

Maurice **Chossat**
Yannick **Privat**

AIDE-MÉMOIRE

Mathématiques de l'ingénieur

4^e édition

DUNOD

Illustration de couverture :
© belchonoksun – 123rf.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
	

© Dunod, 2001, 2010, 2012, 2017
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
978-2-10-076497-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie A : Algèbre et géométrie 1

1. Arithmétique, algèbre et trigonométrie 3

1.1	Symboles usuels de l'algèbre	3
1.2	Structures algébriques	4
1.3	Calculs dans l'ensemble des nombres réels	6
1.4	Numération binaire	10
1.5	Algèbre de la logique ou algèbre de Boole	13
1.6	Analyse combinatoire	15
1.7	Équations algébriques	18
1.8	Déterminants, systèmes linéaires et matrices	24
1.9	Fonctions usuelles simples	40
1.10	Croissance et limites	46
1.11	Nombres complexes ou imaginaires	49
1.12	Trigonométrie	50
1.13	Séries	61

2. Calcul vectoriel et calcul tensoriel 77

2.1	Calcul vectoriel	77
2.2	Vecteurs glissants. Moments	81
2.3	Analyse vectorielle	84
2.4	Calcul tensoriel	90

3. Géométrie 97

3.1	Birapport, critère de cocyclicité	97
3.2	Géométrie et formules du triangle	98
3.3	Géométrie analytique	106

3.4	Propriétés métriques des courbes planes	117
3.5	Courbes en coordonnées polaires $r = f(\theta)$	119
3.6	Problèmes relatifs au cercle	121
3.7	Coniques	124
3.8	Géométrie dans l'espace	138

Partie B : Analyse et probabilités **163**

4. Éléments d'analyse **165**

4.1	Dérivées et différentielles	165
4.2	Intégrales	174
4.3	Équations différentielles	213
4.4	Équations intégrales	225
4.5	Calcul des variations	228

5. Analyse numérique **231**

5.1	Dérivation numérique, différences finies	231
5.2	Calcul approché des intégrales définies	234
5.3	Polynômes d'interpolation de Lagrange	238
5.4	Résolution numérique d'équations non linéaires	239
5.5	Méthodes numériques de résolution des équations différentielles	246
5.6	Optimisation dans $\mathbb{R}^n$	249
5.7	Calcul numérique de valeurs propres et de vecteurs propres	262

6. Fonctions diverses **267**

6.1	Intégrales de Fresnel	267
6.2	Sinus intégral et cosinus intégral	268
6.3	Fonction Θ ou fonction d'erreur et fonction π	269

6.4	Fonctions eulériennes	270
6.5	Fonction hypergéométrique	274
6.6	Fonctions de Bessel	275
6.7	Série et polynômes de Legendre	283
6.8	Fonction de Weber-Hermite	285
6.9	Polynômes de Tchebycheff	288
6.10	Polynômes de Laguerre	291
7.	Algèbre des transformations	293
7.1	Transformation de Laplace	293
7.2	Transformation de Fourier	313
7.3	Transformation de Mellin	315
8.	Probabilités et statistiques	319
8.1	Probabilités	319
8.2	Éléments de statistiques	341
8.3	Simulation de variables aléatoires réelles et méthode de Monte-Carlo	353
Index		356

A

Algèbre et géométrie

1

Arithmétique, algèbre et trigonométrie

1.1 Symboles usuels de l'algèbre

Symboles	Symboles dits quantificateurs
$\forall$	signifie « quel que soit » ; par exemple $\forall a \in E$, quel que soit a appartenant à E .
$\exists$	signifie « il existe » ; par exemple $\exists a \in E$, il existe a appartenant à E , tel que
$a \in E$	a est un élément de l'ensemble E .
$a \notin E$	a n'appartient pas à E .
$\begin{cases} E \supset F \\ F \subset E \end{cases}$	Symbole de l' <i>inclusion</i> signifiant que F est un sous-ensemble de E , c'est-à-dire contenu dans E et pouvant être E lui-même.
$\emptyset$	Ensemble <i>vide</i> .
$E \cap F$	<i>Intersection</i> de E et de F ; ensemble des éléments communs à E et à F .
$E \cup F$	<i>Réunion</i> de E de F ; ensemble des éléments appartenant soit à E , soit à F , soit à leur intersection.
$\complement_A$	<i>Complémentaire</i> de A sous-ensemble de E ; on a $A \cap \complement_A = \emptyset$.
$a \top b = c$	Relation exprimant que c est le résultat de l'opération interne effectuée sur a et b éléments de E . On trouve aussi : $a \perp b$; $a * b$; $a + b$; $a . b$.
$a \top e = e \top a = a$	e est l'élément <i>neutre</i> de l'opération $\top$.
$a \top a' = e$	a et a' sont des éléments <i>symétriques</i> dans l'opération $\top$.

aRb	a et b satisfont à une <i>relation binaire</i> désignée par R .
$y \rightarrow f(x)$	x élément de E s'applique sur y , élément de F .
$y \Leftrightarrow f(x)$	L'application est <i>bijective</i> .
$f \circ g$	application composée signifiant $y \rightarrow f[g(x)]$; ne pas confondre avec $g \circ f$ signifiant $y \rightarrow g[f(x)]$.
a modulo n	signifie $a + Kn$, quel que soit K entier relatif.
$ a $	valeur absolue ou module de a .

1.2 Structures algébriques

A) Groupe

Groupe

Ensemble G non vide possédant une loi de composition interne satisfaisant aux axiomes suivants :

- 1° $\forall a, b, c \in G : (a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ (associativité),
- 2° $\exists e \in G, \forall a : a \top e = e \top a = a$ (e , élément neutre),
- 3° $\forall a \in G, \exists a' : a' \top a = a \top a' = e$ (a' , symétrique).

► Groupe *abélien* : $\forall a, b \in G : a \top b = b \top a$ (commutativité).

Propriétés

- $\forall a, b, c \in G, a \top c = b \top c \Rightarrow a = b, c \top a = c \top b \Rightarrow a = b$ (tout élément est régulier) ;
- $\forall a, b \in G, \exists x \in G$ tel que $a \top x = b : x = a' \top b$
et $x \top a = b : x = b \top a'$.
- Sous-groupe : $G' \subset G$ est un sous-groupe de G si $\forall a, b \in G' : a \top b' \in G'$ (b' symétrique de b dans G).

B) Anneau

Anneau

Ensemble A muni de deux lois de composition interne satisfaisant aux axiomes suivants :

I. A est un groupe abélien pour la première loi (addition) :

$$1^\circ \forall a, b, c \in A : (a + b) + c = a + (b + c) ;$$

$$2^\circ \exists 0 \in A, \forall a : a + 0 = 0 + a = a ;$$

$$3^\circ \forall a \in A, \exists (-a) : a + (-a) = (-a) + a = 0 ;$$

$$4^\circ \forall a, b \in A : a + b = b + a.$$

II. $\forall a, b, c \in A : (ab) c = a(bc)$ (associativité de la multiplication).

III. $\forall a, b, c \in A : a(b + c) = ab + ac, (a + b) c = ac + bc$ (distributivité).

- ▶ Anneau unitaire : $\exists e \in A, \forall a : ea = ae = e$
(e , élément neutre pour la deuxième loi, appelé unité).
- ▶ Anneau intègre : $\forall a \neq 0, \forall b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ (pas de diviseurs de zéro).

Propriétés

$$\forall a, b : (-a) b = a(-b) = (-ab), \forall a : a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

C) Corps

Corps

Ensemble K muni de deux lois de composition interne satisfaisant aux axiomes suivants :

I. K est un groupe abélien pour la première loi (addition).

$$1^\circ \forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$2^\circ \exists 0 \in K, \forall a : a + 0 = 0 + a = a,$$

$$3^\circ \forall a \in K, \exists (-a) : a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

$$4^\circ \forall a, b \in K : a + b = b + a.$$

II. K (privé de 0) est un groupe pour la deuxième loi (multiplication).

$$1^\circ \forall a, b, c \in K : (ab) c = a(bc),$$

$$2^\circ \exists e \in K, \forall a : ea = ae = a,$$

$$3^\circ \forall a \neq 0, \exists a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1} a = e,$$

$$\text{III. } \forall a, b, c \in K : a(b + c) = ab + ac, (a + b) c = ac + bc.$$

Corps commutatif (ou droit) : la deuxième loi est commutative.

1.3 Calculs dans l'ensemble des nombres réels

1.3.1 Exposants et radicaux

Exposants : p, q entiers positifs, négatifs ou nuls, a et b réels différents de 0

$$a^0 = 1, \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \quad a^p a^q = a^{p+q},$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Radicaux : n, q entier positifs, p entier relatif, a et b réels

$$\sqrt[q]{a} = b \Leftrightarrow a = b^q, \quad \sqrt[nq]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}}$$

$$\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^m.$$

m, m' rationnels, a et b réels positifs

$$a^m a^{m'} = a^{m+m'}, \quad (a^m)^{m'} = a^{mm'}, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

$$(ab)^m = a^m b^m, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

1.3.2 Identités usuelles

- ▶ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- ▶ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- ▶ $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- ▶ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

- ▶ $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$
- ▶ $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^3 + 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 a_j + 6 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k$
- ▶ $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{p!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n},$

où la sommation est étendue à tout ensemble d'entiers $k_1, \dots, k_n$ positifs ou nuls tels que $k_1 + \dots + k_n = p$.

Formule des anneaux :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^p x^{n-p-1} + \dots + a^{n-1}).$$

Identité de Lagrange :

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \\ = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2. \end{aligned}$$

Théorème de Bezout. – Si 2 polynômes A et B sont premiers entre eux, il existe un polynôme u de degré $<$ à celui de B et un polynôme v de degré $<$ A tels que l'on ait $Au + Bv = 1$.

1.3.3 Sommations usuelles

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

a = premier terme, r = raison, n = nombre de termes.

$$\begin{aligned} \text{Somme des } n \text{ premiers termes } S &= a + (a + r) + \dots + (a + (n - 1)r) \\ &= \frac{[2a + (n - 1)r]n}{2}. \end{aligned}$$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

q = raison, a = premier terme

$$\begin{aligned} \text{Somme des } n \text{ premiers termes } S &= a + aq + \dots + aq^{n-1} \\ &= a \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Limite de S quand $q < 1$ et $n \rightarrow \infty$:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Produit des n premiers termes :

$$P = \sqrt[n]{(al)^n} = (al)^{\frac{n}{2}}.$$

Sommations sur nombres entiers

- Somme des n premiers nombres entiers :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Somme des carrés des n premiers nombres entiers :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Somme des cubes des n premiers nombres entiers :

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (S_1)^2.$$

- Somme des quatrième puissances des n premiers nombres entiers :

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

- Somme des nombres impairs :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

- Somme des nombres pairs :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2 S_1 = n(n+1).$$

- Somme des carrés des nombres impairs :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

- Somme des carrés des nombres pairs :

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

- Somme des cubes des nombres impairs :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

- Somme des cubes des nombres pairs :

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

- Sommes tirées de la relation :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (\text{progression géométrique}).$$

Dérivons :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Faisons $x = \frac{1}{2}$ puis divisons l'égalité obtenue par 2 :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 \left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

En dérivant encore une fois, on a :

$$\begin{aligned} 2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} &= \frac{d}{dx} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2x^n(x^2 - 1) + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

En faisant $x = \frac{1}{2}$ et en multipliant par $\frac{1}{2^2}$, on a :

$$\frac{2}{2^2} + \frac{2.3}{2^3} + \frac{3.4}{2^4} + \dots + \frac{n(n-1)}{2^n} = 2^2 - \frac{n^2 + 3n - 4}{2^n}.$$

- **Sommations de la forme $S = \sum n(n-1)$.**

$$S_{12} = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3},$$

$$S_{123} = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-2)(n-1)n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4},$$

$$S_{12\dots k} = \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-k+1)}{k+1}.$$

- **Sommations de la forme $S = \sum \frac{1}{n(n-1)}$**

$$S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \sum \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

$$S_2 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2} \frac{n^2 - n - 2}{2n^2 - 2n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)}$$

1.4 Numération binaire

En numération binaire il n'y a que 2 signes (que l'on désigne généralement par 0 et 1). Tout nombre, en numération binaire, s'exprime par une suite de termes formés de 0 et de 1 qui, multipliés par les puissances de 2 successives, donnent la représentation décimale du nombre.

Exemple

$$\begin{aligned} 23 &= 16 + 4 + 2 + 1 \\ &= 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 10111. \end{aligned}$$

Pour transformer en binaire un nombre exprimé en décimal, il faut commencer par diviser ce nombre par la plus haute puissance de 2 y contenue, diviser le reste par la plus haute puissance de 2 contenue dans ce reste, etc.

Puissance de 2

$2^0 =$	1
$2^1 =$	2
$2^2 =$	4
$2^3 =$	8
$2^4 =$	16
$2^5 =$	32
$2^6 =$	64
$2^7 =$	128
$2^8 =$	256
$2^9 =$	512
$2^{10} =$	1 024
$2^{11} =$	2 048
$2^{12} =$	4 096
$2^{13} =$	8 192
Etc.	

Exemple

Transformer 365 en numération binaire.

La plus haute puissance de 2 contenue :

dans 365 est $256 = 2^8$, reste 109 ;

dans 109 est $64 = 2^6$, reste 45 ;

dans 45 est $32 = 2^5$, reste 13 ;

dans 13 est $8 = 2^3$, reste 5 ;

dans 5 est $4 = 2^2$, reste 1 ;

dans 1 est $1 = 2^0$, reste 0 ;

$$\begin{aligned} 365 &= 2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 1 + 2^5 \times 1 + 2^4 \times 0 \\ &\quad + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1 \\ &= 101101101. \end{aligned}$$

Inversement pour transformer un nombre du binaire en décimal, il faut additionner les puissances de 2 matérialisées par le rang du symbole 1.

Exemple

Transformer $1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 4 + 16 + 64 = 84$.

Le nombre de signes N utilisé en numération binaire est pour exprimer un même nombre de n chiffres en décimal,

$$N = \frac{n}{\log_2 10} = \frac{n}{0,301\ 03}.$$

Ainsi, un nombre de 9 chiffres en décimal exigera 30 signes en binaire.

Opérations en numération binaire

Table d'addition :

0	1
0	1
1	0

avec report de 1 à la colonne suivante pour l'addition $1 + 1 = 10$.

Addition de 2 nombres

Se fait comme en décimal, en additionnant les chiffres de même rang en commençant par la droite. Quand on a 2 fois 1 le résultat est 0 et on reporte 1 à la colonne suivante.

Exemple

Additionner $27 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1$ et $13 = 1\ 1\ 0\ 1$.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 = 32 + 8 = 40. \end{array}$$

Addition de plusieurs nombres. – Il faut procéder par récurrence, additionner les 2 premiers, ajouter le troisième à la somme obtenue, etc.

Soustraction — Méthode par complémentation

Dans le chiffre à soustraire on remplace les 1 par 0 et vice versa ; on additionne avec le premier nombre ; on supprime le premier 1 sur la gauche et on ajoute 1 au résultat obtenu.

Exemple

$$83 - 42 = 41.$$

$$83 = 1010011$$

$$42 = 101010; \quad \text{complément} \quad 010101.$$

Opération :

$$\begin{array}{r} 1010011 \\ 010101 \\ \hline 1101000 \\ 1 \\ \hline 101001 \end{array}$$

$$101001 = 32 + 8 + 1 = 41.$$

Multiplication — Table de multiplication

$$\begin{array}{r} \text{Multiplicande} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \text{Multiplicateur} \rightarrow \end{array}$$

autrement dit : $1 \times 1 = 1$. Tous les autres cas donnent 0. La multiplication s'opère comme en décimal. Tous les produits partiels sont 0 ou le multiplicande.

Additionner les produits partiels successivement.