Formations & Techniques

APPLICATIONS EN ÉLECTRO-MAGNÉTISME

Cours et problèmes résolus



Dominique Jacob

ellipses

Formations & Techniques

APPLICATIONS EN ÉLECTROMAGNÉTISME

Cours et problèmes résolus

Dominique Jacob
Agrégé de génie électrique

ellipses

Collection Formations & Techniques

dirigée par Paul de Laboulaye

paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-064089
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

L'électromagnétisme est un domaine fondamental dans les études scientifiques et la propagation des ondes électromagnétiques apparaît ardue à tous les débutants, surtout à cause du recours immédiat à des outils mathématiques sans laisser à l'étudiant le temps de les maîtriser et d'en comprendre le « sens ».

Pour éviter cet écueil, ici, on a choisi de ne s'appuyer que sur les outils mathématiques connus d'un (bon) bachelier scientifique (les vecteurs dont le produit vectoriel, l'intégration, la dérivation, la trigonométrie, les nombres complexes, l'exponentielle…). La transformation de Laplace qui n'est pas présentée au lycée est un outil de simplification puissant, on la présente donc très simplement et alors les équations aux dérivées partielles deviennent de classiques équations différentielles plus abordables par les étudiants débutants.

Après avoir rappelé les lois de base de l'électromagnétisme sans les démontrer dans le cas général on présente d'abord les champs de vecteurs de façon intuitive (mais non rigoureuse) pour introduire les opérateurs vectoriels et ensuite la solution des équations conduit à la propagation. Pour ne pas perdre les étudiants, on se limite à étudier les ondes électromagnétiques dans une seule dimension, la généralisation à l'espace pourra être abordée par la suite.

Alors on peut présenter complétement (les calculs sont menés de bout en bout avec toutes les étapes) des applications concrètes de l'électromagnétisme telles que :

- l'influence de l'effet de peau sur la résistance des conducteurs
- la propagation sur les lignes
- l'étude d'un capteur à courant de Foucault
- la production des ondes via une antenne
- un moteur oublié, le moteur à répulsion qui est un moteur dont on peut faire varier la vitesse sans dispositif électronique.

« L'escalier de la science est l'échelle de Jacob, il ne s'achève qu'aux pieds de Dieu »
Albert EINSTEIN *(1879-1955)*

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1. Lois fondamentales de l'électromagnétisme

1 Charge, champ et potentiel électrique 7
2 Le champ magnétique 9
2.1 Postulat de Biot et Savart 9
2.2 Le flux du champ magnétique : définition 11
2.3 Le théorème d'Ampère 12
2.4 Champ au centre d'une spire ou d'une bobine plate 13
2.5 Influence de la matière sur le champ magnétique 14
2.6 La loi d'Hopkinson 16
3 Les forces magnétiques, l'énergie magnétique 18
3.1 Effet du champ magnétique sur une charge, la force de Lorentz 18
3.2 Force magnétique sur un circuit, la force de Laplace 18
3.3 Travail des forces de Laplace 19
3.4 Force et couple d'origine magnétique en fonction de l'énergie 21
3.5 Moment magnétique, interaction entre deux champs magnétiques 22
3.6 Interaction entre un moment magnétique et un champ magnétique 22
4 L'induction électromagnétique 24
4.1 Le champ électromoteur 24
4.2 La loi de Faraday 25
4.3 Inductance et inductance mutuelle 26
4.4 Energie magnétique selon l'inductance 28
4.5 Modélisation des pertes dans le circuit magnétique 28

Chapitre 2. Introduction aux ondes électromagnétiques

1 Les outils mathématiques utiles 31
1.1 Caractérisation d'un champ de vecteurs 31
1.2 Le flux d'un vecteur et la divergence 38
2 Établissement des équations de Maxwell 44
2.1 Limite et but de la présentation 44
2.2 Les lois régissant le champ électriques et magnétique 45
2.3 Résumé : les 4 équations de Maxwell 54

3 Une solution des équations de Maxwell dans le vide 55
3.1 But et limites de l'étude 55
3.2 Premières contraintes liées aux équations à résoudre 55
3.3 Expression des équations en coordonnée cartésienne 57
4 Les équations de Maxwell dans un conducteur 72
4.1 Conditions de l'étude 72
4.2 Caractérisation locale d'un conducteur (loi d'Ohm locale) 72
4.3 Répartition des champs, l'effet de peau 74
5 L'effet de peau dans une barre rectangulaire mince 79
5.1 Généralités 79
5.2 Calcul avec les vecteurs complexes 80
5.3 Détermination de la répartition du champ électrique 81
5.4 Répartition de la densité de courant 84
5.5 Résistance apparente d'une barre conductrice mince 88

Chapitre 3. Propagation sur les lignes électriques

1 Propagation sur les lignes électriques sans pertes 93
1.1 Modèle d'une ligne sans pertes 93
1.2 Tension et courant le long de la ligne 95
1.3 Interprétation de la solution 96
1.4 Influence de la source et de la charge, les coefficients de réflexion 97
1.5 Puissance transmise du générateur à la charge 100
1.6 Tension aux extrémités de la ligne 101
2 Étude du régime sinusoïdal 109
2.1 Impédance d'entrée de la ligne chargée 109
2.2 Impédance d'entrée d'une ligne quart d'onde 111
2.3 Adaptation d'impédance par ligne quart d'onde 112
2.4 Onde stationnaire sur la ligne 113
2.5 Evolution de l'amplitude de la tension sur la ligne 114
3 Notes sur les lignes avec pertes et les antennes 116
3.1 Modèle d'une antenne comme une ligne ouverte avec « pertes » 116
3.2 Equations donnant la tension et courant le long de la ligne 117
3.3 Solution en régime sinusoïdal 118
3.4 Solution dans le cas où les pertes sont faibles 119
3.5 Impédance d'entrée d'une antenne 121
3.6 Impédance d'entrée d'une antenne quart d'onde à la résonance 123
3.7 Résonance d'une antenne courte 125

Chapitre 4. Le moteur à répulsion

1 Présentation du moteur à répulsion 127
1.1 Constitution et principe de fonctionnement 127
1.2 Le champ magnétique de l'inducteur 128
1.3 Rôle du collecteur 129
2 Modélisation du moteur à répulsion 130
2.1 Notation et limites de la modélisation simplifiée 130
2.2 Remarque sur la réluctance du trajet des lignes de champs 131
2.3 Le champ magnétique en charge : la réaction d'induit 132
2.4 Le moment magnétique de l'induit 133
2.5 Le couple électromagnétique 134
2.6 Force magnétomotrice totale sur le circuit magnétique 135
2.7 Champ magnétique créé par l'inducteur 137
2.8 FEM induite entre les balais 137
2.9 Le courant au rotor 144
2.10 Modèle obtenu : les équations régissant le fonctionnement 145
3 Fonctionnement en régime permanent sinusoïdal 146
3.1 Expression des équations selon la transformation de Laplace 146
3.2 Expression des signaux en régime sinusoïdal 147
4 Modèle a flux non forcé 152
4.1 Les équations régissant le fonctionnement 152
4.2 Le flux en régime permanent sinusoïdal 154
4.3 Le courant au rotor 155
4.4 Le courant absorbé 156
4.5 Le couple instantané 158
4.6 Le couple moyen 158
4.7 Caractéristiques en fonction de la vitesse 161

Chapitre 5. Étude d'un capteur à courants de Foucault

1 La mesure par courants de Foucault 165
1.1 Principe des capteurs à courants de Foucault 165
1.2 Constitution du capteur à courants de Foucault 166
2 Mesure de l'épaisseur d'une tôle métallique 167
2.1 Modélisation problème 167
2.2 Expression de champs dans la tôle 168
2.3 Champs à l'arrière de la tôle 171
2.4 Calcul des champs 172
2.5 Le champ à l'arrière de la tôle, efficacité du blindage 180

3 Mesure d'épaisseur d'un revêtement métallique 182
3.1 Position et modélisation du problème 182
3.2 Répartition des champs 183
3.3 Les pertes surfaciques en fonction de l'épaisseur du revêtement 186
3.4 Pertes totales dans la tôle revêtue 191

Chapitre 6. Le rayonnement d'une antenne

1 Les potentiels créés par une antenne courte 195
1.1 Constitution et modèle de l'antenne courte 195
1.2 Potentiel électrostatique créé par le dipôle 196
1.3 Potentiel vecteur du champ magnétique créé par le doublet 197
1.4 Effet de la propagation : les potentiels retardés 198
1.5 Potentiel vecteur magnétique retardé 198
1.6 Calcul du potentiel électrique retardé 199
1.7 Expression des champs compte tenu de la propagation 200
2 Rayonnement du dipôle oscillant 201
2.1 Calcul du champ électrique via les potentiels retardés 201
2.2 Calcul du champ magnétique via le potentiel vecteur retardé 205
2.3 Remarques sur l'onde rayonnée loin du dipôle 206
2.4 Diagramme de rayonnement 208
2.5 Puissance rayonnée et résistance de rayonnement 210
2.6 Portée de l'émission 211
3 Rayonnement d'une antenne 212
3.1 Modélisation de l'antenne comme une succession de dipôles 212
3.2 Répartition du courant le long de l'antenne 213
3.3 Champs rayonnés par l'antenne 215
3.4 Diagramme de rayonnement 221
4 Note sur le rayonnement du dipôle magnétique 223
4.1 Notion de dipôle magnétique 223
4.2 Le potentiel scalaire magnétique 225
4.3 Le champ rayonné par le dipôle magnétique 228
4.4 Remarque sur l'impédance d'onde en champ proche 229
4.5 Résistance de rayonnement de la bobine 233
4.6 Puissance apparente du dispositif d'alimentation 235

Annexes

1 Outils mathématiques de base utiles en physique 237
1.1 La multiplication des vecteurs 237
1.2 Dérivée et dérivée partielle d'une fonction scalaire 238
1.3 Le gradient 239
2 Amplitude de la somme de deux sinusoïdes déphasées 241
2.1 Représentation graphique des sinusoïdes 241
2.2 Calcul via les équations des sinusoïdes 242
2.3 Calcul via la représentation complexe des sinusoïdes 243
2.4 Calcul via la représentation vectorielle des sinusoïdes 244
3 Trigonométrie hyperbolique à variable complexe 246
4 Note sur la transformation de Laplace 247
4.1 Intérêt pour simplifier le calcul des dérivées et intégrales 247
4.2 Théorème du retard 247
4.3 Lien de la transformation de Laplace avec le régime sinusoïdal 248
5 Coordonnées cartésiennes 248
6 Coordonnées cylindriques 249
7 Coordonnées sphériques 252
8 Terminologie et propriétés générales des ondes 256
8.1 Signal émis puis reçu via une onde 256
8.2 La propagation des signaux sinusoïdaux, terminologie 256
8.3 Les interférences 257
8.4 Un exemple d'onde stationnaire 259
8.5 L'effet Doppler 264

Chapitre 1
LOIS FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNETISME

On présente, sans démonstrations, les paramètres et lois de l'électricité qui seront utilisées dans la suite de l'ouvrage. Il existe des lois fondamentales qui ne sont pas présentées ici.

Premièrement pour aborder la modélisation une maîtrise des outils mathématiques de base présentés à l'annexe 1 est requise.

1 Charge, champ et potentiel électrique

La matière comporte des particules élémentaires caractérisées par leur charge électrique q.

Soient deux charges électriques ponctuelles, q_1 située au point A_1 et q_2 située au point A_2. Il existe une force d'attraction ou de répulsion (la charge peut être positive ou négative) entre ces deux charges : la force de **Coulomb** (selon Charles-Augustin Coulomb, 1736-1806).

Dans le vide la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est :

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r^2}\vec{u}$ avec $r = A_1.A_2$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{A_1.A_2}}{A_1.A_2}$ (vecteur unitaire de A_1 vers A_2) et la charge q_2 exerce la force opposée sur la charge q_1

Deux charges de même signe se repoussent, deux charges de signes opposés s'attirent.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi.10^9}$ est nommé permittivité diélectrique du vide et s'exprime en farad par mètre (F/m) dans le système international.

Soit une répartition de N charges q_i $(1 \le i \le N)$. Chaque charge q_i est placée au point A_i et une autre charge q est placée au point M.

La force exercée sur la charge q par la charge q_i placée au point A_i est $\vec{F_i} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_i.q}{(A_i.M)^2}\frac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M}$.

La force totale exercée sur la charge q est la somme de toutes les forces exercées par chaque charge :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} \frac{q_i.q}{(A_i.M)^2} \frac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M} = q.\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} \frac{q_i.}{(A_i.M)^2} \frac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M}$$

On définit le vecteur: $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} \frac{q_i.}{(A_i.M)^2} \frac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M}$

$\vec{E}$ est le champ électrique créé au point M par la répartition de charge. La force exercée sur la charge q est $\vec{F} = q.\vec{E}$.

F est en newton (N)

q en coulomb (C)

E en volt par mètre (V/m)

Le champ électrique $\vec{E}$ caractérise l'influence de toutes les charges qui ont un effet sur la charge q.

Soit une charge q placée au point O. Le champ électrique créé au point M tel que la distance $OM = r$ est : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$.

$\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire radial au point M défini sur la figure 1.

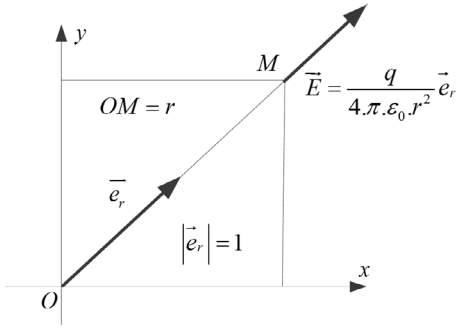


figure 1

Si on pose $V = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0.r}$ on a $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$

On admet que l'on peut généraliser cette relation à l'aide de l'opérateur gradient (pour cela se reporter à l'annexe sur les coordonnées sphériques)

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r = -\overrightarrow{grad(V)} \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0.r}}$$

V est nommé potentiel électrique, il s'exprime en volt.

On dit que le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel V.

La relation $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$ montre que $\vec{E}$ s'exprime en V/m

Le calcul du potentiel qui est scalaire est bien plus aisé que le calcul direct du champ qui est vectoriel.

2 Le champ magnétique

2.1 Postulat de Biot et Savart

L'observation qu'il existe des forces qui s'exercent à distance entre des charges en mouvement (des courants électriques) a conduit, pour modéliser ces forces, à postuler à l'existence d'un champ $\vec{B}$, le **champ magnétique**, créé par les courants. Les forces mesurables seront reliées à ce champ magnétique.

Le postulat est le suivant.

Un élément de circuit de longueur *dl*, placé au point *P*, parcouru par le courant *i*, (on définit ainsi le vecteur $i.\overrightarrow{dP} = i.\overrightarrow{dl}$ orienté par le courant *i*) crée au point *M* le champ magnétique (cf. figure 2) $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{i.dP} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H/m$ est la perméabilité magnétique du vide, c'est une constante. L'unité est le $Henry/m$

Le champ magnétique s'exprime en **Tesla** (*T*), le courant en Ampère, les distances en mètre.

On écrit aussi : $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{i.dl} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$ avec $r = PM$ la distance entre les points, et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ le vecteur unitaire pointant de *P* vers *M*.

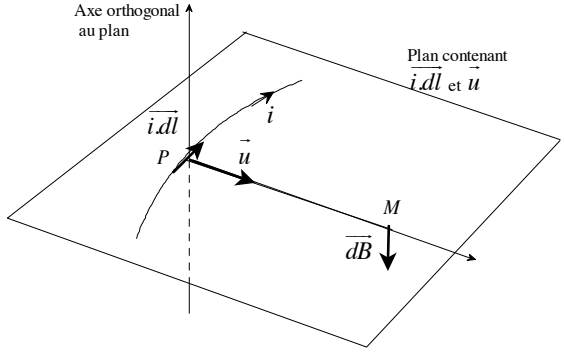


figure 2

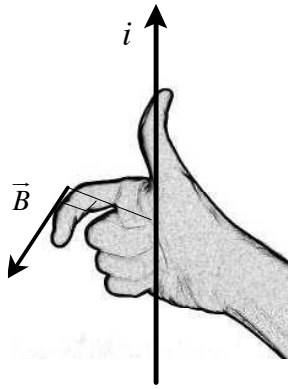


figure 3

La relation de Biot et Savart donne l'intensité et le sens du vecteur $\vec{B} = \int_{circuit} \overrightarrow{dB}$. Le calcul complet du module est en général fastidieux et souvent inutile mais la détermination du sens repose sur cette relation. C'est la **règle de la main droite** (cf. figure 3). **En prenant le fil électrique dans la main droite avec le pouce dans le sens du courant, l'index, placé au point considéré indique le sens du champ magnétique à ce point.**

On nomme **ligne de champ** une courbe pour laquelle le champ magnétique $\vec{B}$ est tangent en tout point. (c'est le lieu des points *M* tels que $\overrightarrow{dM} = k.\vec{B}$). Pour le champ magnétique les lignes de champ sont des courbes fermées (cf. figure 4) qui entourent le conducteur électrique siège du courant. Il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer la règle donnant la direction du champ pour différents points autour du conducteur.

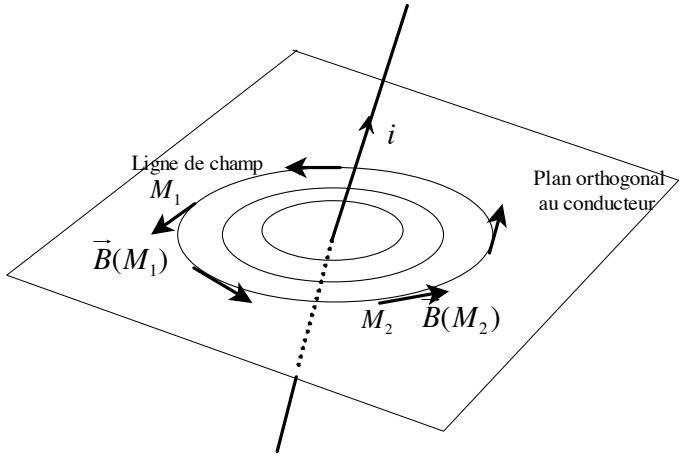


figure 4

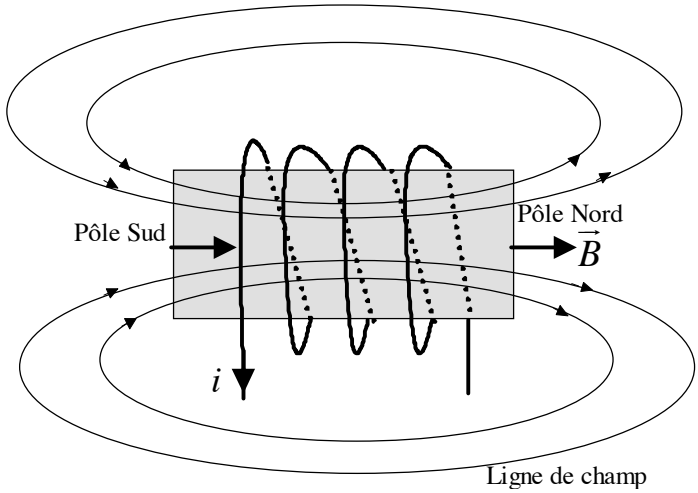


figure 5

Si on réalise (cf. figure 5) un circuit électrique comportant plusieurs spires placées côte à côte (nommé solénoïde ou simplement bobine) les lignes de champ doivent entourer les courants donc les spires et être fermées, elles ont l'allure de la figure 5. La face d'où le champ magnétique « sort » de la bobine est nommée « pôle Nord » et la face où il « rentre » dans la bobine est nommée « pôle Sud ».

2.2 Le flux du champ magnétique : définition

Soit un contour élémentaire fermé et orienté situé dans un plan, cela définit le **vecteur surface** intérieure au contour $\vec{S} = S\vec{n}$.

S est la surface intérieure du contour

$\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface c'est-à-dire orthogonal et placé du côté défini par la convention donnée par la figure 6 liée à l'orientation du parcours. (Cette règle est dite : règle du tire-bouchon de Maxwell)

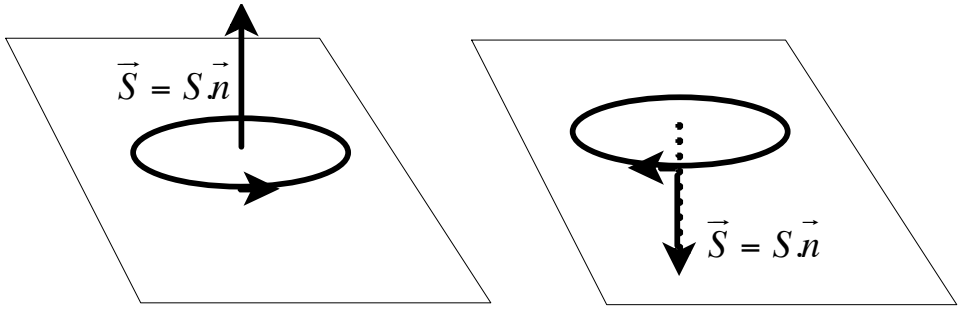


figure 6

Convention liant l'orientation du contour et le sens du vecteur surface

On définit alors **le flux** ϕ du vecteur $\vec{B}$ à travers la surface $\vec{S}$ par : $\phi = \vec{B}.\vec{S}$ (produit scalaire). Le flux du champ magnétique s'exprime en weber, (**Wilhelm WEBER** 1804-1891).

On montre que le flux du champ magnétique sur une surface fermée, comme une sphère par exemple, est nul. Le flux du champ magnétique est dit conservatif.

2.3 Le théorème d'Ampère

Soit un contour fermé orienté entourant un fil électrique parcouru par des courants dont la somme algébrique est *i* (cf. figure 7, l'orientation du contour et le sens de *i* respectent la règle du tire-bouchon de Maxwell). En tout point *M* du contour il existe le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le courant i.

$\vec{B}(M) = \int_{Fil} \overrightarrow{dB} = \int_{Fil} \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{i.dP} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$. On peut alors calculer la circulation $\oint_{Contour} \vec{B}.\overrightarrow{dM}$ de $\vec{B}$ le long du contour fermé et on aboutit à $\oint_{Contour} \vec{B}.\overrightarrow{dM} = \mu_0 i$. Ceci est le **théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétique sur un contour fermé entourant des courants électriques est proportionnelle à la somme des courants enlacés par le contour.**

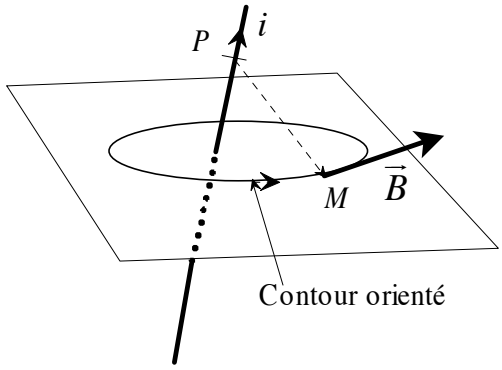


figure 7

Le théorème d'Ampère permet de déterminer le module du champ magnétique à partir du courant, mais ne permet pas de trouver le sens qui est donné par le postulat de Biot et Savart.

Pour déterminer le module du champ magnétique il faut que la géométrie étudiée possède des symétries et choisir un contour tel que :

- en chaque point du contour $\vec{B}$ est tangent ou orthogonal au contour

- le module du champ doit avoir la même valeur en tout point du contour où il est tangentiel.

Les symétries des problèmes étudiés doivent permettre de trouver de tels contours sinon la méthode est sans utilité.

2.4 Champ au centre d'une spire ou d'une bobine plate

Soit une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par le courant i. On définit sur cette spire l'élément de courant $\overrightarrow{i.dl} = i.R.d\theta\vec{e}_\theta$ comme indiqué sur la figure 8.

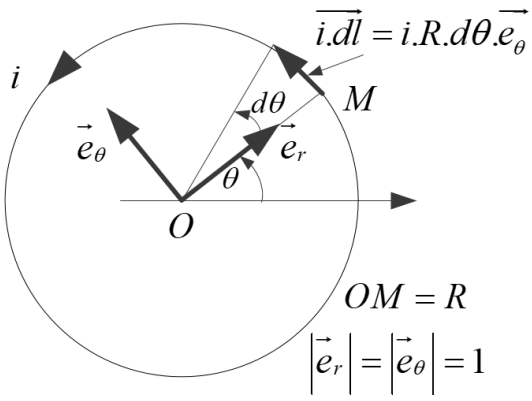


figure 8

Le champ magnétique au centre de la spire est alors

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} i.R.d\theta\vec{e}_\theta \wedge \frac{-\overrightarrow{e_r}}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi.R}\vec{e}_\theta \wedge (-\overrightarrow{e_r}) = \frac{\mu_0 i.d\theta}{4\pi.R}\vec{e}_z$$

$\vec{e}_z = \vec{e}_\theta \wedge (-\overrightarrow{e_r}) = \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{e_\theta}$ est un vecteur unitaire orthogonal au plan de la spire.

Le module du champ créé par un élément de courant est ainsi : $dB = \left|\overrightarrow{dB}\right| = \frac{\mu_0 i}{4\pi.R} d\theta$ d'où le module total du champ créé par toute la spire :

$$B = \int_0^{2\pi} dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi.R} d\theta = \frac{\mu_0 i}{2.R}$$

Si on réalise une bobine plate en plaçant *N* spires identiques les unes à côté des autres, il vient : $B = \mu_0 \frac{N i}{2.R}$

On définit **l'excitation magnétique** $H = \frac{N.i}{2.R}$ telle que $B = \mu_0.H$

L'excitation magnétique présente l'intérêt d'être indépendante du milieu et de ne caractériser que la géométrie de la bobine. Le milieu (ici le vide) est caractérisé par la perméabilité magnétique (ici μ_0).

2.5 Influence de la matière sur le champ magnétique

On a vu (cf. §2.4) que le champ magnétique créé, dans le vide, au centre d'une bobine plate de *N* spires circulaires de rayon *R* et d'axe $\vec{x}$ parcourue par le courant *i* est $\vec{B} = \mu_0 \frac{N.i}{2.R} \vec{e_z}$.

On définit le vecteur **excitation magnétique** $\vec{H} = \frac{N.i}{2.R} \vec{e_z}$ qui s'exprime en A/m ,

L'excitation magnétique est caractéristique de la géométrie bobine et indépendante du milieu (ici le vide).

Le milieu est caractérisé par la **perméabilité** (μ_0 pour le vide).

Dans le vide on a : $\vec{B} = \mu_0.\vec{H}$.

Il existe des matériaux, qui se magnétisent très facilement, c'est-à-dire qui conduisent à une **valeur élevée de *B* avec une valeur faible de *H*,** ce sont les **matériaux ferro-magnétiques et ferri-magnétiques.**

Si on réalise la bobine en bobinant les spires sur un tel matériau, on peut écrire en simplifiant (hypothèse de linéarité) : $\vec{B} = \mu_0.\mu_r.\vec{H}$

μ_r est la **perméabilité relative** du matériau.

$\mu = \mu_0.\mu_r$ est la **perméabilité magnétique absolue** du matériau.

Le théorème d'Ampère $\oint_{Contour} \vec{B}.\overrightarrow{dM} = \mu_0.I_{\text{int}}$ peut s' écrire $\oint_{Contour} \vec{H}.\overrightarrow{dM} = I_{\text{int}}$ en introduisant l'excitation magnétique $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$. Dans un matériau de perméabilité μ_r on a aussi $\oint_{Contour} \vec{H}.\overrightarrow{dM} = I_{\text{int}}$ avec $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0.\mu_r}$

Pour les matériaux ferromagnétiques, la perméabilité relative est très grande, $\mu_r >> 1$. Ainsi une même excitation magnétique *H* crée un champ *B*, μ_r fois plus élevé dans le matériau que dans le vide (ou dans l'air). **On peut alors négliger le champ magnétique présent dans l'air.** On sait que les lignes de champ sont des

courbes fermées qui entourent les conducteurs parcourus par un courant électrique. Si on place autour des conducteurs un circuit fermé en matériau magnétique, les lignes de champ sont concentrées dans le matériau, le champ est négligeable dans l'air. Dans la mesure du possible on réalise des circuits magnétiques fermés pour éviter l'existence du champ dans l'air. Pour un circuit électrique les charges se déplacent dans le circuit électrique fermé et ne « sortent » pas dans l'air. De manière analogue le champ magnétique, ne « sort » pas du circuit magnétique.

La présence au voisinage des circuits électriques d'un matériau magnétique détermine la géométrie des lignes de champ.

On compare la répartition du champ magnétique pour la même bobine mais en présence ou non de matériau magnétique à proximité.

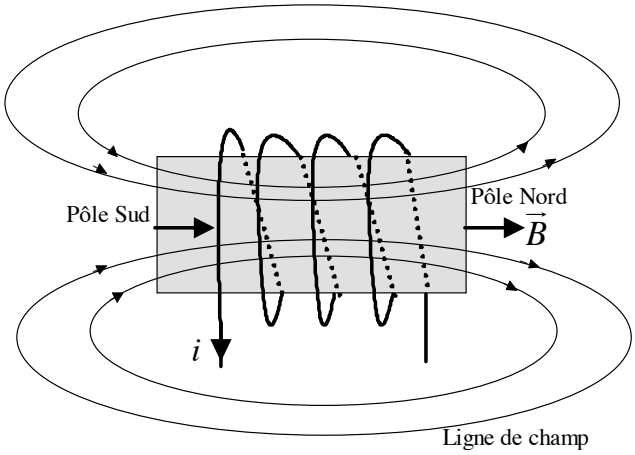


figure 9

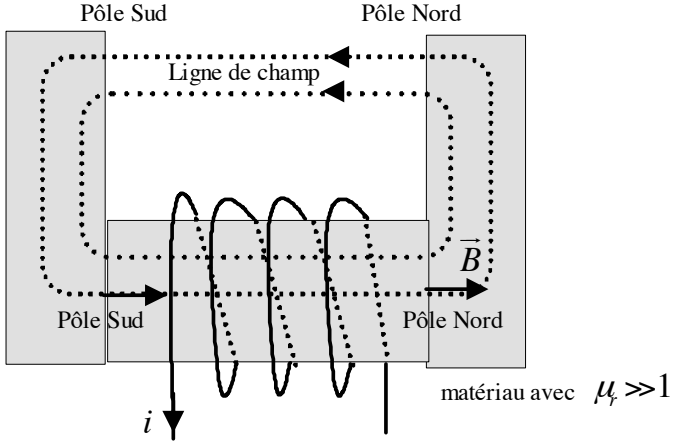


figure 10

Dans le cas de la figure 9, les lignes de champ se répartissent de manière symétrique autour de la bobine pour réaliser des courbes fermées qui entourent le courant électrique. Si on place (cf. figure 10) aux extrémités de cette même bobine deux pièces magnétiques, les lignes de champ adoptent la configuration de la figure 10 pour minimiser le passage dans l'air tout en entourant le courant électrique. On peut négliger le champ dans l'air sauf entre les pôles.

Enfin si on ajoute une troisième pièce magnétique (cf. figure 11) les lignes de champ sont modifiées et on peut négliger le champ magnétique partout dans l'air sauf dans l'entrefer. Si l'entrefer est inexistant, le champ magnétique est négligeable partout à l'extérieur du circuit magnétique. Le circuit magnétique concentre le champ magnétique.

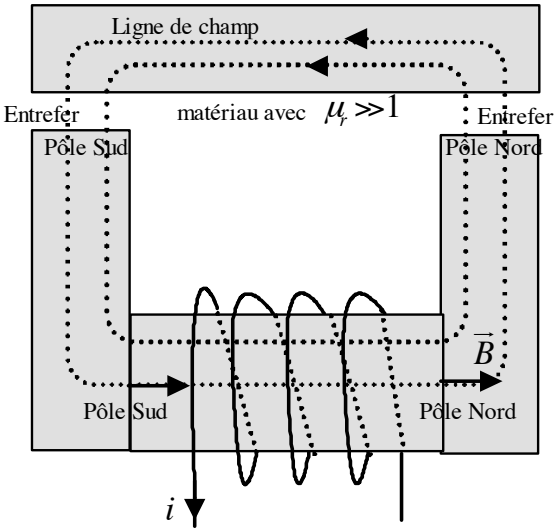


figure 11

Pour obtenir un couple important sur un moteur électrique il faut un fort champ magnétique. Le champ magnétique est obtenu par la passage d'un courant *i* dans un circuit électrique (une bobine). Ce courant nécessite une source d'énergie qui fournit les pertes Joule liées au passage du courant dans la bobine. Pour obtenir un fort champ magnétique avec le minimum de pertes par effet Joule, les bobines sont toujours réalisées sur un circuit en matériau magnétique avec une forte perméabilité.

2.6 La loi d'Hopkinson

Soit un anneau (ou tore) en matériau ferromagnétique, tel que $\mu_r >> 1$, sur lequel on a bobiné *N* spires parcourue par le courant *i* selon la figure 12.

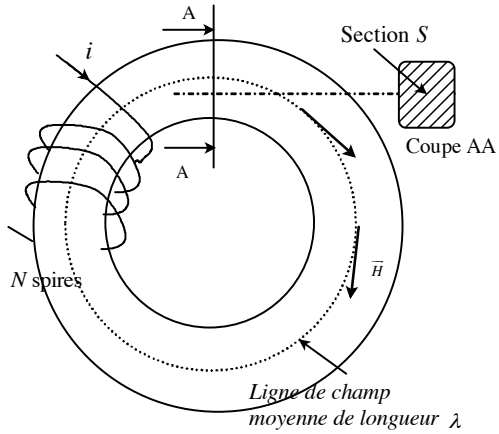


figure 12

Compte tenu des propriétés précédentes et des symétries, les lignes de champ sont des cercles comme le circuit magnétique, le champ à l'extérieur du tore est nul, les lignes de champs sont des cercles et le champ $\overrightarrow{H}$ a la même norme H en tout point, seule sa direction change. En appliquant le théorème d'Ampère sur la ligne de champ moyenne de longueur λ il vient :

$$\oint_{\substack{\text{Ligne}\\ \text{de champ}\\ \text{moyenne}}} \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dM} = I_{\text{int}} = N.i = H.\lambda \text{ soit } H = \frac{N.i}{\lambda} \quad (1)$$

Le champ magnétique est $\overrightarrow{B} = \mu_0.\mu_r.\overrightarrow{H}$ soit $B = \mu_0.\mu_r.H$ (2)

Le flux φ dans une spires est $\varphi = B.S$ (3) car $\overrightarrow{B}$ est $\overrightarrow{S}$ sont colinéaires.

De ces 3 équations on obtient : $N.i = H.\lambda = \frac{B}{\mu_0.\mu_r}\lambda = \frac{\lambda}{\mu_0.\mu_r.S}.\varphi$

On pose $\Re = \frac{\lambda}{\mu_0.\mu_r.S}$ nommé **réluctance du circuit magnétique**, La réluctance ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau magnétique.

$F = N.i$ est la **force magnétomotrice** (F.M.M) appliquée au circuit magnétique.

➔ $F = N.i = \Re.\varphi$ est la loi d'Hopkinson (**John HOPKINSON** 1849-1898) qui est une autre expression du théorème d'Ampère.

La réluctance $\Re = \frac{\lambda}{\mu_0.\mu_r.S}$ (λ : longueur du circuit, S section droite du circuit magnétique) est analogue à la résistance électrique $R = \rho\frac{l}{s}$ (l : longueur du circuit, s section droite du circuit électrique). La quantité $\frac{1}{\Re} = \frac{\mu_0.\mu_r.S}{\lambda}$ est nommée **perméance** et $\frac{1}{\mu_0.\mu_r}$ est la **réluctivité** du matériau.

Le flux est conservatif et on considère le circuit magnétique comme formé de tubes de champs, alors le flux obéit à la loi des nœuds comme le courant électrique, (pour le courant électrique, les fils sont des tubes de courant). Ainsi on peut établir un circuit électrique équivalent au circuit magnétique (cf. figure 13).

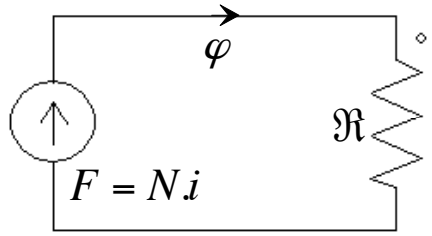


figure 13

3 Les forces magnétiques, l'énergie magnétique

3.1 Effet du champ magnétique sur une charge en mouvement, la force de Lorentz

Si une charge électrique q animée de la vitesse $\vec{v}$ est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ elle est soumise à une force $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ (la force de **Lorentz**).

Comme pour le postulat de Coulomb, c'est la mesure des forces qui est possible et qui étaye le postulat.

3.2 Force magnétique sur un circuit, la force de Laplace

Soit un élément de circuit (cf. figure 14), de longueur *dl,* d'un fil de section *S* parcouru par un courant *i* (La densité de courant est uniforme) placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Il y a *n* charges, *q*, mobiles animées de la vitesse *v,* par unité de

volume. Donc dans le volume $S.dl$ de l'élément de circuit, la charge mobile totale est $dq = q.n.S.dl$

Chaque charge mobile *q* est soumise à la force $\overrightarrow{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ ainsi l'élément de circuit est soumis à la force totale, $\overrightarrow{dF} = dq.\vec{v} \wedge \vec{B} = n.S.dl.q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit en introduisant la densité de courant $\vec{j} = n.q.\vec{v}$ il vient $\overrightarrow{dF} = dq.\vec{v} \wedge \vec{B} = S.dl.\vec{j} \wedge \vec{B}$ or $i = j.S$ on définit donc l'élément de courant $\overrightarrow{i.dl} = S.dl.\vec{j}$ alors la force appliqué à l'élément de circuit est $\boxed{\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{i.dl} \wedge \vec{B}}$ C'est la force de Laplace (**Pierre-Simon De Laplace** 1749-1827) elle découle de la force de Lorentz.

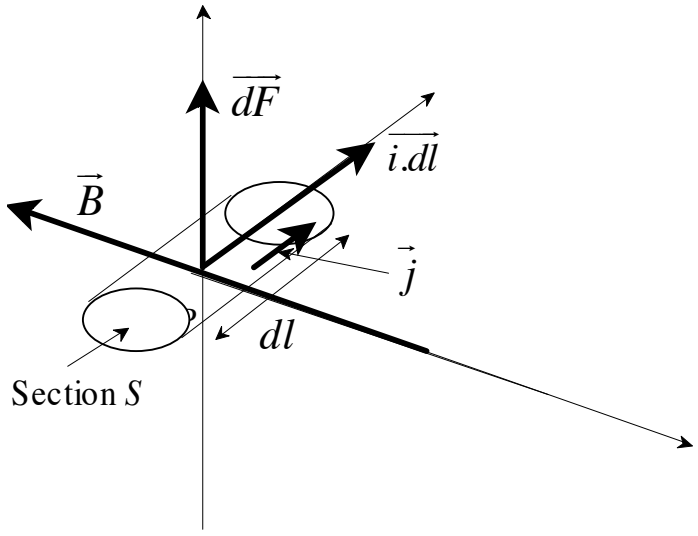


figure 14

3.3 Travail des forces de Laplace

Un circuit électrique peut générer spontanément des forces et donc des déplacements, c'est donc qu'une énergie interne est associée au champ magnétique, on la nomme énergie magnétique.

Soit un élément de circuit $\overrightarrow{i.dl}$ placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext}$ (cf. figure 15). **Le champ $\vec{B}_{ext}$ est donc indépendant du courant i .**

Le champ $\vec{B}_{ext}$ est créé par d'autres causes que l'élément de circuit $\overrightarrow{i.dl}$. Cet élément est alors soumis à la force $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{i.dl} \wedge \vec{B}_{ext}$. Si cette force conduit au déplacement $\overrightarrow{dx}$ de l'élément de circuit, le travail fourni est

$d^2W_{meca} = \overrightarrow{dF}.\overrightarrow{dx} = \overrightarrow{i.dl} \wedge \overrightarrow{B_{ext}}.\overrightarrow{dx}$,

Le produit mixte peut aussi s'écrire, $d^2W = i.[\overrightarrow{dx} \wedge \overrightarrow{dl}].\vec{B} = i.\overrightarrow{dS}.\vec{B}$ on définit $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{dx} \wedge \overrightarrow{dl}$ qui est la surface balayée par l'élément de circuit lors du déplacement. Le flux associé à cette surface est $d\phi_{ext} = \overrightarrow{B_{ext}}.\overrightarrow{dS}$ et le travail mécanique fourni par les forces de Laplace s'écrit $dW = i.\vec{B}.\overrightarrow{dS}$ ou $dW_{meca} = i.d\phi_{ext}$

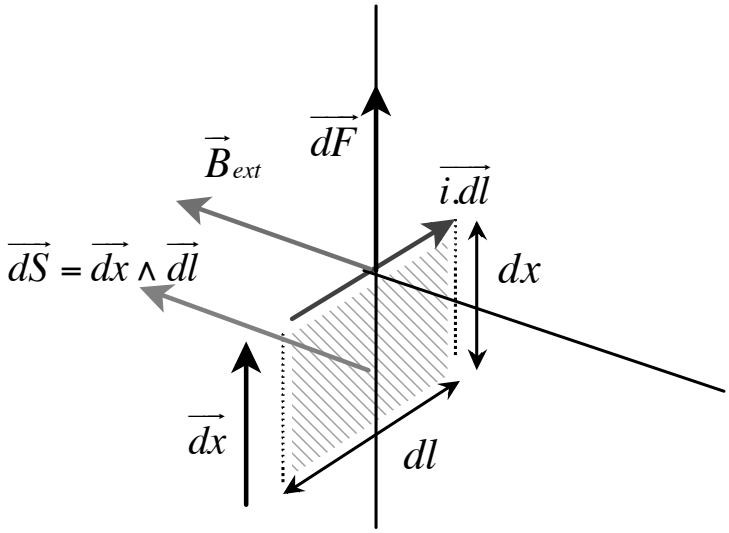


figure 15

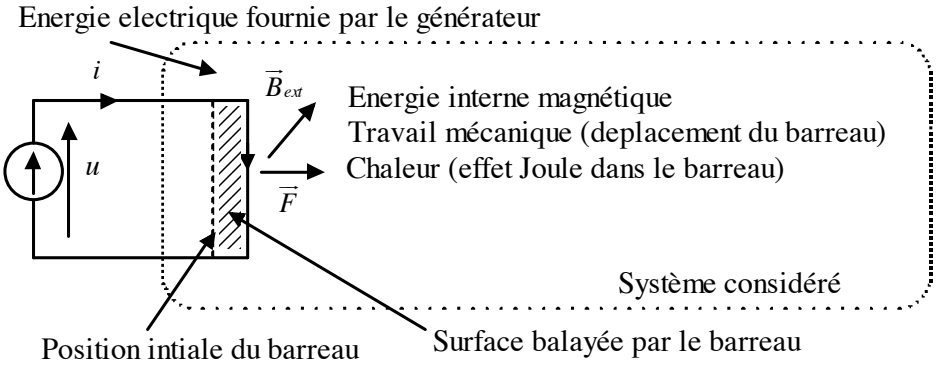


figure 16

Le barreau conducteur, possède la résistance *r* et est traversé par le courant i fourni par un générateur électrique qui donne de l'énergie. Le barreau placé dans le champ magnétique n'est donc pas un système isolé mais il reçoit de l'énergie électrique du générateur, cf. figure 16.

Pendant la durée dt le générateur fournit l'énergie $dW_{elec} = u.i.dt$

Le déplacement du barreau développe l'énergie $dW_{meca} = i.d\phi_{ext}$

L'effet joule dans le barreau libère la chaleur $dQ = r.i^2.dt$

L'énergie interne magnétique varie de dW_μ

La conservation de l'énergie impose : $dW_{elec} = dW_\mu + dW_{meca} + r.i^2 dt$

Le barreau ayant la résistance *r* on a : $u = r.i$ ➔ $dW_{elec} = u.i.dt = r.i^2 dt$. Le générateur fournit seulement l'énergie dissipée par effet Joule.

Ainsi $dW_{elec} = dW_\mu + dW_{meca} + r.i^2 dt = r.i^2 dt$ ➔ $dW_\mu + dW_{meca} = 0$

Alors le travail mécaniques, dW_{meca} , des forces électromagnétiques est dû à une diminution de l'énergie magnétique interne dW_μ $\boxed{dW_\mu = -dW_{meca} = -i.d\phi_{ext}}$

Ainsi **si le courant est constant (donc indépendant du flux ϕ_{ext}),** l'énergie magnétique est $\boxed{W_\mu = -\int i.d\phi_{ext} = -i.\phi_{ext}}$.

Les forces magnétiques font évoluer le système vers un équilibre tel que l'énergie potentielle $W_\mu = -i.\phi_{ext}$ est minimale. Le flux tend à être. C'est **la loi du flux maximum. A l'équilibre le flux est maximum si le courant est constant.**

Une spire quelconque parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique va être soumise à des forces de Laplace qui tendent à augmenter le flux, c'est-à-dire à augmenter la surface de la spire, donc à la rendre circulaire.

3.4 Force et couple d'origine magnétique en fonction de l'énergie

Soit un système déformable possédant l'énergie magnétique W_μ . Si une force $\vec{F}$ d'origine magnétique conduit à un déplacement $\overrightarrow{dM}$ de son point d'application, le travail fourni est tel que $dW_\mu = -dW_{meca} = -\vec{F}.\overrightarrow{dM}$. On a aussi, d'après la définition du gradient, $dW_\mu = \overrightarrow{grad(W_\mu)}.\overrightarrow{dM}$ ➔ $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad(W_\mu)}}$

On a vu que le gradient est un vecteur qui « pointe » vers le maximum de le fonction. Donc il est compréhensible que la force qui est opposée au gradient « pointe » vers le minimum de la fonction, c'est-à-dire la zone de l'espace où l'énergie est minimale pour atteindre l'équilibre.

Si $\overrightarrow{dM} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$ et $\vec{F} = F_x.\vec{e}_x + F_y.\vec{e}_y + F_z.\vec{e}_z$ alors

$$F_x = -\frac{\partial W_\mu}{\partial x} \; ; \; F_y = -\frac{\partial W_\mu}{\partial y} \; ; \; F_z = -\frac{\partial W_\mu}{\partial z}$$

On retrouve qu'à l'équilibre, $\vec{F} = -\overrightarrow{grad(W_\mu)} = 0$, correspond à l'énergie magnétique W_μ minimale.

De même si la déformation correspond à une rotation, c'est-à-dire à la variation $d\theta$ d'un degré de liberté angulaire θ. Les forces exercent un couple, C, et le travail mécanique fourni par cette rotation est $dW_\mu = -dW_{meca} = -C.d\theta$ soit $C = -\dfrac{dW_\mu}{d\theta}$ ou $C = -\dfrac{\partial W_\mu}{\partial \theta}$ si l'énergie dépend d'autres variables.

Ce couple tend à rendre l'énergie minimale donc le flux maximal, c'est-à-dire à orienter les spires orthogonalement au champ magnétique (le vecteur surface des spires, $\vec{S}$ doit être parallèle au champ magnétique).

3.5 Moment magnétique d'un circuit, interaction entre deux champs magnétiques

Soit une bobine plate (toutes les spires sont considérées confondues), formée de N spires de surface S dont le vecteur normal est $\vec{n}$ (ainsi le vecteur surface d'une spire est $\vec{S} = S\vec{n}$) parcourue par le courant i. Cette bobine crée dans son axe un flux magnétique ($\vec{B}.\vec{S}$) :

- proportionnel à N
- proportionnel à i
- proportionnel à S

On définit le vecteur $\boxed{\overrightarrow{M} = N.i.\vec{S}}$ nommé **moment magnétique** de la bobine, il s'exprime en $A.m^2$.

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ créé dans l'axe de la bobine augmente si $\overrightarrow{M} = N.i.\vec{S}$ augmente.

3.6 Interaction entre un moment magnétique et un champ magnétique

Soit une bobine plate formée de N spires de surface $\vec{S}$ parcourue par le courant i donc ayant le moment magnétique $\overrightarrow{M} = N.i.\vec{S}$. On place cette bobine dans un champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ ayant une autre origine que la bobine plate elle-même. L'énergie magnétique pour une spire est $-i.\phi_{ext}$ avec $\phi_{ext} = \vec{B}_{ext}.\vec{S}$ est le flux dans une spire. Pour l'ensemble des N spires l'énergie est alors $W_\mu = -N.i.\phi_{ext}$ avec $\phi_{ext} = \vec{B}_{ext}.\vec{S}$ ➔ $W_\mu = -N.i.\vec{B}_{ext}.\vec{S} = -N.i.\vec{S}.\vec{B}_{ext} = -\overrightarrow{M}.\vec{B}_{ext}$

L'énergie d'interaction entre $\overrightarrow{M}$ et $\vec{B}$ est $\boxed{W_\mu = -\overrightarrow{M}.\vec{B}_{ext}}$

Les forces magnétiques qui en résulte nt s'expriment $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad(W_\mu)}}$ à l'équilibre (en l'absence d'autres forces) pour que l'énergie soit minimale **les forces attirent la bobine dans la zone où le champ magnétique est maximal.**

De même si l'angle $\theta = (\vec{M}, \vec{B})$ peut varier. Les forces exercent donc un couple, C , $C = -\dfrac{\partial W_\mu}{\partial \theta}$ avec $W_\mu = -\vec{M}.\vec{B}_{ext} = -M.B_{ext}.\cos(\theta)$ ➔

$$\boxed{C = -\frac{\partial W_\mu}{\partial \theta} = M.B_{ext}.\sin(\theta)}$$

On peut écrire cette relation sous forme vectorielle sous la forme $\boxed{\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}}$

A l'équilibre, en l'absence d'autres forces, le couple est nul donc $\theta = (\vec{M}, \vec{B}) = 0$. La bobine est soumise à un couple qui tend à l'aligner sur le champ extérieur. Le pôle Nord de la bobine (zone d'où « sort » le moment magnétique) tend à s'aligner sur le pôle Sud du champ extérieur (zone où le champ magnétique « rentre »). Inversement les pôles de même nom se repoussent. **Les pôles peuvent être interprétés comme des « charges magnétiques » qui obéissent aux mêmes principes que les charges électriques : deux charges de même nom se repoussent, deux charges de nom différent s'attirent.**

C'est ce couple qui aligne une aiguille aimantée (une boussole) sur le champ magnétique terrestre. Une aiguille aimantée est donc analogue à une bobine comme nous verrons par la suite. Le pôle Nord de la boussole indique le Nord géographique. On peut vérifier ainsi que le Nord géographique de la Terre est un pôle Sud magnétique !

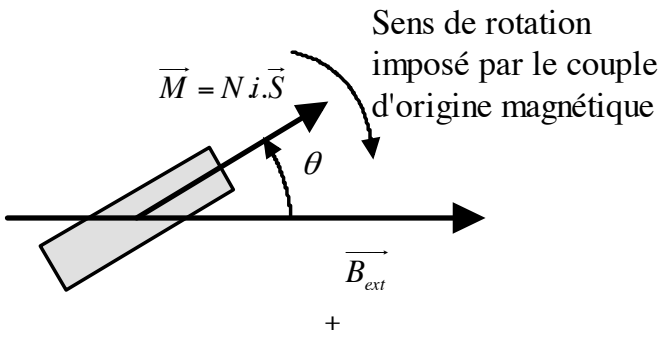


figure 17