OPTIMUM

Toute la probabilité

Maths approfondies



- Cours et astuces
- Exercices et problèmes
- Sujet d'entraînement

Hédi **Joulak**

ellipses

OPTIMUM

Collection dirigée par Fabien Fichaux

ECG 1re et 2e années

Toute la probabilité

Maths approfondies

Hédi Joulak

Professeur à La Prépa Autrement et au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

Du même auteur

S'entraîner en mathématiques en prépa – ECE 1&2, 2020

Dans la collection « Optimum »

52 semaines pour préparer les mathématiques appliquées en ECG, 2022
Toute l'analyse, Maths appliquées, ECG, 1re et 2e année, 2022
Toute l'algèbre, Maths appliquées, ECG, 1re et 2e année, 2022
Toute la probabilité, Maths appliquées, ECG, 1re et 2e année, 2022
500 exercices de mathématiques en ECS, 1re année, 2e édition, 2019
Mathématiques, Toute l'algèbre en prépa, ECE, 2016
Mathématiques, Toute la probabilité en prépa, ECE, 2016
Réussir l'épreuve de mathématiques en ECT, 2016
Réussir l'épreuve de mathématiques en ECS, 2014
Réussir l'épreuve de mathématiques en ECE, 2014
500 exercices de mathématiques en ECS, 1re année, 2014
Mathématiques en ECE, HEC – ESSEC – ESCP-EAP – EM Lyon – EDHEC – ÉCRICOME, 2014
500 exercices et problèmes mathématiques pour réussir en ECE, 1re année, 2013
Le grand livre des concours AST en mathématiques, Edhec et Passerelle, 2013
Mathématiques, Formulaire, MPSI/PCSI, 2013
Exercices et problèmes mathématiques en MPSI/PCSI, 1re année, 2013
Mathématiques, Formulaire, ECE/ECS, 2013
Mathématiques en ECS, HEC – ESSEC – ESCP-EAP – EM Lyon – EDHEC – ÉCRICOME, 2012
Mathématiques en ECE, HEC – ESSEC – ESCP-EAP – EM Lyon – EDHEC – ÉCRICOME, 2012
8 tests pour réussir les concours ACCES/SESAM, 2011
600 exercices pour être prêt aux tests, TAGE-MAGE®, TAGE 2®, ARPÈGE®, 2011
Se préparer aux tests en 50 fiches et 300 exercices, TAGE-MAGE®, TAGE 2®, ARPÈGE®, 2011 (coll. « Bloc Optimum »)
Les tests ARPEGE®, TAGE 2® et TAGE-MAGE®, 2010

ISBN 9782340-084278
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2023
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cédric Villani : « *Quel que soit le temps passé à faire des mathématiques, ce n'est jamais du temps perdu.* »

Ce manuel a pour ambition d'être le manuel de référence pour les candidats aux concours d'entrée aux écoles de commerce (par voie directe ou par voie parallèle). Un manuel doit pouvoir apporter toutes les connaissances nécessaires à chaque étudiant.

Un manuel doit pouvoir répondre à toutes les questions que se pose un étudiant.
Un manuel doit se vouloir rassurant et proposer des paliers de vérification des savoirs.
Un manuel doit exposer les rédactions-types sur les questions récurrentes afin que le préparationnaire concentre ses efforts sur l'essentiel.
Un manuel doit poser des alertes sur les pièges dans lesquels il ne faut pas se laisser glisser.
Un manuel se doit d'être évolutif à travers des exercices d'application directe pour affirmer ses connaissances, des mini-problèmes pour se préparer aux interrogations et aux devoirs écrits, et des sujets plus longs afin de se mettre en situation pour le jour J.

Ce manuel, vous l'avez entre les mains.

L'Auteur

Table des matières

1 Probabilités **7**

2 Variables aléatoires discrètes **123**

3 Couple de variables discrètes **275**

4 Variables à densité **391**

5 Convergences **585**

6 Estimateurs **691**

Chapitre 1

Probabilités

L'essentiel du cours

Notion d'évènement

Expérience aléatoire

Quand on ne peut prévoir le résultat d'une expérience, on dit que celle-ci est aléatoire.
On appelle alors univers, l'ensemble des résultats possibles ou observables de cette expérience ; on le note en général Ω.

Le conseil du prof :
La bonne lecture de l'expérience aléatoire est primordiale.
Il faut savoir quel type d'éléments on cherche : un entier, un couple d'entiers ou autre chose ? à quoi correspond-il ? quelles sont ses valeurs possibles ?

Évènement

⋆ Un évènement est une partie de l'univers Ω.
⋆ Un évènement sera dit élémentaire s'il ne contient qu'un seul résultat.

L'ensemble des évènements est noté $\mathcal{A}$.
Cet ensemble est stable par passage à l'union, à l'intersection dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut lister un à un) et au complémentaire.

Réalisation d'évènement

⋆ On dira que l'évènement A est réalisé si le résultat de l'expérience est dans A.
⋆ Si A et B sont des évènements, alors $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique celle de B.
⋆ L'égalité $A = B$ signifie que l'on a $A \subset B$ et $B \subset A$.

Le conseil du prof :
Concrètement, pour montrer que $A \subset B$, on partira de l'évènement A en supposant qu'il est réalisé. On s'écrit alors la conclusion à atteindre : la réalisation de B ; et, entre l'hypothèse et la conclusion, on agit par différentes implications et déductions.

Opérations sur les évènements

On note A et B des évènements de Ω.
⋆ L'évènement $\overline{A}$, appelé l'évènement contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.
⋆ L'évènement $A \cup B$, appelé réunion (ou union) de A et B, est réalisé si et seulement si A l'est ou si B l'est.
⋆ L'évènement $A \cap B$, appelé intersection de A et B, est réalisé si et seulement si A et B le sont.

Le conseil du prof :
La notion de contraposée nous permet d'affirmer que :
$$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Évènements incompatibles

Si l'on a deux évènements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$, alors on dira qu'ils sont incompatibles (ou disjoints).

Système complet d'évènements

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements de Ω (où $I \subset \mathbb{N}$) sera appelée système complet d'évènements si :
⋆ $\forall i, j \in I,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
⋆ $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Le conseil du prof :
Sauf demande explicite de l'énoncé, vous n'aurez pas à justifier que telle famille est un système complet d'évènements.

Les lois de De Morgan

Pour des évènements A et B, on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Coefficients binomiaux

Factorielle

Soit E un ensemble fini à n éléments.
On appelle permutation de E, tout choix de n éléments tous distincts dans E.
Il y en a factorielle n et on note $n!$:

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

La factorielle n représente le nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.

Coefficient binomial

Le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments (où $0 \leq p \leq n$) est $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ (on le lit p parmi n) et il est défini par :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ représente le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.

Les relations importantes

⋆ La symétrie :

$$\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-p \end{array} \right)$$

⋆ La petite formule : $\forall n, p \geq 1$,

$$p \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = n \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array} \right)$$

⋆ Le triangle de Pascal : pour tout $n \geq 1$ et p tel que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p \end{array} \right)$$

Les conseils du prof :

⋆ *La petite formule sera très utile dans le calcul d'espérance ou de variance où l'on peut retrouver des termes de la forme* $k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$. *Parfois, on pourra appliquer 2 fois cette formule et avoir :*

$$k(k-1) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n(n-1) \left(\begin{array}{c} n-2 \\ k-2 \end{array} \right)$$

⋆ *La différence de coefficients binomiaux peut être simplifiée par le triangle de Pascal :* $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array} \right)$.

Probabilité

Définition

On appelle probabilité toute application $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

⋆ $P(\Omega) = 1$

⋆ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Si on a $P(A) = 1$ *alors on dira que l'évènement* A *est quasi-certain.*
Si on a $P(A) = 0$ *alors on dira que l'évènement* A *est quasi-impossible.*

Propriétés

⋆ Pour tout évènement A, on a :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

⋆ Pour toute famille finie $(A_i)_{i=1}^n$ d'évènements deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), on a :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

⋆ Pour tout évènement A, on a :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

⋆ Croissance :

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Formule du crible de Poincaré

⋆ Pour 2 évènements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

⋆ Pour 3 évènements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Équiprobabilité

On dira que l'on a équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.
Dans ce cas, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour réaliser } A}{\text{nombre de cas favorables au total}}$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit un évènement A de probabilité non nulle.
L'application $P_A : B \longmapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est une probabilité que l'on appelle la probabilité conditionnelle relative à A.
Le réel $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, que l'on notera $P_A(B)$, est appelé la probabilité de B sachant A.

Le conseil du prof :
Pour appliquer cette formule, on n'oubliera pas de relever que $P(A) \neq 0$.

Les propriétés

⋆ $P_A(\emptyset) = 0$, $P_A(\Omega) = 1$ et $\forall B$ vérifiant $A \subset B$, $P_A(B) = 1$.
⋆ $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

Des formules importantes

Formule des probabilités composées

⋆ Si $P(A) \neq 0$ alors on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

⋆ Soit $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
On a la formule :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Le conseil du prof :
On peut éviter l'utilisation de cette formule par une traduction détaillée et chronologique de l'évènement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$.
On précisera l'évolution du modèle au fur et à mesure de l'expérience.

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (où $I \subset \mathbb{N}$).
Alors, pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Les conseils du prof :
⋆ *Si le système complet est infini, alors la somme est une série ; on justifiera sa convergence grâce au fait qu'elle est égale à une probabilité.*

⋆ *Si le système complet n'est pas donné explicitement, il peut être suggéré soit à travers la formule à prouver (si l'on doit montrer que* $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1)$ *on s'appuiera sur le système complet* $((X_n = 0), (X_n = 1))$*) soit à travers des calculs de probabilités conditionnelles (on doit calculer* $P(Y = 1)$ *et on a déterminé* $P_{(X=k)}(Y = 1)$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *donc on prend comme système complet* $(X = k)_{0\leq k\leq n}$*).*

⋆ *Il faut être vigilant sur le fait d'avoir un vrai système complet d'évènements c'est-à-dire que l'on recouvre bien tous les cas possibles.*

Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (où $I \subset \mathbb{N}$). Alors, pour tout évènement B (tel que $P(B) \neq 0$) et $i \in I$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k\in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

Probabilités infinies

Théorèmes de la limite monotone

⋆ Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements croissante au sens de l'inclusion (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$). On a :

$$P\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

⋆ Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements décroissante au sens de l'inclusion (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$). On a :

$$P\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Corollaires des théorèmes de la limite monotone

⋆ Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements. On a :

$$P\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big)$$

⋆ Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements. On a :

$$P\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big)$$

Le conseil du prof :
On prendra le temps et soin de montrer que la suite $(A_n)_n$ est croissante ou décroissante par traduction (comme il l'a été précisé dans le paragraphe de la réalisation d'évènement).

Indépendance

Définitions

⋆ Deux évènements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

⋆ Des évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont dits deux à deux indépendants si :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

⋆ Des évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont dits mutuellement indépendants si :

$$\forall I \subset \mathbb{N},\quad P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Le conseil du prof :
Il ne faudra pas confondre les deux notions d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle.
Toutefois, on a l'implication : indépendance mutuelle $\Longrightarrow$ indépendance deux à deux.

Stabilités par passage au contraire

Si n évènements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les évènements B_i avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.
En particulier, si A et B sont des évènements indépendants alors il en est de même pour :

$$A \text{ et } \overline{B},\ \overline{A} \text{ et } B,\ \overline{A} \text{ et } \overline{B}$$

Une question ? des réponses !

Comment calculer une probabilité ?

Avec un (petit) dénombrement

On peut utiliser le principe d'équiprobabilité qui nous dit que :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nb\ de\ cas\ favorables\ pour\ A}{nb\ total\ de\ cas\ possibles}$$

On devra donc dénombrer les cas possibles pour satisfaire A et le nombre de cas possibles au total.

Avec l'évènement contraire

Pour la plupart des évènements contenant « avoir au moins » ou pour tout évènement où l'on pressent un dénombrement trop lourd, il sera préférable de considérer l'évènement contraire et la relation :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Avec la formule des probabilités totales

Dans le cas où l'évènement A dépend de situations ou conditions antérieures, on pourra mettre en exergue un système complet d'évènements $(A_i, i \in I)$ et utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(A) P(A_i) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i)$$

Si le système complet est infini, on notera que la série définissant $P(A)$ est convergente (puisqu'elle vaut $P(A)$).

Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

Avec la définition

Pour un évènement B de probabilité non nulle, on a la probabilité de A sachant B donnée par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Avec le contexte

Une probabilité conditionnelle, $P_B(A)$, est une probabilité donnée littéralement « sous la ou les condition(s) imposée(s) par B » ; donc, on peut décrire le nouveau modèle ou schéma dans lequel l'expérience se déroule et ainsi y calculer la probabilité demandée.
On s'écrira et se traduira bien ce que l'on sait (grâce au « sachant ») et ce que l'on veut.

Avec la formule de Bayes

Une probabilité conditionnelle peut poser un problème chronologique (par exemple, probabilité de choisir l'urne 1 sachant que l'on a eu une boule blanche) et pour inverser la conditionnelle, on a la formule de Bayes (appelée également formule des probabilités des causes).
Pour un système complet d'évènements $(A_i, i \in I)$ et un évènement B (tel que $P(B) \neq 0$), on a :

$$\forall i \in I,\ P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k\in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

Comment calculer une probabilité d'union ?

Avec l'incompatibilité

Si les évènements A_i et A_j, où $i \neq j$, $i, j \in I$, sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors :

$$P\Big(\bigcup_{k\in I} A_k\Big) = \sum_{k\in I} P(A_k)$$

L'ensemble I pouvant être fini ou infini.

Avec le crible de Poincaré

⋆ *Pour deux évènements A et B, on a :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

⋆ *Pour trois évènements A, B et C, on a :*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Comment calculer une probabilité d'intersection ?

Avec l'indépendance

Si les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants alors :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Avec la formule des probabilités conditionnelles

On utilise la formule des probabilités composées pour une expérience de type sans remise :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

(sous la condition $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$).

Par interprétation

Pour calculer la probabilité $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ on peut interpréter l'évènement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ de manière chronologique par une phrase.

10 questions pour se tester

Q1 : On a une urne avec 3 boules blanches et 2 boules noires ; on tire des boules de l'urne une à une et sans remise.
Quelle est la probabilité d'avoir une blanche au 2e tirage sachant que l'on a eu une noire au 1er.
Q2 : Avec une urne contenant des boules blanches et des boules noires, et en notant B_i :« avoir une blanche au i-ème tirage » et N_i :« avoir une noire au i-ème tirage » , peut-on affirmer que $(R_1, B_1 \cap R_2, B_1 \cap B_2)$ est un système complet d'évènements ?
Q3 : Pour 3 évènements A, B, C, si l'on a

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

peut-on conclure quant à l'indépendance de A, B et C ?
Q4 : A-t-on $P_B(A) \leq P(A)$?
Q5 : Que dire de $P_B(A)$ si l'on a $B \subset A$?
Q6 : Écrivez $P_B(\overline{A})$ à l'aide de $P_B(A)$.
Q7 : On lance une pièce de monnaie ; on note P_i l'évènement « avoir Pile au i-ème lancer » et F_i pour « avoir Face au i-ème lancer » . Décrivez l'évènement « avoir Pile et Face, dans cet ordre, pour la première fois aux 3e et 4e lancers » .
Q8 : En notant $D_{n,k}$ l'évènement « avoir k fois Pile sur n lancers » , qui est l'évènement conditionnel $D_{n,k}/P_1$?
Q9 : On lance une pièce équilibrée ; quelle est la probabilité de faire pour a 1re fois Face-Pile dans cet ordre aux n-ème et $(n+1)$-ème lancers sachant que l'on a eu Face au 1er lancer ?
Q10 : On considère une pièce équilibrée.
En notant l'évènement A_n :« avoir un double Pile pour la 1re fois aux n-ème et $(n+1)$-ème lancers » trouvez une relation entre $P(A_n)$, $P(A_{n+1})$ et $P(A_{n+2})$ grâce au système complet (P_1, F_1).

R1 *: On sait que l'on a eu une boule noire au 1^{er} tirage donc, les tirages étant sans remise, la nouvelle composition de l'urne est : 3 boules blanches et 1 boule noire.*
Ainsi la probabilité d'avoir une boule blanche est $\frac{3}{4}$.
R2 *: Chaque évènement est bien différent du vide, ils sont disjoints 2 à 2 et la réunion des trois évènements donne bien l'ensemble des possibilités. On a en effet :*

$$\begin{aligned} R_1 \cup (B_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap B_2) &= R_1 \cup \Big(B_1 \cap (R_2 \cup B_2)\Big) \\ &= R_1 \cup (B_1 \cap \Omega) \\ &= R_1 \cup B_1 \\ &= \Omega \end{aligned}$$

Cette famille d'évènements est donc bien un système complet.
R3 *: Cette seule hypothèse est insuffisante pour avoir l'indépendance de A, B et C. Il nous faudrait en plus :*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \text{ et } P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

R4 *: Si l'on considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule noire et si l'on effectue des tirages sans remise alors $P_{N_1}(B_2) = 1$ car il n'y aura qu'une boule blanche dans l'urne.*
Par contre, avec le système complet (N_1, B_1) on a par la formule des probabilités totales :

$$P(B_2) = P_{N_1}(B_2)P(N_1) + P_{B_1}(B_2)P(B_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Ainsi, on a $P(B_2) < P_{N_1}(B_2)$ et pas l'inverse.
R5 *: On a* $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ *car* $B \subset A \Longrightarrow A \cap B = B$.
R6 *: On a le lien $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.*
R7 *: On sait déjà que l'on finit par $P_3 \cap F_4$. Il nous reste à décrire les 2^{ers} évènements ; si on commence par P_1 on doit nécessairement avoir P_2, si on commence par F_1 il n'y a aucune restriction sur le 2^e lancer (que ce soit P_2 ou F_2 on ne fait pas apparaître de Pile-Face avant).*
En résumé, l'évènement est : $P_1P_2P_3F_4 \cup F_1P_3F_4$.
R8 *: L'évènement $D_{n,k}/P_1$ se traduit par : on veut avoir k fois Pile sur n lancers sachant que l'on a eu Pile au 1^{er} ce qui revient à avoir $k-1$ fois Pile sur $n-1$ lancers d'où : $P_{P_1}(D_{n,k}) = P(D_{n-1,k-1})$.*

C'est comme si on remettait le compteur à zéro ; on a « consommé » un lancer en faisant un Pile, on regarde donc ce qu'il nous reste à obtenir mais sur un nombre de lancers qui a changé.
R9 *: Si l'on a eu F_1 on est contraints de n'avoir que des Face par la suite pour ne pas faire apparaître un Face-Pile avant les n-ème et $(n+1)$-ème lancers.*
Dès lors, la séquence est : $F_1F_2\cdots F_nP_{n+1}$ et donc la probabilité, par indépendance des lancers, est : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
R10 *: Avec le système complet d'évènements (P_1, F_1), on a par la formule des probabilités totales :*

$$P(A_{n+2}) = P_{F_1}(A_{n+2})P(F_1) + P_{P_1}(A_{n+2})P(P_1)$$

L'évènement conditionnel A_{n+2}/F_1 signifie que l'on veut avoir Pile-Pile pour la 1^{re} fois aux $(n+2)$-ème et $(n+3)$-ème lancers sachant que l'on a eu F_1 ce qui, en réinitialisant l'expérience, revient à avoir Pile-Pile pour la 1^{re} fois aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème lancers.
On a ainsi : $P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1})$.
L'évènement conditionnel A_{n+2}/P_1 signifie que l'on veut avoir Pile-Pile pour la 1^{re} fois aux $(n+2)$-ème et $(n+3)$-ème lancers sachant que l'on a eu P_1 ce qui induit nécessairement d'avoir F_2 puis une séquence de $n+1$ lancers où l'on finit par Pile-Pile pour la 1^{re} fois.
On a donc $P_{P_1}(A_{n+2}) = P(F) \times P(A_n)$.
En résumé, on a :

$$P(A_{n+2}) = P(A_{n+1}) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times P(A_n) \times \frac{1}{2}$$

$$\iff P(A_{n+2}) = \frac{1}{2}P(A_{n+1}) + \frac{1}{4}P(A_n)$$

Les basiques

★☆☆ Exercice 1 : application de la formule des probabilités totales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit $(A_i)_{i=1}^n$ un système complet d'évènements tel que la suite $(P(A_i))_i$ soit arithmétique de premier terme $P(A_1) = \dfrac{1}{2n}$.

1. Déterminer $P(A_i)$ pour $i \in [\![1; n]\!]$.
2. Soit B un évènement tel que :

$$\forall i \in [\![1; n]\!],\ P_{A_i}(B) = \frac{i}{2n}$$

Calculer $P(B)$ en fonction de n.

1. Notons a la raison de la suite $(P(A_i))_i$.
On a le terme général :

$$\forall i \in [\![1; n]\!],\ P(A_i) = \frac{1}{2n} + a(i-1)$$

Il nous faut déterminer a ; pour cela, utilisons le fait que $(A_i)_{i=1}^n$ soit un système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 &\iff \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{2n} + a(i-1)\Big) = 1 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} + a\sum_{i=1}^{n}(i-1) = 1 \\
&\iff \frac{1}{2} + a\frac{(n-1)n}{2} = 1 \\
&\iff a = \frac{1}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Dès lors, on a l'expression pour $i \in [\![1; n]\!]$:

$$P(A_i) = \frac{1}{2n} + \frac{i-1}{n(n-1)}$$

2. La formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(A_i)_{i=1}^n$ nous donne :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2n}\Big(\frac{1}{2n} + \frac{i-1}{n(n-1)}\Big) \\ &= \frac{1}{(2n)^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2n^2(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(i^2 - i) \end{aligned}$$

En scindant les sommes, on a alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{2n}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n(n-1)}\Big)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2n^2(n-1)}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{(n+1)(n-3)}{8n(n-1)} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n(n-1)} \\ &= \frac{7n^2 - 7}{24n(n-1)} \\ &= \frac{7(n+1)}{24n} \end{aligned}$$

★☆☆ Exercice 2 : différents rangements possibles de n boules dans trois tiroirs

On range n boules ($n \geq 3$) dans trois tiroirs numérotés 1,2,3 ; chaque tiroir pouvant recevoir un nombre quelconque de boules.

1. Calculer la probabilité de l'événement : E_k : « le 1^{er} tiroir contient k boules ».
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) le tiroir $n^o\, i$ est vide.
   (b) deux tiroirs sont vides.

1. 1^{er} **point de vue** : Soit Ω l'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire. $Card\ \Omega$ est le nombre de façons de placer n boules dans 3 tiroirs d'où $Card\ \Omega = 3^n$.
Soit l'événement E_k : « le tiroir T_1 contient k boules », $0 \leq k \leq n$.
On a :

$$Card\ E_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times 2^{n-k}$$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ = le nombre de façons de choisir k boules parmi les n.
2^{n-k} = le nombre de façons de répartir les $(n-k)$ boules restantes dans les tiroirs T_2 et T_3.
Donc :

$$P(E_k) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times 2^{n-k}}{3^n}$$

$2^{\textbf{ème}}$ **point de vue** : On est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p = probabilité de succès $=1/3$.
Si k désigne le nombre de succès :

$$P(E_k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

2. (a) T_i : « le tiroir $n^o\, i$ est vide ».

$$P(T_i) = P(E_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(b) A : « deux tiroirs sont vides », c'est-à-dire que l'un des 3 tiroirs a reçu les n boules.

$$P(A) = 3P(E_n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Le « 3 » devant la probabilité correspond au choix du tiroir qui a reçu les n boules.

★☆☆ Exercice 3 : maximum et minimum de résultats sur un lancer de 3 dés

On lance 3 dés D_1, D_2 et D_3 qui ne sont pas truqués.
Pour $i \in [\![1,6]\!]$, on note :
S_i :« le maximum des résultats de D_1 et D_2 est $\leq i$ »
I_i :« le minimum des résultats de D_2 et D_3 est $\geq i$ »

1. Calculer les probabilités $P(S_i)$ et $P(I_i)$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de i a-t-on S_i et I_i indépendants ?

1. On a grâce à l'indépendance des dés D_1 et D_2 :

$$\begin{aligned} P(S_i) &= P(max(D_1, D_2) \leq i) \\ &= P((D_1 \leq i) \cap (D_2 \leq i)) \\ &= P(D_1 \leq i)P(D_2 \leq i) \\ &= \frac{i}{6}\frac{i}{6} = \frac{i^2}{36} \end{aligned}$$

   De même, on a :

$$\begin{aligned} P(I_i) &= P(min(D_2, D_3) \geq i) \\ &= P((D_2 \geq i) \cap (D_3 \geq i)) \\ &= P(D_2 \geq i)P(D_3 \geq i) \\ &= \frac{6-(i-1)}{6}\frac{6-(i-1)}{6} = \frac{(7-i)^2}{36} \end{aligned}$$

2. On a $S_i \cap I_i$:« $D_1 \leq i,\ D_2 = i,\ D_3 \geq i$ »donc par indépendance des dés :

$$P(S_i \cap I_i) = \frac{i}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6-(i-1)}{6} = \frac{i(7-i)}{216}$$

   Ainsi on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} S_i \text{ et } I_i \text{ indépendants} &\iff P(S_i \cap I_i) = P(S_i)P(I_i) \\ &\iff \frac{i(7-i)}{216} = \frac{i^2}{36}\frac{(7-i)^2}{36} \\ &\iff i(7-i) = 6 \text{ car } i \notin \{0, 7\} \\ &\iff i = 1 \text{ ou } 6 \end{aligned}$$

★☆☆ Exercice 4 : tirages successifs dans une urne

Soit une urne avec une boule blanche, une boule noire et une boule rouge. On y effectue des tirages successifs avec remise.
On notera B l'évènement « on a au moins une boule blanche »

1. Écrire l'évènement B (ou $\overline{B}$) de trois manières différentes :
   - avec les A_n :« on n'a aucune blanche sur les n-ers tirages »
   - avec les B_n :« on a une blanche pour la 1re fois au n-ème tirage »
   - avec les C_n :« on a au moins une blanche sur les n-ers tirages »
2. Proposer alors trois calculs pour déterminer $P(B)$; comment peut-on interpréter le résultat obtenu ?

1. On a les écritures :

$$\overline{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,\ B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,\ B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$$

2. Tout d'abord, par indépendance des tirages (avec remise), on a : $P(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $P(B_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$ ($n-1$ non blanches et la 1re blanche au n-ème tirage) puis $P(C_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (car $\overline{C_n}$ représente n tirages sans blanche).

   ⋆ Avec la 1re écriture, la suite d'évènements $(A_n)_n$ étant décroissante ($A_{n+1} \subset A_n$) on a par le théorème de la limite monotone :

$$P(\overline{B}) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0 \text{ car } \frac{2}{3} \in]-1;1[$$

   On en déduit alors que : $P(B) = 1$.

   ⋆ Comme les B_n sont incompatibles (grâce à « pour la 1re fois »), on a :

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

   car $\frac{2}{3} \in]-1;1[$.

$\star$ La suite d'évènements $(C_n)_n$ étant croissante ($C_n \subset C_{n+1}$), on a par le théorème de la limite monotone :

$$P(B) = \lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$$

car $\dfrac{2}{3} \in]-1;1[$.

Ainsi, B est un évènement quasi-certain ce qui se traduit par le fait qu'il est presque sûr d'avoir une blanche à un moment.

★☆☆ **Exercice 5 : changement de pièce**

On obtient Face avec une pièce A avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Une pièce B donne Face avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
On choisit une des pièces au hasard. On la lance.
Si on obtient Face on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.
On notera, pour $k \geq 1$, F_k l'évènement « on obtient Face au k-ème lancer » , A_k : « on lance A au k-ème lancer » et B_k : « on lance B au k-ème lancer » $=\overline{A_k}$.

1. (a) Pour $k \geq 2$, déterminer une relation entre $P(A_k)$ (que l'on notera p_k) et $P(A_{k-1})$ (qui sera donc p_{k-1}).
   (b) En déduire l'expression générale de $p_n = P(A_n)$ pour $n \geq 1$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir Face au n-ème lancer ?

1. (a) Pour tout $k \geq 2$, d'après la formule des probabilités totales pour le système complet $(A_{k-1}, \overline{A_{k-1}})$, on a :

$$P(A_k) = P(A_{k-1})P_{A_{k-1}}(A_k) + P(\overline{A_{k-1}})P_{\overline{A_{k-1}}}(A_k)$$

D'où :

$$P(A_k) = P(A_{k-1})P_{A_{k-1}}(F_{k-1}) + P(\overline{A_{k-1}})P_{\overline{A_{k-1}}}(\overline{F_{k-1}})$$

soit, en posant $p_k = P(A_k)$:

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)(1 - p_{k-1})$$

Donc, pour tout $k \geq 2$,

$$p_k = \frac{1}{6}p_{k-1} + \frac{1}{3} \quad (1)$$

(b) La suite $(p_k)_{k\geq 1}$ est arithmético-géométrique, on a donc une méthodologie pour donner son terme général.
On cherche d'abord l tel que :

$$l = \frac{1}{6}l + \frac{1}{3} \quad (2) \iff l = \frac{2}{5}$$

En faisant (1) − (2), on a :

$$\forall k \geq 2,\ p_k - l = \frac{1}{6}(p_{k-1} - l)$$

Donc, $(p_k - l)_k$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ de premier terme $p_1 - l = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$:

$$\forall n \geq 1,\ p_n - l = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

ce qui nous donne :

$$\forall n \geq 1,\ p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$$

2. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements de probabilités non nulles $(A_n, \overline{A_n})$, on a :

$$\begin{aligned} P(F_n) &= P(A_n)P_{A_n}(F_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(F_n) \\ &= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{2}{3}(1 - P(A_n)) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}P(A_n) \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $P(F_n) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right)$.

Finalement :

$$\forall n \geq 1,\ P(F_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

★☆☆ Exercice 6 : lancer infini d'une pièce

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_k : \text{« le k-ème lancer donne pile »}$$

1. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k,\ E_2 = \Big(\bigcap_{k=1}^{4} \overline{A_k}\Big) \cap \Big(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k\Big),\ E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_k$$

2. Écrire à l'aide des A_k l'évènement :« on obtient au moins une fois pile après le n-ème lancer et pas sur les n-ers » .
3. Écrire à l'aide des A_k les évènements :
   (a) B_n :« on n'obtient plus que des piles à partir du n-ème lancer »
   (b) B :« on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer » .

1. E_1 : à partir du 5$^{\text{e}}$ lancer, tous les lancers donnent pile.
   E_2 : les 4$^{\text{ers}}$ lancers donnent face et tous les suivants pile.
   E_3 : au moins l'un des lancers à partir du 5$^{\text{e}}$ donne pile.
2. On peut l'écrire : $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} \cap \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k$ car on ne veut pas de Pile sur les n-ers tirages et on en veut un au $(n+1)$-ème ou au $(n+2)$-ème, ou ....
3. (a) On a : $B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$ car on veut Pile au n-ème lancer, et au $(n+1)$-ème lancer et....
   (b) On a : $B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\Big)$ car l'union nous permet de définir à partir de quel rang on enchaîne les Piles (par des intersections).

★☆☆ Exercice 7 : indépendance, union et intersection

On lance simultanément 3 dés indiscernables et non truqués.
On note a, b, c les résultats de chacun de ces dés.
Soit les évènements :

$$A = (b + c = 7),\ B = (a + c = 7) \text{ et } C = (a + b = 7)$$

1. Calculer $P(A)$ et $P(B \cup C)$.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?
4. Que dire des propriétés suivantes ? :
   (a) Si un évènement est indépendant de deux autres, alors il est indépendant de leur réunion.
   (b) Si un évènement est indépendant de deux autres, alors il est indépendant de leur intersection.

1. ⋆ Tout d'abord, comme on lance 3 dés indiscernables : $card\,\Omega = 6^3$.

   ⋆ Pour réaliser A, on a un choix quelconque pour a (soit 6 possibilités) et (b, c) peut être (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4) ou (4,3) soit 6 possibilités.
   On a donc $card\ A = 6^2$ et

   $$P(A) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

   ⋆ Par symétrie, on a $P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$.
   Ensuite, pour réaliser $B \cap C$, on peut avoir pour (a, b, c) les triplets (1,6,6), (2,5,5), (3,4,4), (4,3,3), (5,2,2) ou (6,1,1) soit 6 possibilités.
   Ainsi, on a :

   $$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{6}{6^3} = \frac{11}{36}$$

2. Voyons si l'on a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
   Toujours par symétrie, on a : $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.
   Or, $P(A)P(B) = \frac{1}{36}$ donc A et B sont bien indépendants.

3. Par symétrie, B et C (ou A et C) sont indépendants.
   A, B et C sont donc indépendants 2 à 2.
   En remarquant que $A \cap B \cap C = \emptyset$ (vu que $A \cap B$ donne $a = b$ et alors on ne peut avoir C car $a + b = 2a \neq 7$) on a :

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$$

   Ainsi, on n'a pas l'indépendance mutuelle de A, B et C.

4. (a) On a A indépendant avec B et avec C.
   Voyons ce qu'il en est de A et $B \cup C$; on a $P(A)P(B \cup C) = \dfrac{11}{216}$ et pour $P(A \cap (B \cup C))$:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

   La propriété est donc fausse (en général).

   (b) Comme $P(A \cap (B \cap C)) = 0$ et $P(A)P(B)P(C) = \dfrac{1}{216}$, cette propriété est également fausse (en général).

★★☆ Exercice 8 : nombre de parties de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de cardinal k fixé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
A contient 2^n parties ; chacune de ces parties est écrite sur un papier.
On place l'ensemble de ces papiers dans une urne.
On considère une partie B de A de cardinal k (où $0 \leq k \leq n$).
On tire au hasard un papier dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité que la partie qui y est inscrite contienne la partie B ?
2. Quelle est la probabilité que la partie qui y est inscrite soit contenue dans la partie B ?
3. Quelle est la probabilité que la partie qui y est inscrite n'ait pas d'éléments en commun avec B ?

1. On veut que le papier tiré contienne les éléments constituant B ; pour ces éléments il n'y a qu'un choix possible. Par contre, on va devoir dénombrer les choix que l'on peut faire pour compléter les éléments de B.
   Cela revient à déterminer le nombre de parties que l'on peut former avec ces $n - k$ éléments restants (ceux de $A - B$).
   Comme il y en a 2^{n-k}, on a alors la probabilité voulue :
   $$\frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}$$
2. Ici, nous voulons déterminer les parties qui contiennent certains éléments de B sans en avoir d'autres.
   Il nous faut donc déterminer le nombre de parties d'un ensemble à k éléments, soit 2^k.
   On peut donc donner la probabilité cherchée :
   $$\frac{2^k}{2^n} = \frac{1}{2^{n-k}}$$
3. Dans cette dernière recherche, on doit déterminer le nombre de parties où les éléments sont à piocher dans $\overline{B}$ (qui contient $n - k$ éléments), soit 2^{n-k}.
   Ainsi la probabilité est :
   $$\frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}$$

★★☆ Exercice 9 : attente d'un double Pile

On a une pièce donnant Pile avec la probabilité $\frac{3}{4}$ et on la lance indéfiniment.
On note C_n : « on a Pile-Pile pour la 1re fois aux $(n-1)$-ème et n-ème lancers » pour $n \geq 2$.

1. Calculer $P(C_2)$ et $P(C_3)$.
2. En tenant compte des 2ers lancers (on pourra prendre comme système complet d'évènements (F_1, P_1P_2, P_1F_2)), montrer que :
$$\forall n \geq 3,\ P(C_n) = \frac{1}{4}P(C_{n-1}) + \frac{3}{16}P(C_{n-2})$$
3. En déduire $P(C_n)$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n)$. Qu'en déduire ?

1. On a $P(C_2) = P(P_1P_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ par indépendance.
On a $P(C_3) = P(F_1P_2P_3) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$ par indépendance.
2. Avec le système complet (F_1, P_1P_2, P_1F_2), on a par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(C_n) &= P_{F_1}(C_n)P(F_1) + P_{P_1P_2}(C_n)P(P_1P_2) + P_{P_1F_2}(C_n)P(P_1F_2) \\ &= \frac{1}{4}P(C_{n-1}) + \frac{3}{16}P(C_{n-2}) \end{aligned}$$
On a $P_{F_1}(C_n) = P(C_{n-1})$ car une fois que l'on sait que l'on a eu Face au 1er lancer, alors on remet à 0 notre modèle et on n'est plus avec n lancers mais avec $n-1$ lancers (et toujours pour finir par Pile-Pile).
Même raisonnement pour $P_{P_1F_2}(C_n) = P(C_{n-2})$ car on a consommé 2 lancers donc il nous en reste $n-2$ pour finir avec Pile-Pile.
Par contre, $P_{P_1P_2}(C_n) = 0$ car $n \geq 3$ et on a obtenu Pile-Pile avant l'heure.
3. On a alors, en notant $u_n = P(C_n)$:
$$\forall n \geq 3,\ u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{16}u_{n-2}$$
c'est-à-dire $(u_n)_n$ une suite vérifiant une relation récurrente linéaire d'ordre 2.

On a l'équation caractéristique :

$$x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} = 0$$

et elle a pour racines $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{13}}{8}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{13}}{8}$.
On a alors le terme général :

$$\forall n \geq 2,\ P(C_n) = A\alpha^n + B\beta^n$$

Avec les conditions initiales trouvées $P(C_2)$ et $P(C_3)$, on trouve que :

$$\begin{cases} A\alpha^2 + B\beta^2 = \dfrac{9}{16} \\ A\alpha^3 + B\beta^3 = \dfrac{9}{64} \end{cases}$$

et cela nous donne ($L_2 - \alpha L_1$ par exemple) :

$$A = \frac{9}{16\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{18}{\sqrt{13}+13} \text{ et } B = \frac{9}{16\beta(\beta-\alpha)} = \frac{18}{13-\sqrt{13}}$$

Comme $\alpha, \beta \in]-1;1[$ (comme $3 < \sqrt{13} < 4$ on a $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{5}{8}$ et $-\dfrac{3}{8} < \beta < -\dfrac{1}{4}$), les séries géométriques de termes généraux α^n et β^n convergent et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n) &= A\sum_{n=2}^{+\infty}\alpha^n + B\sum_{n=2}^{+\infty}\beta^n \\ &= A\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + B\frac{\beta^2}{1-\beta} \\ &= \frac{9}{16(\alpha-\beta)}\Big(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\beta}\Big) \\ &= \frac{9}{16(1-\alpha)(1-\beta)} = 1 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ et $\alpha\beta = -\dfrac{3}{16}$ (grâce à l'équation $x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{16} = 0$ que l'on sait similaire à $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$).
Ainsi, il est quasi-certain que l'on ait Pile-Pile à un moment donné vu que par incompatibilité :

$$P\Big(\bigcup_{n=2}^{+\infty} C_n\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n)$$

★★☆ Exercice 10 : autour d'un lancer de pièce

On lance n fois une pièce dont la probabilité de donner Pile est $p \in]0,1[-\{1/2\}$.

1. Pour $k \geq 2$, on considère l'évènement E_k :« on obtient Pile-Face dans cet ordre et successivement pour la 1re fois aux $(k-1)$-ème et k-ème lancers » . Calculer $P(E_k)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement E :« on obtient Pile-Face au moins une fois » .
3. Pour $k \geq 0$, on note F_k l'évènement « on a obtenu exactement k fois Pile » . Calculer $P(F_k)$.

1. Pour obtenir $P_{k-1}F_k$, on peut avoir : $P_1 \cdots P_{k-2}P_{k-1}F_k$ ou l'un des $A_j = F_1 \cdots F_j P_{j+1} \cdots P_{k-1}F_k$ où j décrit $[\![1, k-2]\!]$.

   Remarquons que le 1er cas est le cas où $j = 0$ dans A_j.
   Aussi, on a : $P(F_1 \cdots F_j P_{j+1} \cdots P_{k-1}F_k) = q^j p^{k-1-j} q$ par indépendance.
   Comme $E_k = \bigcup_{j=0}^{k-2} A_j$, on a par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(E_k) &= \sum_{j=0}^{k-2} P(A_j) \\ &= p^{k-1}q \sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{q}{p}\right)^j \\ &= p^{k-1}q \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}}{1-\frac{q}{p}} \quad \text{car } \frac{q}{p} \neq 1 \\ &= \frac{pq(p^{k-1}-q^{k-1})}{p-q} \end{aligned}$$

2. On a l'égalité : $E = \bigcup_{k=2}^{n} E_k$ et par incompatibilité :

$$P(E) = \sum_{k=2}^{n} P(E_k)$$

Ensuite, en remplaçant, il vient :

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{pq}{p-q}\sum_{k=2}^{n}(p^{k-1}-q^{k-1}) \\ &= \frac{pq}{p-q}\Big(p\frac{1-p^{n-1}}{1-p} - q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\Big) \quad \text{car } p,q \neq 1 \\ &= 1 - \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q} \end{aligned}$$

3. On reconnaît un modèle binomial puisque l'on veut k succès (avoir Pile) sur n épreuves indépendantes et ainsi :

$$P(F_k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$$

★★☆ Exercice 11 : attente du premier Pile-Face

On lance n fois une pièce dont la probabilité de donner Pile est $p \in]0,1[-\{1/2\}$.

1. Pour $k \geq 2$, on considère l'évènement E_k :« on obtient Pile-Face dans cet ordre et successivement pour la 1re fois aux $(k-1)$-ème et k-ème lancers » . Calculer $P(E_k)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement E :« on obtient Pile-Face au moins une fois » .
3. Pour $k \geq 0$, on note F_k l'évènement « on a obtenu exactement k fois Pile » . Calculer $P(F_k)$.

1. Pour finir notre séquence de tirages par $P_{k-1}F_k$, on peut avoir : $P_1 \cdots P_{k-2}P_{k-1}F_k$ ou, progessivement, ajouter des Faces par la gauche (pour éviter de faire un Pile-Face avant l'heure !).
Cela nous donnerait :

$$\begin{aligned} E_k &= P_1P_2\cdots P_{k-2}P_{k-1}F_k \\ &\cup\ F_1P_2\cdots P_{k-2}P_{k-1}F_k \\ &\cup\ F_1F_2P_3\cdots P_{k-2}P_{k-1}F_k \\ &\cup\ \cdots \qquad \cdots \\ &\cup\ F_1F_2\cdots F_{k-2}P_{k-1}F_k \end{aligned}$$

On peut remarquer que tous ces évènements sont incompatibles.
Remarquons aussi que la probabilité de l'évènement $F_1\cdots F_jP_{j+1}\cdots P_{k-1}F_k$ $(1 \leq j \leq k-2)$ est :

$$\forall j \in [\![1;k-2]\!],\ P(F_1\cdots F_jP_{j+1}\cdots P_{k-1}F_k) = q^jp^{k-1-j}q = p^{k-1}q\Big(\frac{q}{p}\Big)^j$$

par indépendance.
On a la probabilité du 1er évènement (cas à part qui ne commence pas par Face) qui est :

$$P(P_1\cdots P_{k-2}P_{k-1}F_k) = p^{k-1}q$$

par indépendance.
On peut remarquer que cette dernière probabilité correspond au cas $j = 0$ de la formule plus générale.

Ainsi, par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(E_k) &= p^{k-1}q\sum_{j=0}^{k-2}\left(\frac{q}{p}\right)^j \\ &= p^{k-1}q\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}}{1-\frac{q}{p}} \quad \text{car } \frac{q}{p}\neq 1 \text{ vu que } p\neq\frac{1}{2} \\ &= \frac{pq(p^{k-1}-q^{k-1})}{p-q} \end{aligned}$$

2. On a l'égalité : $E=\bigcup_{k=2}^{n} E_k$ car on peut avoir ce Pile-Face au 2e tirage ou au 3e tirage,..., ou au n-ème tirage.
Par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{k=2}^{n} P(E_k) \\ &= \frac{pq}{p-q}\sum_{k=2}^{n}(p^{k-1}-q^{k-1}) \\ &= \frac{pq}{p-q}\left(p\frac{1-p^{n-1}}{1-p}-q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right) \quad \text{car } p,q\neq 1 \\ &= \frac{p^2q(1-p^{n-1})}{(p-q)q}-\frac{pq^2(1-q^{n-1})}{(p-q)p} \\ &= \frac{p^2-p^{n+1}}{p-q}-\frac{q^2-q^{n+1}}{p-q} \\ &= \frac{(p^2-q^2)-(p^{n+1}-q^{n+1})}{p-q} \\ &= p+q-\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q} \\ &= 1-\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q} \end{aligned}$$

3. On veut k succès (avoir Pile) sur n épreuves indépendantes et ainsi :

$$\forall k\in[\![0;n]\!],\ P(F_k)=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}$$

On rappelle que le coefficient binomial représente le nombre de possibilités de placer ces k succès sur les n épreuves.

Si le nombre de Piles est supérieur au nombre de lancers, alors on est dans une situation impossible :

$$\forall k > n,\ P(F_k) = 0$$

★★☆ Exercice 12 : tirage simultané de n boules dans une urne en contenant N et comparaison à un numéro fixé

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément n boules.

1. Déterminer la probabilité que toutes les boules obtenues aient un numéro inférieur ou égal à k.
2. Déterminer la probabilité que le plus grand numéro obtenu soit k.
3. En déduire que l'on a la somme :

$$\sum_{k=n}^{N} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)$$

1. Le cardinal de l'univers décrivant cette expérience est $\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)$.
   Notons A_k :« toutes les boules ont un numéro $\leq k$ » .
   On peut d'ores et déjà remarquer que si $k < n$ alors $P(A_k) = 0$ puisque le plus grand numéro tiré est au moins égal à n.
   Pour $k \geq n$, A_k est l'ensemble des combinaisons à n éléments dans $[\![1; k]\!]$ (il nous faut choisir k numéros parmi n d'où le $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ puis il faut choisir l'ordre croissant, il y en a un seul ! ; on a donc $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \times 1$ possibilités).
   Ainsi, on a par équiprobabilité :

$$P(A_k) = \frac{\left(\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)}$$

2. Notons B_k :« le plus grand numéro vaut k » .
   En premier lieu, on a si $k < n$, $P(B_k) = 0$.
   Ainsi, supposons $k \geq n$.
   B_k est l'ensemble des combinaisons à n éléments de $[\![1; N]\!]$ contenant le numéro k et $n-1$ autres numéros dans $[\![1; k-1]\!]$.

Ainsi, on obtient :

$$P(B_k) = \frac{\left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)}$$

3. On a clairement le fait que $(B_k)_{k=n}^{N}$ soit un système complet d'évènements ; d'où :

$$\sum_{k=n}^{N} P(B_k) = 1$$

En remplaçant sa valeur, il nous vient :

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{\left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)} = 1$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{k=n}^{N} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)$$

★★☆ Exercice 13 : inégalité de Boole et application

1. Montrer l'inégalité de Boole :

$$\forall n \geq 1,\ P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

2. Montrer alors que :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A_k})$$

puis :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1)$$

3. En déduire que, si trois évènements A, B, C sont équiprobables, de même probabilité p et vérifiant $P(A \cap B \cap C) = 0$ alors $p \leq \dfrac{2}{3}$.

4. On suppose à présent que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge. Montrer alors l'inégalité de Boole infinie :

$$P\Big(\bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=m}^{+\infty} P(A_k)$$

1. Procédons par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, le résultat est trivial.
Supposons la formule vraie à l'ordre n fixé dans $\mathbb{N}^*$.
On a :

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1}\Big)$$
$$= P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\Big)$$

par le crible de Poincaré.
Comme une probabilité est positive, on a déjà :

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + P(A_{n+1})$$

Ensuite, par hypothèse de récurrence, on a :

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k)$$

La récurrence est établie.

2. Avec les lois de De Morgan :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) &= 1 - P\Big(\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}\Big) \\ &= 1 - P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Boole, il vient :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A_k})$$

Ensuite, on peut écrire :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} (1 - P(A_k))$$

D'où :

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geq 1 - n + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. On applique l'inégalité de Boole aux évènements $\overline{A}, \overline{B}$ et $\overline{C}$:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \leq P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

Or, d'après les lois de De Morgan, on peut affirmer que :

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) \leq P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

Les évènements (et donc les complémentaires) étant équiprobables (et on a $P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$), on extrait :

$$1 \leq 3(1-p) \text{ soit } p \leq \frac{2}{3}$$

4. Par le corollaire du théorème de la limite monotone, on a :

$$P\Big(\bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=m}^{n} A_k\Big)$$

Or, par la question 1., on a :

$$P\Big(\bigcup_{k=m}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=m}^{n} P(A_k)$$

En passant à la limite sur n, comme tous les termes convergent, on a :

$$P\Big(\bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=m}^{+\infty} P(A_k)$$

★★☆ Exercice 14 : ajout d'une boule de la même couleur que celle tirée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire.
On effectue n tirages selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée avant le tirage suivant.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au 2e tirage.
2. Soit l'évènement A_n : « on n'obtient que des boules noires lors des n tirages » .
   Calculer la probabilité $P(A_n)$.
3. Soit C_n l'évènement : « on obtient exactement une boule blanche au cours des n tirages » .
   Calculer la probabilité $P(C_n)$.
4. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note l'évènement T_k : « on obtient la 1re boule blanche au k-ème tirage » .
   (a) Calculer $P(T_k)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.
   (b) Vérifier alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(T_k) + P(A_n) = 1$.

1. On parle du second tirage mais encore faut-il savoir ce que l'on a eu au 1er tirage.
   Avec le système complet d'évènements (B_1, N_1), on a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P_{B_1}(B_2)P(B_1) + P_{N_1}(B_2)P(N_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   vu que l'on ajoute une boule de la même couleur que celle tirée.

2. On a l'écriture :

$$P(A_n) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_n)$$

Avec la formule des probabilités composées ($N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \neq \emptyset$) :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(N_1)P_{N_1}(N_2) \times \cdots \times P_{N_1 \cdots N_{n-1}}(N_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

vu qu'on ajoute une boule noire à chaque tirage (après $n-1$ tirages il y a donc $n-1+1=n$ boules noires et 1 boule blanche).

3. L'évènement C_n se décompose alors sous cette forme :

$$C_n = B_1 N_2 \cdots N_n \cup N_1 B_2 N_3 \cdots N_n \cup \cdots \cup N_1 \cdots N_{n-1} B_n$$

(on a placé la seule boule blanche sur l'une des n places)
Par incompatibilité :

$$P(C_n) = P(B_1 N_2 \cdots N_n) + P(N_1 B_2 N_3 \cdots N_n) + \cdots + P(N_1 \cdots N_{n-1} B_n)$$

Calculons la 1re probabilité par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(B_1 N_2 \cdots N_n) &= P(B_1)P_{B_1}(N_2) \times \cdots \times P_{B_1 N_2 \cdots N_{n-1}}(N_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n+1} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n} \end{aligned}$$

Ensuite, il est nécessaire de remarquer que toutes les probabilités sont égales car les fractions que l'on va écrire à travers les formules des probabilités composées sont les mêmes (les dénominateurs vont augmenter de la même manière : $+1$ à chaque fois, les numérateurs vont être les mêmes à un ordre près).
Dès lors, on a :

$$P(C_n) = n \times \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n+1}$$

4. (a) On a l'écriture pour $1 \leq k \leq n$:

$$P(T_k) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$