore :

$$(AB = AC) \quad \text{ou} \quad (BA = BC) \quad \text{ou} \quad (CA = CB).$$

Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle, on nie la relation précédente, ce qui donne :

$$(AB \neq AC) \quad \text{et} \quad (BA \neq BC) \quad \text{et} \quad (CA \neq CB).$$

Exercice 2 Comme on sait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$:

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0 \text{ est une assertion fausse.}$$

Exercice 3 Comme l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$, le nombre complexe i par exemple, on en déduit que :

$$\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 + 1 = 0 \text{ est une assertion vraie.}$$

Dire que cette assertion est vraie signifie que l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$ mais ne donne aucune autre information. Si l'on veut utiliser une solution de cette équation, il faudra l'introduire grâce à une phrase

- soit du type : « Soit x_0 une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$ »,
- soit du type : « Prenons x_0 un complexe vérifiant $x_0^2 + 1 = 0$ ».

Exercice 4

- L'assertion $\exists x \in \mathbb{N} \quad a = bx$ est vraie. Prenons donc un $x_1 \in \mathbb{N}$ tel que $a = bx_1$.
- On peut, de même, prendre un $x_2 \in \mathbb{N}$ tel que $b = ax_2$.

On en déduit immédiatement $a = ax_2x_1$.

- Si $a = 0$ alors la relation $b = ax_2$ donne $b = 0$, et donc $a = b$.
- Sinon, on peut alors simplifier $a = ax_2x_1$ par a , ce qui donne $1 = x_2x_1$. Comme x_1 et x_2 sont entiers naturels, on en déduit $x_1 = x_2 = 1$, et donc $a = b$.

Par suite on a $a = b$.

Exercice 5

1. Pour exprimer que f est positive, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ ».
2. La négation de ce qui précède est donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < 0$ ».
3. L'assertion (i) affirme que, pour tout nombre réel x , le nombre réel $f(x)$ est, soit positif, soit négatif, ce qui est vrai.
4. En revanche, l'assertion (ii) dit que l'on a, soit f positive, soit f négative. Sans autre information sur f , on ne peut pas affirmer que c'est vrai : il existe évidemment des fonctions pour lesquelles c'est faux, comme, par exemple, $f : x \mapsto x$ qui prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives.

Exercice 6

- L'assertion (i) est vraie : en effet, pour chaque élément x choisi dans E , l'élément $y = x$ vérifie bien $x \leq y$.
- L'assertion (ii) est vraie : en effet, l'élément $y = 5$ est bien tel que, pour tout élément x de E , on ait $x \leq y$. Elle exprime que E est majoré.
- L'assertion (iii) est fausse : en effet, pour l'élément $x = 5$, on ne peut pas trouver d'élément y de E vérifiant $5 < y$.

On pourrait aussi, en utilisant un raisonnement similaire à celui du point précédent, dire que sa négation « $\exists x \in E \quad \forall y \in E \quad x \geq y$ » est vraie.

- L'assertion (iv) est fausse : en effet, l'élément $y = 1$ de E ne vérifie évidemment pas $\forall x \in E \quad x \leq y$.

On pourrait aussi dire que sa négation « $\exists y \in E \quad \exists x \in E \quad x > y$ » est vraie en justifiant à l'aide de $x = 2$ et $y = 1$.

Exercice 7

- L'assertion (i) reste vraie (même justification que pour l'exercice précédent).
- L'assertion (ii) est fausse car $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.
- L'assertion (iii) est vraie car, si x est un nombre réel quelconque, alors le réel $y = x + 1$ vérifie $x < y$.
- L'assertion (iv) est fausse (même justification que pour l'exercice précédent).

Exercice 8

1. L'affirmation « f est majorée par M » se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M.$$
2. La fonction f est majorée si l'on peut trouver un réel M qui la majore, ce qui s'écrit :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M.$$

3. On en déduit automatiquement la négation :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M,$$
 qui traduit donc que f n'est pas majorée.

Exercice 9

- Dans « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$ », la lettre x est quantifiée, elle est donc muette. Comme y n'est pas quantifiée, il s'agit d'un prédicat $P(y)$ de la variable y .

Pour un y (paramètre) réel donné, $P(y)$ signifie que l'équation $x + y^2 = 0$ (de la variable x) possède (au moins) une solution ; comme c'est une équation du premier degré, il est évident que $P(y)$ est vrai. Ainsi, $P(y)$ est vrai pour tout y réel.

- D'après ce qui précède on sait que l'assertion :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$$

est vraie.

Partie I

Techniques de calcul

Chapitre 1 : Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

I	Ensemble des nombres réels	20
1	La droite numérique	20
2	Relations de comparaison	22
3	Majorants, minorants	26
4	Plus grand, plus petit élément	26
5	Valeur absolue	27
II	Fonctions réelles	29
1	Domaine de définition, graphe	29
2	Domaine d'étude	30
3	Opérations sur les fonctions à valeurs réelles	35
4	Monotonie	36
5	Fonctions majorées, minorées, bornées	38
III	Dérivabilité – Rappels de Terminale	40
1	Dérivée en un point, fonction dérivée	40
2	Interprétations des dérivées	41
3	Opérations sur les fonctions dérivables	42
4	Variations d'une fonction sur un intervalle	44
5	Étude d'une fonction	46
6	Fonction réciproque	48
7	Dérivées successives	51
IV	Fonctions trigonométriques	51
1	Les fonctions sinus et cosinus	51
2	Paramétrage du cercle trigonométrique	54
3	La fonction tangente	57
4	Utilisation du cercle trigonométrique	59
5	Retour sur les formules d'addition	59
6	Équations trigonométriques	62
7	Inéquations trigonométriques	63
8	Le triangle rectangle	64
9	Formulaire muet	65
	Démonstrations et solutions des exercices du cours . .	66
	Exercices	85

Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

1

I Ensemble des nombres réels

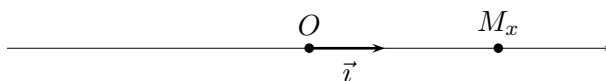
1 La droite numérique

Durant les années antérieures, vous avez travaillé avec les **nombres réels** dont vous avez l'habitude d'utiliser les opérations d'*addition* $+$ et de *multiplication* $\times$, ainsi que celles qui s'en déduisent, la *soustraction* et la *division*, et dont nous supposons ici connues les propriétés élémentaires.

Habituellement l'ensemble des nombre réels, noté $\mathbb{R}$, se représente géométriquement à l'aide d'un axe $\mathcal{D}$, appelé **droite numérique**, muni d'une origine O , et dirigé par un vecteur unitaire $\vec{i}$ non nul. Ainsi :

- pour tout point M de $\mathcal{D}$, il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$;
- pour tout réel x il existe un unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$; dans toute la suite, ce point sera noté M_x .

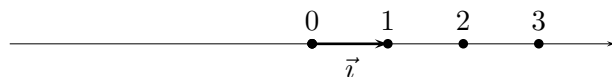
On dit alors que x est l'**abscisse** du point M_x , ou encore que M_x est le **point image** du réel x . Le point O est ainsi associé au réel 0.



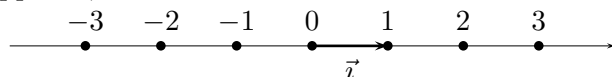
Ne pas hésiter à faire usage de cette représentation, souvent très utile !

Dans l'ensemble des nombres réels, on trouve :

- $\mathbb{N}$: ensemble des **entiers naturels** : 0, 1, 2, ...

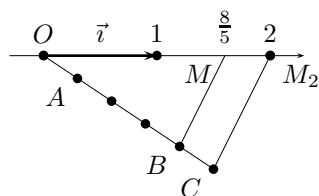


- $\mathbb{Z}$: ensemble des **entiers relatifs**; c'est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés;



- $\mathbb{Q}$: ensemble des **rationnels**, i.e. des quotients $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$;

de tels nombres peuvent être construits simplement sur la droite numérique à l'aide de droites parallèles; par exemple, sur le dessin ci-contre où $OB = 4OA$ et $OC = 5OA$, les droites (BM) et (CM_2) étant parallèles, le théorème de Thalès permet de conclure que l'abscisse de M est $\frac{8}{5}$.



- $\mathbb{ID}$: ensemble des **décimaux**; il est contenu dans $\mathbb{Q}$; c'est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ces nombres, qui s'écrivent avec un nombre fini de décimales, permettent de faire facilement des calculs.

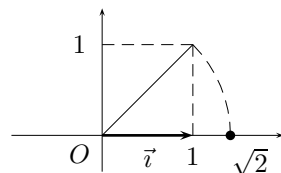
On a $0 \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q}$, chacune des inclusions étant stricte.

- La somme et le produit de deux éléments de $\mathbb{N}$ sont éléments de $\mathbb{N}$.
- Pour chacun des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{ID}$ et $\mathbb{Q}$, la somme, la différence et le produit de deux éléments de cet ensemble lui appartiennent.
- Si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$, alors le quotient a/b est élément de $\mathbb{Q}$.

Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{ID}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.

Si l'on essaie de représenter tous les points d'abscisse rationnelle, on a l'impression d'obtenir ainsi tous les points de la droite mais il en manque.

Au chapitre 6, nous démontrerons que $\sqrt{2}$, le réel positif dont le carré vaut 2, et que l'on peut construire comme indiqué ci-contre, n'est pas un nombre rationnel.



Par suite, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est stricte car l'ensemble des **réels** contient des nombres non rationnels appelés nombres **irrationnels**, tels que $\sqrt{2}$, π ...

p.66

Exercice 1 (Rationnels et irrationnels)

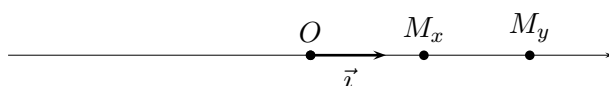
1. Montrer que la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.
2. Montrer que le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est irrationnel.
3. Que pensez-vous de la somme, du produit de deux irrationnels?

2 Relations de comparaison

L'ensemble $\mathbb{R}$, et donc chacun des ensembles précédents, est muni des relations de comparaison $\leq$ et $<$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on dispose de :

- la relation $x \leq y$, qui se lit « x est inférieur (ou égal) à y » ou « x est plus petit que y » ; comme usuellement on dirige le vecteur $\vec{i}$ vers la droite, cette relation se traduit géométriquement par le fait que M_x est à gauche de M_y ; il est confondu avec M_y lorsque $x = y$;
- la relation $x < y$, qui se lit « x est strictement inférieur à y » ou « x est strictement plus petit que y » ; elle se traduit géométriquement par le fait que M_x est strictement à gauche de M_y .

Par suite on a $x < y$ si, et seulement si, $x \leq y$ et $x \neq y$.



L'interprétation graphique ci-dessus de la relation de comparaison $\leq$ en met en évidence certaines propriétés. Si x , y et z sont des réels quelconques alors :

- on a toujours $x \leq x$; (réflexivité)
- si l'on a $x \leq y$ et $y \leq x$, alors on a $x = y$; (antisymétrie)
- si l'on a $x \leq y$ et $y \leq z$, alors on a $x \leq z$; (transitivité)
- on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$. (ordre total)

Ces quatre propriétés signifient que $\leq$ est une **relation d'ordre total**.

Remarquons qu'il n'en est pas de même pour la relation $<$ puisque l'on n'a pas $x < x$.

- La relation $x \leq y$ peut aussi s'écrire $y \geq x$ qui se lit « y est supérieur (ou égal) à x » ou encore « y est plus grand que x ».
- La relation $x < y$ peut aussi s'écrire $y > x$ se lit « y est strictement supérieur à x » ou encore « y est strictement plus grand que x ».

Il y a une terminologie propre à la comparaison avec 0 :

- un réel x est **positif** (respectivement **strictement positif**) si $x \geq 0$ (respectivement $x > 0$) ;
- un réel x est **négatif** (respectivement **strictement négatif**) si $x \leq 0$ (respectivement $x < 0$).

Notations

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{Q}_+$ désignent respectivement les ensembles des réels positifs et des rationnels positifs.
- $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{Q}_-$ et $\mathbb{Z}_-$ désignent respectivement les ensembles des réels négatifs, des rationnels négatifs et des entiers négatifs.

- $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{N}^*$ désignent respectivement les ensembles des réels strictement positifs, des rationnels strictement positifs et des entiers strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{Q}_-^*$ et $\mathbb{Z}_-^*$ désignent respectivement les ensembles des réels strictement négatifs, des rationnels strictement négatifs et des entiers strictement négatifs.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. On note alors :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} &]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} &]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} &]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{aligned}$$

Ces ensembles, ainsi que $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, sont appelés **intervalles** de $\mathbb{R}$.

Remarques

1. L'ensemble vide est un intervalle puisque, par exemple, $\emptyset =]0, 0[$.
2. Si $a \leq b$, l'intervalle $[a, b]$ est appelé **segment** $[a, b]$.
3. Pour $a < b$:
 - l'intervalle $]a, b[$ est appelé **intervalle ouvert** d'extrémités a et b ;
 - les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ sont qualifiés d'**intervalles semi-ouverts** ou **semi-fermés** ;
4. Les intervalles $]a, +\infty[$ et $] -\infty, b[$ sont qualifiés de **demi-droites ouvertes**. Les intervalles $[a, +\infty[$ et $] -\infty, b]$ sont qualifiés de **demi-droites fermées**.
5. Dans chacun des cas précédents, le réel a (resp. b) est appelé **extrémité inférieure** (resp. **extrémité supérieure**) de l'intervalle.

Si I est la demi-droite $[a, +\infty[$ ou la demi-droite $]a, +\infty[$, alors $+\infty$ est l'extrémité supérieure de I .

De même, $-\infty$ est l'extrémité inférieure de $] -\infty, b]$ et de $] -\infty, b[$.

Si $I = \mathbb{R}$, alors ses extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$.

6. Par définition, les **intervalles ouverts** de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de la forme $]a, +\infty[$, $] -\infty, a[$ et $]a, b[$, avec $a < b$, ainsi que $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

Les **intervalles fermés** sont les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ et $] -\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, les segments ainsi que $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

7. L'**intérieur** d'un intervalle I est l'intervalle ouvert qui a les mêmes extrémités que I . Ainsi, pour $a \leq b$, l'intérieur des intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ est l'intervalle $]a, b[$.

Dans la suite de ce livre, on utilisera souvent l'expression : « soit I un intervalle d'intérieur non vide ». Cela signifie que les extrémités de I sont distinctes, et permet de dire que I contient deux points distincts ou encore que I contient une infinité d'éléments.

p.66

Exercice 2 Représenter graphiquement le segment $[a, b]$, l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$, l'intervalle ouvert $]a, b]$ et la demi-droite fermée $[a, +\infty[$.

Intervalles d'entiers

Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \leq b$. On note alors :

$$[a, b] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\},$$

$$[a, +\infty[= \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n\},$$

$$]-\infty, a] = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq a\}.$$

Remarque Pour a et b entiers relatifs, on a :

$$[a, b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}, \quad [a, +\infty[= [a, +\infty[\cap \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad]-\infty, b] =]-\infty, b] \cap \mathbb{Z}.$$

Compatibilité de la relation $\leq$ et des opérations

Dans cette section x, y, z et t désignent quatre réels quelconques.

On se convainc facilement, grâce à la représentation géométrique, de la validité des deux règles de compatibilité suivantes :

- si $x \leq y$, alors on a $x + z \leq y + z$;
- si $x \leq y$ et $z \geq 0$, alors on a $xz \leq yz$.

On en déduit immédiatement les résultats suivants (que vous avez déjà utilisés).

Proposition 1

Soit x, y, z et t quatre réels.

- Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors on a $x + z \leq y + t$.
- Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$, alors on a $0 \leq xz \leq yt$.
- On a $x \leq y$ si, et seulement si, $-y \leq -x$.
- Si $x \leq y$ et $z \leq 0$ alors on a $xz \geq yz$.

Démonstration.

- Supposons $x \leq y$ et $z \leq t$. D'après la première règle de compatibilité, en ajoutant z à la première relation, on obtient $x + z \leq y + z$. En ajoutant y à la seconde, on obtient de même $y + z \leq y + t$. On en déduit le résultat par transitivité de la relation d'ordre.

- Démonstration analogue à la précédente : on prouve $0 \leq xz \leq yz$ et $0 \leq yz \leq yt$ en utilisant la seconde règle de compatibilité puisque $z \geq 0$ et $y \geq 0$.
- On passe de la première relation à la seconde en ajoutant $-x - y$ de chaque côté de l'inégalité $x \leq y$. Démonstration analogue pour la réciproque, en ajoutant $x + y$.
- Comme $z \leq 0$, le point précédent nous donne $-z \geq 0$. De $x \leq y$ on déduit alors $x(-z) \leq y(-z)$, et une nouvelle utilisation du point précédent nous permet de conclure. $\square$

Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc :

- si $(x \leq 0 \text{ et } y \geq 0)$ ou $(x \geq 0 \text{ et } y \leq 0)$ alors $xy \leq 0$;
- si $(x \leq 0 \text{ et } y \leq 0)$ ou $(x \geq 0 \text{ et } y \geq 0)$ alors $xy \geq 0$.

Attention La multiplication d'une inégalité par un nombre strictement négatif en change le sens.

Point méthode

Pour multiplier des inégalités, il est préférable de toujours se ramener à des inégalités entre nombres positifs.

p.66

Exercice 3 En supposant $0 \leq a \leq b$ et $d \leq c \leq 0$, peut-on en déduire une inégalité entre ac et bd , une inégalité entre ad et bc ?

p.66

Exercice 4 En supposant $a < b$ et $c \geq 0$, peut-on en déduire $ac < bc$?

p.66

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

1. Montrer que, si $a_1 = a_n$, alors on a $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.
2. Montrer que, s'il existe $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $a_i < a_{i+1}$, alors on a $a_1 < a_n$.

Point méthode

Par suite, dans une succession d'inégalités :

1. si l'on suppose que l'inégalité résultante est une égalité, alors chacune des inégalités intermédiaires doit être une égalité ;
2. si l'une d'elles est stricte, alors l'inégalité résultante est stricte.

p.66

Exercice 6 Soit a, b, c et d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$.

1. Montrer que si $a + c = b + d$, alors on a $a = b$ et $c = d$.
2. Montrer que si $c < d$, alors on a $a + c < b + d$

3 Majorants, minorants

Définition 1

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\mathbb{R}$.

- Le réel a est un **majorant** de X si $\forall x \in X \quad x \leq a$.
- Le réel a est un **minorant** de X si $\forall x \in X \quad x \geq a$.

On dit que la partie X est **majorée** (respectivement **minorée**) si elle possède (au moins) un majorant (respectivement un minorant).

p.67

Exercice 7 Quels sont les majorants de $[0, 1]$? de $[0, 1[$?

Attention Si X est une partie donnée de $\mathbb{R}$, bien distinguer :

- le premier énoncé « X est majorée par a », traduit par « $\forall x \in X \quad x \leq a$ », qui est un prédicat en a ,
- du second l'énoncé « X est majorée » qui, en ce qui le concerne, se traduit par « $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq a$ » où a est une variable muette.

p.67

Exercice 8

1. Écrire une assertion exprimant qu'une partie X de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.

4 Plus grand, plus petit élément

Définition 2

Soit X une partie (non vide) de $\mathbb{R}$ et a un élément de X .

- a est le **plus grand élément**, ou le **maximum**, de X si $\forall x \in X \quad x \leq a$.
Quand il existe, le plus grand élément de X se note $\max(X)$ ou $\max X$.
- a est le **plus petit élément**, ou le **minimum**, de X si $\forall x \in X \quad a \leq x$.
Quand il existe, le plus petit élément de X se note $\min(X)$ ou $\min X$.

p.67

Exercice 9 L'utilisation de l'article défini « le » dans la définition précédente exige une démonstration d'unicité. La faire en prenant a et b deux plus grands éléments de X , et en utilisant l'antisymétrie de la relation $\leq$.

Remarque Une partie X possède un maximum (resp. minimum) si, et seulement si, elle possède un majorant (resp. minorant) qui est élément de X .

p.67 Exercice 10 Le segment $[0, 1]$ a-t-il un maximum ? un minimum ?

p.67 Exercice 11 Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

1. Écrire une assertion exprimant que X possède un maximum.
2. En déduire une assertion exprimant que X ne possède pas de maximum.

p.67 Exercice 12 L'intervalle $[0, 1[$ possède-t-il un maximum ?

p.67 Exercice 13 Vérifier que si X est une partie de $\mathbb{R}$ possédant un maximum, alors elle est majorée. Exhiber une partie majorée et ne possédant pas de maximum.

p.67 Exercice 14 Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $\{x, y\}$ possède un plus grand et un plus petit élément.

Remarque Les nombres réels $\max\{x, y\}$ et $\min\{x, y\}$ se notent aussi respectivement $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$.

Exemple Le résultat de l'exercice précédent permet alors de prouver, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute partie à n éléments de $\mathbb{R}$ possède un maximum et un minimum.

5 Valeur absolue

Définition 3

On définit la **valeur absolue** d'un réel x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Remarques

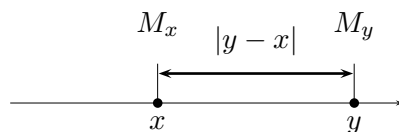
- Cette définition est cohérente car, si $x \geq 0$ et $x \leq 0$, alors $x = -x = 0$.
- Comme $\leq$ est un ordre total, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \geq 0$ ou $x \leq 0$; par suite, on a donc bien défini $|x|$ pour tout réel x .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
- Pour tout x réel, on a $|x| = \max(-x, x)$.
- La règle des signes donne $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| |y|$.

Définition 4

La **distance entre deux réels** est la valeur absolue de leur différence.

Remarque

La définition de la distance entre deux réels est cohérente avec la représentation géométrique des nombres réels vue précédemment. En effet, étant donné deux réels x et y , on a $d(M_x, M_y) = |y - x|$.



Proposition 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - a| \leq h$ si, et seulement si, $a - h \leq x \leq a + h$.

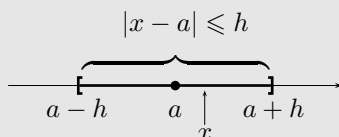
Démonstration.

- Commençons par le cas particulier $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $|x| = \max(-x, x)$, on a $|x| \leq h$ si, et seulement si, on a $(-x \leq h \text{ et } x \leq h)$, c'est-à-dire $(-h \leq x \text{ et } x \leq h)$.
- On en déduit que $|x - a| \leq h$ est équivalente à $-h \leq x - a \leq h$, ou encore $a - h \leq x \leq a + h$.

□

Point méthode

La représentation géométrique de la proposition précédente (indispensable !)



permet de visualiser que $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq h\} = [a - h, a + h]$.

Proposition 3 (Inégalités triangulaires)

Si x et y sont deux réels quelconques, alors on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Principe de démonstration.

- Pour la première, partir de $-|x| \leq x \leq |x|$ et de $-|y| \leq y \leq |y|$.
- Pour la seconde, commencer par écrire $x = (x - y) + y$ et appliquer le point précédent.

Démonstration page 68

Remarques

- Dans le chapitre sur les complexes, on comprendra mieux l'origine du terme « inégalités triangulaires ».
- Ces inégalités peuvent aussi s'écrire $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

p.68

Exercice 15 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on note ici $I_a = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On considère a et b deux réels vérifiant $a < b$ et l'on pose $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

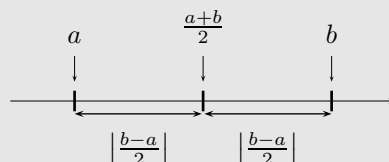
En vous inspirant d'un dessin, que pouvez-vous conjecturer de $I_a \cap I_b$? Le justifier.

p.68

Exercice 16

Soit a et b deux réels.

1. En utilisant le dessin ci-contre, donner des expressions de $\max(a, b)$ et de $\min(a, b)$ à l'aide de $\frac{a+b}{2}$ et de $|\frac{b-a}{2}|$.
2. Les justifier rigoureusement (donc sans utilisation de dessin).



II Fonctions réelles

1 Domaine de définition, graphe

Une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles permet, à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, d'associer un unique nombre réel alors noté $f(x)$.

- L'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ est défini s'appelle **domaine de définition** de f . Si l'on désigne par X ce domaine de définition, on a alors l'habitude de noter :

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f : \begin{matrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{matrix}$$

- Dans de nombreux exercices, on dispose d'une expression $f(x)$ et il faut commencer par déterminer un ensemble sur lequel la relation $y = f(x)$ définit une fonction.
- Si le couple (x, y) vérifie $y = f(x)$ on dit alors que y est **l'image de x par f** et que x est **un antécédent de y par f** .
- Le plan étant supposé rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) ; x \in X\}$ est appelé **représentation graphique** de f ou **graphe** de f . On dit encore que Γ_f est la **courbe d'équation $y = f(x)$** .

Chapitre 1. Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

Exemples

1. La relation $y = \frac{1}{x}$ permet de définir une fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

2. La relation $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ permet de définir $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Une **fonction polynomiale** définie sur X est une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in X \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n. \quad (*)$$

Remarques

- Si $a_n \neq 0$, une telle fonction ne peut s'annuler qu'au plus n fois sur X ; c'est un résultat que vous pourrez utiliser si nécessaire, même si nous ne le démontrerons que dans le chapitre 19 sur les polynômes.
- Par suite, dès que la partie X contient une infinité de points :
 - * si la fonction f ci-dessus est nulle alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $a_k = 0$;
 - * il y a unicité de la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ figurant dans la relation $(*)$.

4. Une **fonction rationnelle** définie sur X est une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe deux fonctions polynomiales f et g telles que :

$$\forall x \in X \quad g(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

C'est donc une fonction pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p \in \mathbb{N}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $b_p \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in X \quad b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p \neq 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p}.$$

p.68

Exercice 17 Si $m \in \mathbb{R}$, déterminer le domaine de définition de $f_m : x \mapsto \frac{x+m}{1+mx}$.

2 Domaine d'étude

Dans le secondaire, vous avez la plupart du temps représenté les graphes à l'aide de logiciels ou en utilisant votre calculatrice. Mais lorsque, pour une raison ou pour une autre, on ne dispose pas d'un tel outil, il est bon de pouvoir donner l'allure d'un graphe le plus rapidement possible. Les propriétés qui suivent permettent de réduire le domaine d'étude et donc le temps de travail.

Symétries – Parité, imparité

Proposition 4

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

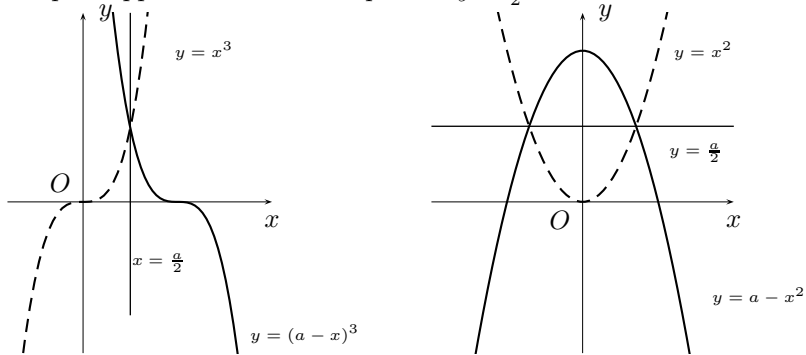
- La fonction $u_a : x \mapsto a - f(x)$ est définie sur X . Son graphe se déduit de celui de f par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$.
- La fonction $v_a : x \mapsto f(a - x)$ est définie sur $X'_a = \{a - x; x \in X\}$. Son domaine de définition et son graphe se déduisent de ceux de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.

Démonstration.

- Un point (x, y) appartient au graphe Γ_{u_a} si, et seulement si, $y = a - f(x)$, ce qui équivaut à $(x, a - y) \in \Gamma_f$. Comme les points (x, y) et $(x, a - y)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$, le graphe Γ_{u_a} se déduit de Γ_f par cette même symétrie.
- Le réel x' appartient au domaine de définition X'_a de v_a si, et seulement si, $a - x' \in X$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x' = a - x$. Ainsi X et X'_a sont des parties de $\mathbb{R}$ symétriques par rapport au point d'abscisse $\frac{a}{2}$ et, par abus de langage, symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$. On démontre comme précédemment que les graphes sont aussi symétriques par rapport à cette droite. $\square$

Exemples Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Le graphe de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (a - x)^3$ se déduit de celui de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
- Le graphe de la fonction : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto a - x^2$ se déduit de celui de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$.



Définition 5

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ où X est symétrique par rapport à O .

- La fonction f est **paire** si $\forall x \in X \quad f(x) = f(-x)$.
Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$.
- La fonction f est **impaire** si $\forall x \in X \quad f(x) = -f(-x)$.
Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Chapitre 1. Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

Exemples

- Le graphe de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$ est symétrique par rapport à (Oy) .
- Le graphe de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^3$ admet O comme centre de symétrie.

Translations – Périodicité

Proposition 5

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

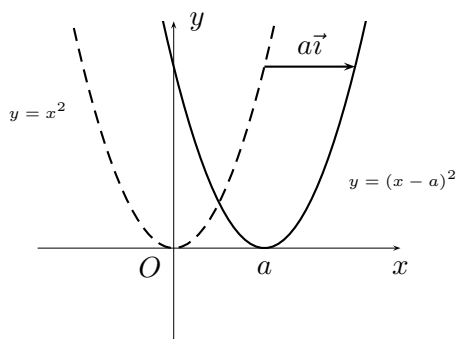
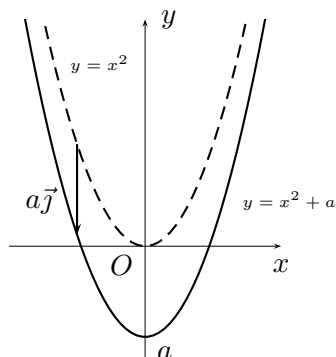
- La fonction $u_a : x \mapsto f(x) + a$ est définie sur X , et son graphe se déduit de celui de f par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- La fonction $v_a : x \mapsto f(x + a)$ est définie sur $X'_a = \{x - a; x \in X\}$. Son domaine de définition et son graphe se déduisent de ceux de f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

Démonstration.

- Un point (x, y) appartient au graphe Γ_{u_a} si, et seulement si, $y = f(x) + a$, ce qui équivaut à $(x, y - a) \in \Gamma_f$. Ainsi Γ_{u_a} se déduit de Γ_f par une translation de vecteur $a\vec{j}$, ce qui prouve le résultat.
- Le réel x' appartient au domaine de définition X'_a de u_a si, et seulement si, $x' + a \in X$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x' = x - a$. Ainsi $X'_a = \{x - a; x \in X\}$.
Un point (x', y) appartient au graphe Γ_{u_a} si, et seulement si, $y = f(x' + a)$, ce qui équivaut à $(x' + a, y) \in \Gamma_f$. Ainsi Γ_{u_a} se déduit de Γ_f par une translation de vecteur $-a\vec{i}$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Exemples Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Le graphe de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2 + a$ se déduit de celui de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$ par translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto (x - a)^2$ se déduit de celui de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$ par translation de vecteur $a\vec{i}$.



p.69

Exercice 18 Soit $a \in \mathbb{R}$. Représenter sur un même dessin les graphes des fonctions :

$$g : x \mapsto \sqrt{x+a} \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Remarque En combinant les deux propositions précédentes, on trouve que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(a-x) = -f(x)$, alors le graphe de f admet le point de coordonnées $(\frac{a}{2}, 0)$ comme centre de symétrie.

Définition 6

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

- Le réel T est une **période** de f (ou encore f est **T -périodique**) si :
 - * d'une part $\forall x \in X \quad x+T \in X \quad \text{et} \quad x-T \in X$,
 - * d'autre part $\forall x \in X \quad f(x+T) = f(x)$.
- f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ qui soit période de f .

Exemples

- Si T est une période de f , alors kT est une période de f , pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques, et 2π est une de leurs périodes.

p.69

Exercice 19 Écrire une assertion exprimant que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique.

Proposition 6

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

- Γ_f est invariant par toute translation de vecteur $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ est un réel donné, le graphe de f est la réunion des images de l'ensemble $\{(x, f(x)) ; x \in X \cap [a, a+T]\}$ par toutes les translations de vecteur $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Analogie aux précédentes. □

Exemple Il est aisé de tracer les graphes des fonctions sin et cos sur tout $\mathbb{R}$ dès qu'on les a tracés sur $[0, 2\pi]$ ou, mieux, sur $[-\pi, \pi]$ qui permet d'utiliser parité et imparité.

Chapitre 1. Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

Autres transformations

Proposition 7

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $u_a : x \mapsto a f(x)$ est définie sur X , et son graphe se déduit de celui de f par la transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x, a y).$$
- Dans le cas particulier $a = -1$, le graphe de u_a est le symétrique de celui de f par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$.

Démonstration. Analogue aux précédentes. □

Exemple

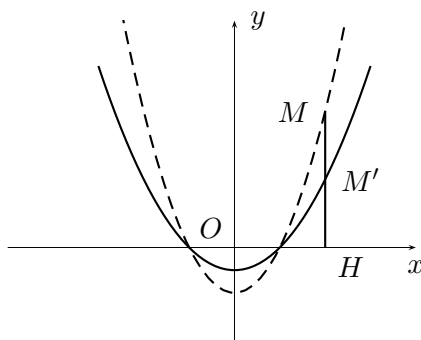
Le graphe de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto a x^2$

se déduit de celui de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

par la transformation $M \mapsto M'$ telle que :

- les points M , M' et H sont alignés sur une droite parallèle à (Oy) ,
- le point H est sur (Ox) ,
- on a $\overrightarrow{HM'} = a \overrightarrow{HM}$.

Le dessin est réalisé avec $a = 0,5$.



Proposition 8

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

- La fonction $v_a : x \mapsto f(ax)$ est définie sur $X'_a = \{\frac{x}{a}; x \in X\}$.

Son domaine de définition et son graphe se déduisent de ceux de la fonction f par la transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, y).$$

- Dans le cas particulier $a = -1$ le graphe de v_a est le symétrique de celui de f par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$.

Exemple

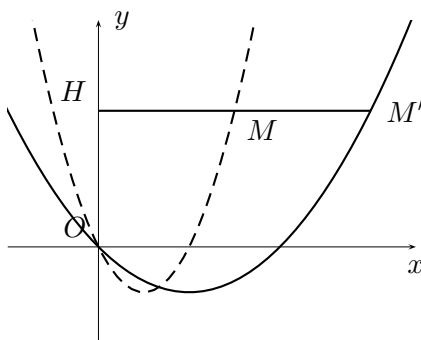
Le graphe de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (ax)^2 - ax$

se déduit de celui de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - x$

par la transformation $M \mapsto M'$ telle que :

- les points M , M' et H sont alignés sur une droite parallèle à (Ox) ,
- le point H est sur (Oy) ,
- on a $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{a} \overrightarrow{HM}$.

Le dessin est réalisé avec $a = 0,5$.



Remarque Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Posons $w_a : x \mapsto a f(\frac{x}{a})$. Alors, en utilisant les deux propositions précédentes, on peut établir que le domaine de définition de w_a et son graphe se déduisent de ceux de la fonction f par l'homothétie de centre O et de rapport a .

3 Opérations sur les fonctions à valeurs réelles

Dans toute cette partie X désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou encore $\mathbb{R}^X$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.
- Pour $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$ ainsi que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit :
 - * la fonction $a f + b g$ par : $\forall x \in X \quad (a f + b g)(x) = a f(x) + b g(x)$;
 - * la fonction $f \times g$, encore notée $f g$, par : $\forall x \in X \quad (f g)(x) = f(x) g(x)$.
- La relation d'ordre utilisée sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ en définissant, pour $(f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^2$, la relation $f \leq g$ par :

$$\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x).$$

- On désigne par $|f|$ la fonction définie sur X par :

$$\forall x \in X \quad |f|(x) = |f(x)|.$$

p.69

Exercice 20 Soit $f \in \mathbb{R}^X$. On pose $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \frac{|f| - f}{2}$.

1. Pour tout $x \in X$, simplifier $f^+(x)$ et $f^-(x)$, d'abord dans le cas où $f(x) \geq 0$, puis dans le cas où $f(x) \leq 0$.
2. Représenter graphiquement f , $|f|$, f^+ et f^- lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 2x.$$
3. Quel composant électrique permet d'obtenir f^+ à partir de f ?

p.69

Exercice 21 Pouvez-vous énoncer (et justifier) des résultats sur la somme et le produit de fonctions paires ou impaires ?

Définition 7 (Composition des fonctions)

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, soit $Y \subset \mathbb{R}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in X \quad f(x) \in Y$.

La fonction $X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **fonction composée** de f et g .

$$x \mapsto g(f(x))$$

Cette fonction, aussi appelée **composée** de f et g , est notée $g \circ f$.

Exemple Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors on a :

$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x + 1$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x + 1)^2 \qquad x \mapsto x^2 + 1.$$

On peut ainsi vérifier que $f \circ g$ n'est pas toujours égale à $g \circ f$.

4 Monotonie

Définition 8

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- **croissante** si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- **strictement croissante** si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
- **(strictement) décroissante** si $-f$ est (strictement) croissante,
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou si elle est (strictement) décroissante.

Remarque Par suite, la fonction f est :

- décroissante si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- strictement décroissante si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

p.70

Exercice 22 Soit f et g deux fonctions croissantes.

1. Montrer que $f + g$ est une fonction croissante.
2. Si f est strictement croissante, montrer que $f + g$ est strictement croissante.
3. Si f et g sont positives, montrer que fg est croissante.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que λf est croissante.

Si on suppose f strictement croissante, peut-on en déduire que λf l'est aussi ?

Remarque

- Pour montrer que f n'est pas croissante, il suffit d'exhiber un élément $x \in X$ et un élément $y \in X$ tels que $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$.
- Pour montrer que f n'est pas monotone, il suffit d'exhiber
 - * un $x \in X$ et un $y \in X$ tels que $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$,
 - * un $x' \in X$ et un $y' \in X$ tels que $x' \leq y'$ et $f(x') < f(y')$.

p.70

Exercice 23

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas monotone.

$$x \mapsto x^3 - x + 1$$
2. Que pensez-vous de la somme de deux fonctions monotones ?

p.70

Exercice 24 Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Proposition 9

Soit f une fonction d'une partie X de $\mathbb{R}$ à valeurs dans une partie Y de $\mathbb{R}$ et g une fonction de Y dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont monotones (resp. strictement monotones), alors $g \circ f$ est monotone (resp. strictement monotone).

Démonstration page 71

p.71

Exercice 25 Soit f une fonction monotone sur X et qui ne s'annule pas sur X .

1. Si f reste positive sur X , montrer que $1/f$ est monotone sur X .
2. Si f reste négative sur X , la fonction $1/f$ est-elle monotone sur X ?
3. Dans le cas général, la fonction $1/f$ est-elle monotone sur X ?

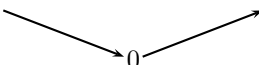
Tableau de variations

Exemple

- La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas monotone.
 $x \longmapsto x^2$
- Mais $f_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}$ sont strictement monotones.
 $x \longmapsto x^2$ $x \longmapsto x^2$

Comme dans l'exemple précédent, pour la plupart des fonctions numériques f que vous étudierez, vous pourrez découper le domaine de définition de f en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone. On a alors l'habitude de résumer ces résultats dans un **tableau de variations**.

Exemple Pour la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cela donne :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

où les flèches indiquent une fonction strictement monotone sur l'intervalle.

Dans le tableau de variations, il est d'usage de mettre (quand elles existent) les limites en les points où la fonction n'est pas définie.

Exemple Dans le cas de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cela donne :

$$x \longmapsto x^2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 9

Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

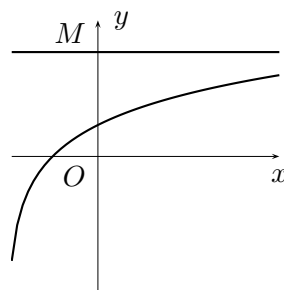
- f est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \leq M$,
- f est **minorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \geq M$,
- f est **bornée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$.

Remarques

- La fonction f est majorée si, et seulement si, l'ensemble $\{f(x); x \in X\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
- La fonction f est minorée si, et seulement si, $-f$ est majorée.
- La fonction f est bornée si, et seulement si, elle est minorée et majorée.

Interprétation graphique :

- La fonction f est majorée si, et seulement si, son graphe se trouve en dessous d'une droite horizontale.
- Plus précisément, la fonction f est majorée par M si, et seulement si, son graphe se trouve en dessous de la droite d'équation $y = M$.



Attention Si f est une fonction de X dans $\mathbb{R}$, bien distinguer :

- « f est majorée par M » se traduisant par « $\forall x \in X \quad f(x) \leq M$ » qui est un prédicat en M ,
- de « f est majorée » qui se traduit par « $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \leq M$ » où M est une variable muette.

p.71

Exercice 26

- Écrire une assertion exprimant que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas majorée.
- Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas majorée.
 $x \longmapsto x$