

Concepts clés et situations problèmes en mathématiques

Numération, opérations,
nombres décimaux et proportionnalité

1

Odette BASSIS

PÉDAGOGIE PRATIQUE À L'ÉCOLE
ET AU COLLÈGE

**CONCEPTS CLÉS
ET
SITUATIONS-PROBLÈMES
EN
MATHÉMATIQUES**

**Tome 1
Numération, opérations,
nombres décimaux et proportionnalité**

Odette BASSIS

hachette
ÉDUCATION

L'auteur :

Odette Bassis est docteur en Sciences de l'Éducation. Présidente du Groupe Français d'Éducation Nouvelle, elle a enseigné en mathématique dans le secondaire, puis dans la formation initiale et continue d'enseignants en IUFM et en Sciences de l'Éducation (Paris-VIII et Paris-X). Dans la dynamique de l'éducation nouvelle, elle a co-élaboré et animé des projets de transformation des pratiques enseignantes en France et à l'étranger (Tchad, Russie, Suisse, Italie,...). C'est dans le champ spécifique du savoir et de la pratique de « démarche d'auto-socio-construction du savoir », à l'école et en formation d'adultes qu'elle contribue à apporter une avancée sur laquelle sont fondées les démarches proposées dans cet ouvrage.

Remerciements :

À Michel Baraër et Jean Bernardin, compagnons de longue route, qui m'ont apporté leurs conseils.

À tous les amis et tous ceux du GFEN avec lesquels nous partageons le pari d'une éducation nouvelle comme utopie concrète pour notre temps.

Pour en connaître plus sur l'Éducation Nouvelle (Groupe Français d'Éducation Nouvelle) : ses activités, ses publications, ses ouvrages et ses pratiques pédagogiques en histoire, géographie, philosophie, écriture, poésie, grammaire, orthographe, lecture, langues vivantes, arts plastiques, sciences, technique, école maternelle, etc... consulter la revue Dialogue et le site www.gfen.asso.fr.

Sur le plan international, le LIEN (Lien International de l'Éducation Nouvelle), www.lelien.org (en cours d'élaboration).

Couverture : *Studio Favre-Lhaïk*

Mise en page et éditorial : CMB Graphic

© HACHETTE LIVRE 2003, 43 quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15

www.hachette-education.com

I.S.B.N. 978-2-01-181573-6

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

SOMMAIRE

<i>Introduction</i>	5
<i>Pour aborder les nombres</i>	11

PREMIÈRE PARTIE : LA NUMÉRATION

<i>Problématique conceptuelle et pédagogique</i>	17
<i>Des choix pédagogiques</i>	19
<i>Fiche de présentation des étapes de la démarche</i>	24
<i>Les étapes de la démarche</i>	26
1. Étape 1 : Faire	26
2. Étape 2 : Du faire au dire	31
3. Étape 3 : Formuler	37
4. Étape 4 : Codifier	43
5. Étape 5 : Écrire un nombre avec des chiffres	47
6. Étape 6 : Le zéro.....	50
7. Étape 7 : La suite des nombres.....	60
8. Étape 8 : La numération décimale.....	71
9. Étape 9 : Vocabulaire de la base dix.....	74

DEUXIÈME PARTIE : LES OPÉRATIONS

10. L'addition	79
11. La soustraction	90
12. La multiplication	105
13. La division.....	114

TROISIÈME PARTIE : LES NOMBRES DÉCIMAUX

<i>La problématique conceptuelle des décimaux</i>	125
<i>Fiche de présentation des étapes de la démarche</i>	134
<i>Les étapes de la démarche</i>	136
14. Étape 1 : Comparer les longueurs a et b	136
15. Étape 2 : Comparer les longueurs a et c	145
16. Étape 3 : Quels sous-multiples choisir ?	149
17. Étape 4 : Introduction de la virgule.....	153
18. Étape 5 : Système décimal et apports historiques.....	158

QUATRIÈME PARTIE : LA PROPORTIONNALITÉ

Introduction des nombres rationnels

<i>Fiche de présentation des étapes</i>	164
<i>I– Notion de rapport</i>	167
19. Étape 1 : Réduction d'un rectangle	168
20. Étape 2 : Comparaison des rectangles réduits.....	169
21. Étape 3 : De l'empirisme au quantitatif	171
22. Étape 4 : Émergence d'hypothèses	172
23. Étape 5 : Recherche d'une hypothèse fiable	173
24. Étape 6 : Représentations et formulations.....	175
25. Étape 7 : Notion de rapport constant.....	178
<i>II– Notion de proportionnalité</i>	180
26. Étape 1 : Réduction des pièces du puzzle	180
27. Étape 2 : Reconstitution empirique du puzzle réduit	181
28. Étape 3 : Recherche d'une conduite opératoire de réduction du puzzle	182
29. Étape 4 : Conscientisation des conditions de réduction du puzzle	184
30. Étape 5 : Constitution de tableaux récapitulatifs.....	185
31. Étape 6 : Ensemble des propriétés de la proportionnalité	187
32. Annexe : Éléments théoriques sur la fonction linéaire	189
<i>III– Approche des fractions et nombres rationnels</i>	190
33. Étape 1 : À la recherche d'un nouveau nombre.....	190
34. Étape 2 : Fractions	192
35. Étape 3 : Fractions équivalentes	196
36. Étape 4 : Fractions et nombres décimaux	199
37. Annexe 1 : L'Égypte et les quantités	201
38. Annexe 2 : Éléments théoriques concernant la construction de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}^+$	203
<i>Récapitulatif : Ensembles de nombres</i>	205

CINQUIÈME PARTIE :

LE PROBLÈME SANS QUESTION

<i>Quand poser des questions n'est pas poser question</i>	209
---	-----

SIXIÈME PARTIE :

LA DÉMARCHE DE CONSTRUCTION DU SAVOIR

<i>Pistes et repères</i>	229
<i>BIBLIOGRAPHIE</i>	254

INTRODUCTION

« *Faites-en vos égaux afin qu'ils le deviennent* »
(Jean-Jacques Rousseau, *L'Émile*)

L'objectif de cet ouvrage est de proposer aux enseignants du cycle 2, du cycle 3 et même du collège des situations-problèmes propres à inciter et développer une activité de recherche des élèves pour qu'ils élaborent des notions clés en mathématiques : notion de nombre entier, de numération, d'opération, de nombres décimaux, de proportionnalité et de résolution de problèmes. C'est-à-dire des contenus qui fondent et traversent les programmes, concernant le numérique, de la maternelle au collège. Des contenus d'autant plus incontournables, s'ils ne sont pas (ou mal) construits, qu'ils ont pour conséquences néfastes des échecs répétés, cumulés, engendrant ennui et lassitude, mais plus encore mise à l'écart et orientation sélective. Effets aussi pour les enseignants qui en éprouvent une amertume certaine et un sens plus alourdi de leur métier.

Inciter et développer une activité de recherche des élèves pour qu'ils élaborent des notions clés

Il s'agit là, en fait, de parler plus simplement de « construction », par les élèves, de leurs savoirs. Mais le terme même de construction, qu'il soit revendiqué, rejeté, ou simplement mis à distance, peut prêter à confusion quand il est réduit à des formes de « pédagogie du concret », sous couvert de « puérocritisme ». Il ne s'agit ici ni d'asservir les savoirs aux élèves, ni d'asservir les élèves aux savoirs, mais bien plutôt d'assurer un pont solide entre les deux pôles que sont savoirs et élèves.

Et cela, parce que justement l'un et l'autre relèvent de l'humain : les savoirs, pour avoir été construits par des humains, dans l'épaisseur et les méandres du passé, et les élèves, pour avoir à développer leur place d'humain, dans *l'ici et maintenant* de l'acte d'apprendre.

Faire que les élèves deviennent acteurs dans leur développement, avec pour finalité non point d'être « *comme le poisson qui vit dans la mer sans savoir la mer* »¹, mais bien de rentrer de plain pied dans cette conquête permanente de l'humain qui est de s'apprendre, tout au long de sa vie, à « savoir le monde ». Savoir le monde : pas seulement pour le contempler ou en reproduire, inchangés, des conditionnements hérités eux-mêmes du passé, mais, face aux stagnations et aux régressions toujours aux portes de la facilité, pour que les élèves deviennent, dès l'école, acteurs – co-acteurs avec les

1. Cf. : « *La plus drôle des créatures* » du poète turc Nazim Hikmet, tiré d'un poème écrit au sortir de longues années de prison (1948).

autres – de la réalisation de leurs propres capacités à se transformer, dans leur rapport au monde, à soi-même et aux autres, et ce faisant, qu'ils se construisent comme acteurs de transformations possibles dans ce monde. Il n'est point abusif de se hausser jusqu'à de telles finalités, car tout acte d'enseignement porte en lui, élucidé ou non, et dans le vif des contenus et formes manifestes de transmission qu'il se donne, un contenu latent de valeurs éducatives qui, de toute façon, sont effectivement véhiculées quels qu'en soient les principes affirmés et les aspects apparents.

Là, d'ailleurs, particulièrement en mathématiques, il n'est que d'entendre, hors la classe et l'école, combien pèsent les traces laissées en chacun par cet enseignement. Traces sur le plan objectif des notes, de la sélection et de l'orientation, avec toutes les conséquences de vie ainsi déterminées, mais traces plus profondes sur le plan subjectif, où l'image de soi varie entre une dévalorisation douloureuse, pour les uns – intériorisant souvent ce qu'ils considèrent désormais comme incapacité (parce que validée telle à la suite d'erreurs ou échecs tenus pour définitifs) – et à l'opposé, pour les autres, ceux qui « réussissent », dans une valorisation narcissique éhontée et élitiste avec, en bout de courses pour bien des « élus », des places sociales de pouvoir incontestées. C'est là que se jouent aussi bien la conception des savoirs enseignés (où définitions, règles et procédures sont présentées comme vérités indiscutables et donc, en conséquence, où l'activité centrale est celle de l'enseignant) que la conception des pratiques de transmission (allant d'une soumission, légitimée par la raison, à des vérités reçues d'en haut ou à l'inverse pouvant devenir conquête, pour soi-même, d'authentiques pouvoirs de pensée). C'est à ce titre que les mathématiques ont joué et jouent encore une part majeure dans la poursuite du cursus scolaire ainsi que dans l'image que chacun garde de soi.

Il n'est que de se reporter à cette notion d'*habitus* qui est l'apport décisif de Bourdieu pour mesurer les déterminismes inconscients, accumulés dans l'insu à la fois personnel et social. Si ces déterminismes ne peuvent être considérés comme fatalités insurmontables, du fait fort heureusement des contradictions qui traversent à la fois tout un chacun aussi bien que l'école et la société, ils ne manquent pas cependant, s'il n'en est pris conscience, de peser lourdement sur le devenir de l'enseignement comme de la société. Que tout enseignement soit porteur d'éducation, c'est bien une reconnaissance qu'on peut constater, historiquement, dans le passage officiel des termes anciens d'*instruction publique* en ceux d'*éducation nationale*².

2. Le passage du terme « instruction » en celui de « éducation », évoqué lors du Congrès international du LIEN (Ligue Internationale de l'Éducation Nouvelle) tenu à Nice en 1932, sous la présidence de Paul Langevin, alors président du GFEN (Groupe Français d'Éducation Nouvelle), se vit officialisé la même année dans le remplacement du libellé du « Ministère de l'Instruction publique » en « Ministère de l'Éducation Nationale ».

Mais les changements d'étiquettes ne génèrent pas d'eux-mêmes les transformations des conceptions et pratiques qui devraient y être accordés : conceptions des savoirs à enseigner – c'est toute la question de quelle transposition entre savoirs savants et savoirs scolaires – et pratiques de transmission, dans leur dimension effective d'éducation, au cœur même de la fonction d'enseigner et de celle d'apprendre qui constituent ensemble les raisons d'être de l'École. Le lecteur comprendra que la finalité sur laquelle repose le travail présenté dans cet ouvrage s'accorde avec un pari sur l'humain qui est celui du potentiel créatif immense que porte tout enfant quand il vient au monde. Potentiel créatif qui ne reste que « potentiel » si les conditions qui sont faites dès sa naissance au petit d'homme n'en permettent pas l'actualisation et le développement.

D'où l'importance de telles conditions qui reviennent très tôt à l'École dans cette part spécifique de l'éducation, inscrite dans le champ social, institutionnel, qui est en propre le sien, faisant de l'enfant un élève, sur une durée et dans une phase de sa vie déterminantes pour son devenir. Sachant que cela s'inscrit dans le fait que l'homme, si différemment de l'animal, ne naît pas humain, il le devient. Tout comme il ne naît pas citoyen, il le devient. C'est là que s'affirme, d'entrée de jeu, concernant le rapport « à » savoir, une conviction d'importance, exprimée par Piaget, dans ce « *comprendre c'est inventer* » qu'il revendique pour tout acte d'apprendre authentique :

« En un mot, le principe fondamental des méthodes d'avenir peut s'exprimer sous la forme suivante : **comprendre c'est inventer**, ou reconstruire par réinvention, et il faudra bien se plier à de telles nécessités si l'on veut, dans l'avenir façonner des individus capables de production et de création et non pas seulement de répétition. Apprendre à conquérir par soi-même le vrai et non pas se borner à apprendre sur commande : car si l'individu est passif intellectuellement, il ne saurait être libre moralement. Et si les seuls rapports sociaux dans la classe sont ceux qui relient chaque élève individuellement à un maître détenant tous les pouvoirs, il ne saurait être libre intellectuellement. »³

Ce qu'il y a à comprendre pour savoir

Le pari délibérément choisi dans cet ouvrage est d'aller interroger jusqu'aux noyaux conceptuels qui constituent chacune des notions abordées pour en dégager non pas seulement « ce qu'il y a à savoir » – et se contenter d'en aménager de façon active la réception, la répétition et l'application par l'élève – mais de tenter d'aller jusqu'à faire que soit pris en main pour de bon, précisément, ce qu'il y a à comprendre pour savoir. Ce qui rejoint les partis pris que Clairaut, mathématicien du siècle des Lumières⁴, exprimait déjà :

3. Jean Piaget, *Où va l'éducation ?*, Denoël, 1971.

4. Conviction qu'il mit en pratique auprès de son élève la marquise du Châtelet, dont on sait la compétence scientifique, notamment dans la traduction française qu'elle produisit des *Principes de philosophie naturelle* de Newton (1763).

« Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la géométrie m'ont amené à penser que c'est vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de portée des Commençaunts, puisque c'étaient des Commençaunts qui les avaient faits.

J'espère que cette méthode aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir; car j'évite avec soin de donner une proposition sous la forme de théorèmes; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

En suivant cette voie, les Commençaunts aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention. »

Il s'agit donc de faire des choix qui ne gommant pas les points d'achoppement qui forment l'ossature des concepts. Car ce sont ces points d'achoppement qui donnent leurs fondements aux situations pédagogiques afin qu'elles soient incitatrices de questionnement, voire d'étonnement devant l'insolite ou l'inattendu qu'elles présentent.

Le but est de susciter auprès des élèves la nécessité vécue par eux d'avoir à imaginer, et pour cela de devoir aller quérir des schèmes nouveaux de pensée non seulement dans leurs acquis antérieurs, mais plus encore, dans un potentiel créatif non encore mobilisé.

Car, se trouvant affrontés à des obstacles inattendus c'est bien au-delà de leurs acquis qu'ils auront à fouiller, imaginer, créer. Invention de schèmes d'action et de représentations qui, dans le cours des cheminements enclenchés – et aussi minutieusement que discrètement « accompagnés » par l'enseignant – vont se muer en schèmes cognitifs et concepts nouveaux pour les élèves.

Une double exigence nourrit de tels choix

- **Rendre fonctionnels** les savoirs ainsi construits.

Mais précisément, ce qui est garant d'une telle fonctionnalité, c'est le fait que ces savoirs ont été construits dès l'abord dans l'action, pour affronter les problèmes issus des situations proposées, par le biais de conduites tentées, élaborées et mises à l'épreuve par les élèves dans des réinvestissements multiples.

- **Donner sens** à ces savoirs.

Là, c'est le fait qu'ils aient été construits dans l'affrontement avec d'authentiques obstacles cognitifs à surmonter, dans la situation pédagogique vécue, en relation avec les obstacles cognitifs que les concepts en question ont eux-mêmes rencontrés dans leur genèse historique, culturelle et sociale.

En fonction des cycles et de l'âge des élèves, les apports historiques – en situation de recherche des élèves eux-mêmes – sont des facteurs puissants d'entrée dans la culture et l'histoire humaine dans la mesure où une relation vivante se construit entre l'ici et maintenant du vécu pédagogique et le passé créatif des processus historiques de production de ces savoirs.

Il s'agit de dépasser une coupure aliénante entre théorie et pratique, entre contenus et méthodes et de saisir en quoi un certain rapport aux savoirs à enseigner doit se défaire d'une vue trop pragmatique et fermée concernant seulement des résultats à retenir ou des procédures à savoir utiliser. Pour que l'enseignement soit véritablement opérationnel sur les deux plans de la fonctionnalité et du sens, il y faut bien sûr un travail effectif de la part de l'enseignant, tant sur le plan d'une autre façon de concevoir les contenus à enseigner que sur celui des situations et des conduites à tenir, en classe. C'est en ce sens qu'on sort délibérément ici d'un *puérocentrisme* étroit.

D'autant plus qu'il est clair que l'élaboration de concepts chez l'élève n'est pas de l'ordre d'une génération spontanée mais de l'ordre de cette transmutation qui s'opère entre « nature » et « culture »⁵. En effet si, en bout de course et en quelque sorte paradoxalement, l'utilité de l'enseignant est en définitive de savoir se rendre inutile, ce n'est pas pour autant sans travail de sa part, condition du travail des élèves.

Les espaces de travail

Cet ouvrage propose, à sa mesure, pour l'enseignant qui s'y implique, les espaces de travail qui sont les siens, en vue de et dans un accompagnement confiant et complice.

Car si les élèves ont des potentiels immenses à mobiliser et développer, il en est de même pour tout enseignant qui cherche à construire efficacité et sens dans son métier, en osant pour lui-même aborder des questions nouvelles, ouvrant sur des possibles qui, loin d'alourdir sa tâche, l'éclaire et l'allège.

Allègement quand l'acte d'enseigner est reconnu dans sa dimension éducative, c'est-à-dire quand, construisant son savoir, le sujet qui apprend se construit lui-même dans sa personne.

Or ici, dans les démarches proposées, ce qui se joue de l'ordre de l'éducatif, c'est dans la sollicitation qui est faite à chacun d'eux aller quérir dans son potentiel créatif et de le mettre en acte dans un double va-et-vient, de chacun avec la situation d'une part et de chacun avec les autres d'autre part.

5. La notion d'effet réversif élucidée par Patrick Tort à propos du darwinisme concerne ce qui est le propre de l'homme par rapport à l'évolution des espèces, pour laquelle la « culture » et la notion de civilisation mettent en défaut la loi de sélection naturelle du règne animal (Tort P., *Darwin et le darwinisme*, PUF, 1997).

C'est d'ailleurs pour signifier ces deux plans en interaction – de l'individuel et du collectif – que de telles démarches sont dénommées « démarches d'auto-socio-construction du savoir »⁶.

Dans cette interaction, apprendre à se décentrer de son propre point de vue pour entrer dans d'autres schèmes représentatifs, apprendre à faire avec les différences, voire avec les contradictions – pour les surmonter – c'est se forger des modes d'être et de penser, où l'autonomie conquise est forte de ce qu'elle a dû prendre en compte, de ce qu'elle a dû abandonner ou au contraire affirmer et affiner et cela, dans l'échange et l'élaboration avec les autres. Ainsi, l'enjeu est-il de découvrir en soi et les autres, en soi par les autres, des forces qu'on s'ignorait. Une autonomie où celle de chacun augmente celle des autres dans une relation enrichissante et opératoire.

Les démarches présentées dans cet ouvrage, si elles tiennent à s'affirmer par rapport aux finalités abordées dès cette introduction et si elles sont issues de longues et multiples recherches, à la fois au plus près de nombreux terrains en même temps que sous l'éclairage de nombreuses références théoriques, doivent être situées pour l'essentiel par rapport à une longue filiation de l'éducation nouvelle, d'où elles tirent leur dynamique interne et leur force d'existence. Ces démarches, avec la part de nouveauté qui leur revient en propre, ne prétendent à aucune invulnérabilité. Elles veulent donner à partager, avec les enseignants, la jubilation et la fierté qu'il y a à faire naître auprès de leurs élèves des recherches effectives, poussées jusqu'en leur dynamique exigeante de conceptualisation.

Ces démarches veulent montrer que c'est possible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas là utopie impossible, mais utopie concrète. Toujours à améliorer, certes, à pousser plus avant. Et s'il y a un souhait à formuler, c'est que ces démarches deviennent leviers. Leviers pour chaque enseignant de trouver goût à explorer des terres nouvelles, peut-être, ou à reconnaître quelque espace déjà côtoyé, mais à coup sûr levier pour que prenne une autre place ce champ si flottant et si dévoyé, si rétréci et si mis à mal qui est celui de la pédagogie.

Une pédagogie dont le devenir est qu'elle assume plus pleinement sa fonction la plus haute, qui est de participer à l'avenir de l'humain.

6. Terme qui peut paraître lourd et prétentieux, mais qui veut se démarquer des modes unilatérales d'une part de l'auto-formation, de l'auto-apprentissage..., ou inversement de celles qui prétendent tout régler directement par le groupe. Il s'agit de faire la part à chaque temps pour assurer une interaction riche et opératoire. On peut trouver une approche de la notion de démarche d'« auto-socio-construction » du savoir dans l'ouvrage : Bassis O., *Se construire dans le savoir à l'école et en formation d'adultes*, ESF, 1998. La réalisation de projets de formation qui en sont porteurs y est également présentée. De multiples ouvrages et revues dans d'autres disciplines présentent de même d'autres démarches (cf. www.gfen.asso.fr).