MATHS APPROFONDIES INFORMATIQUE

ECG-2

Christophe FISZKA

- Le cours détaillé
- Plus de 460 exercices avec indications et solutions
- Les méthodes et pièges à éviter
- Le cours et travaux pratiques en Python

ellipses

MATHS APPROFONDIES INFORMATIQUE

ECG-2

Christophe FISZKA
Professeur agrégé en ECG2, lycée Saint-Louis (Paris VI^{e})

avec la collaboration d'anciens étudiants du lycée Saint-Louis :

CHATELAIN Constance
Étudiante à HEC

CHEVALLIER Manon
Étudiante à l'ESCP

COMMELIN Quentin
Étudiant à l'ESSEC

ESSAYEM Nabil
Étudiant à l'ESSEC

GABRION Claire
Diplômée ESCP-ENSAE

HEBERT Clément
Étudiant à HEC

NERY Justine
Étudiante à l'ESCP

POURQUERY Alexandre
Étudiant à HEC

SILVA–ROMALDI Paolo
Étudiant à l'ESSEC

ellipses

Du même auteur, chez le même éditeur

Retrouvez les titres du même auteur et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



Remerciements

Ce livre est issu du cours de mathématiques ECG2 donné au lycée Saint-Louis. Je remercie mes étudiants pour leurs questions et leurs remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer la pertinence de cet ouvrage. Je tiens aussi à remercier mes collègues et amis qui, à travers nos discussions, leurs conseils, leurs idées, ont contribué à son écriture. Merci aussi aux éditions Ellipses qui m'ont accompagné pour ce cinquième livre.

Merci à mes proches pour leur soutien, à ma compagne Sarah et à nos deux «petites choses», Raphaël et Noé, qui par leur seule présence nous comblent de bonheur.

L'auteur reversera ses droits d'auteur à l'association *Science ouverte* qui se fixe comme objectif « d'ouvrir les jeunes aux sciences et les sciences aux jeunes » dans son département d'origine, la Seine-Saint-Denis.

Christophe Fiszka

ISBN 9782340-094277
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

L'ouvrage est spécialement conçu pour les étudiants de seconde année de classes préparatoires ECG, option mathématiques approfondies. Il permet d'aborder tout le programme de mathématiques et d'informatique et d'acquérir les bases nécessaires pour les concours.

Par la grande variété d'exercices et par le soin apporté aux illustrations, cet ouvrage convient à tous les étudiants quel que soit leur niveau.

Chaque chapitre se compose :

- D'un cours détaillé avec les définitions, théorèmes et preuves. Le cours est complété par :
  - → des exercices d'application directe,
  - → des points méthodes,
  - → des rappels des pièges à éviter.

- D'exercices d'approfondissement afin de mettre en pratique les différentes notions du chapitre et faire le lien avec les chapitres précédents.
Les niveaux de difficulté sont repérés par les symboles ✧, ✦, ✦✦, ✦✦✦.
Les symboles ✎ et 🔧 font respectivement référence à des exercices très classiques à maîtriser et aux indications.

- Le chapitre se conclut par les indications, les solutions des exercices d'application, des exercices d'approfondissement et des problèmes longs.

Le dernier chapitre est spécialement dédié à l'informatique.
Même s'il est conseillé de télécharger Python, la majorité des exercices ne nécessite pas l'utilisation d'un ordinateur. Dans le cas contraire, la question est repérée par le pictogramme 💻

Bonne lecture !

Sommaire

PREMIER SEMESTRE

1. Rappels et compléments d'algèbre linéaire 9
2. Valeurs propres et vecteurs propres 57
3. Diagonalisation 91
4. Algèbre bilinéaire 123
5. Fonctions de plusieurs variables 165
6. Révisions et compléments sur les variables aléatoires 199
7. Variables aléatoires à densité 249
8. Vecteurs aléatoires 299
9. Compléments sur les variables aléatoires à densité 329

SECOND SEMESTRE

10. Endomorphismes symétriques et projections orthogonales 359
11. Convergences et approximations 397
12. Estimations 435
13. Compléments sur les fonctions de plusieurs variables 463
14. Optimisation sous contraintes linéaires 499

INFORMATIQUE

15. Informatique 523

Partie 1

PREMIER SEMESTRE

CHAPITRE 1

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes. [a]

GOETHE

Écrivain allemand (1749-1832)

a. Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

Ce chapitre reprend le cours de première année en algèbre linéaire. La dernière partie complète ces rappels avec les notions de trace d'une matrice, de matrices semblables et de matrices de passage avec la formule de changement de bases.

1 Les espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de deux lois « + » et « · » telles que :
- E est stable par multiplication à gauche par un nombre : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $\lambda \cdot u \in E$.
- E est stable par somme : $\forall u \in E$, $\forall v \in E$, $u + v \in E$.
- Il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « + » et « · ».

Par exemple :

→ $\forall u \in E, \quad 0 \cdot u = 0_E$ (le vecteur nul).

→ $\forall u \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$

→ $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$

→ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E.$

→ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in E^2 :$
$$\begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \quad \text{alors} \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v. \\ \text{Si } u \neq 0_E \quad \text{alors} \quad \lambda \cdot u = \mu \cdot u \Rightarrow \lambda = \mu. \end{cases}$$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

Exemples de référence.

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel avec les lois + et $\cdot$ définies par
$\forall\, u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$u + v = (x_1 + y_1\,,\, x_2 + y_2\,, \dots\,,\, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda \times x_1 \dots, \lambda \times x_n).$$

- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
- Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.
- L'ensemble $\mathscr{A}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION (RAPPEL) — **combinaison linéaire**

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ *une famille finie de vecteurs de* E.
On appelle ***combinaison linéaire*** *des vecteurs* $u_1, \dots, u_n$, *tout vecteur* v *s'écrivant*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \quad \textit{avec pour tout } i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On définit ensuite les sous-espaces vectoriels comme les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

DÉFINITION (RAPPEL) — **sous-espaces vectoriels**

Soient E *un espace vectoriel et* F *une partie de* E. F *est un* ***sous-espace vectoriel*** *de* E *si*

- F *est non vide.*
- F *est stable par somme, c'est-à-dire :* $\forall\, (u, v) \in \mathrm{F}^2, \quad u + v \in \mathrm{F}.$
- F *est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire :* $\forall\, u \in \mathrm{F}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \cdot u \in \mathrm{F}.$

Méthodes.

- Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F, $\lambda \cdot u + v \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \neq \varnothing$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F, le plus simple étant 0_{E}.
- De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$...)

PROPOSITION (RAPPEL) — **intersection de sous-espaces**

Soient F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors l'intersection* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

⚠ **Attention.** En général, c'est faux pour la réunion.

DÉFINITION (RAPPEL) **sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**

Soient E *un espace vectoriel et* X *une partie finie de* E.
L'espace vectoriel engendré par X *est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* X. *On le note* Vect(X). *Autrement dit, si* $X = \{u_1, \dots, u_n\}$, *alors*

$$\mathrm{Vect}(X) = \left\{ v \in E \;\middle|\; \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Remarques.
• Comme son nom l'indique, Vect(X) est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il contient le vecteur nul.
• Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**. Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.

Familles génératrices, libres et bases

DÉFINITION (RAPPEL) **famille libre finie**

Soit E *un espace vectoriel, on dit que la famille* $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ *de vecteurs de* E *est une* ***famille libre*** *si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [\![1, m]\!], \quad \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non colinéaires.

Exemple. Dans les cas des polynômes : une famille finie $(Q_1, \dots, Q_r)$ de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$0 \leqslant \deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_r).$$

Exercice 1. ✦ **Exemples**

1. Dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est libre où

$$\varepsilon_1 = (3, -1, 1, 0), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, -1, 0), \quad \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1).$$

2. À quelle condition sur le polynôme P, la famille $\left(P^{(k)}\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$?

3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Justifier que la famille (A, B, C, D) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Que dire de la liberté de la famille (A, B, C, D, I_2) ?

4. ✦✦ Dans les espaces fonctionnels. Étudier la liberté des familles suivantes.

a) La famille $\mathscr{F} = \left(\tan, \tan^2, \ldots, \tan^n\right)$ dans $\mathscr{A}\left(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}\right)$.

b) La famille $\left(f_i\right)_{i\in[\![0;n]\!]}$ où $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto |x-i| \in \mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

DÉFINITION (RAPPEL) — **famille génératrice finie**

Soit $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{G}$ est une ***famille génératrice*** *de* E, *si tout vecteur de* E *peut s'obtenir par combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathscr{G}$. Autrement dit si,*

$$\text{Pour tout vecteur } v \in \mathrm{E}, \text{ il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, $\mathscr{G}$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathrm{E}$.

Exercice 2



✦ Dans chacun des cas, donner une famille génératrice de l'espace vectoriel.

1. $\mathrm{F} = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z\right\}$.

2. G : l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n de degré impair.

3. H : l'espace des matrices symétriques de taille 3.

p. 38

DÉFINITION (RAPPEL) — **base**

On appelle ***base*** *d'un espace vectoriel* E, *toute famille libre et génératrice de* E.

Exemples. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

- La famille $(e_i)_{i=1,\cdots n}$ où $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 en i-ème position est une base de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i, j).

PROPOSITION (RAPPEL) — **coordonnées d'un vecteur dans une base**

Soient E *un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de* E. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *La famille $\mathscr{B}$ est une base de* E.

ii) *Pour tout vecteur v de* E,
il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i$.

Dans ce cas, $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les ***coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$****.*

1.2 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

DÉFINITION (RAPPEL) **somme de sous-espaces, somme directe**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
- ***Le sous-espace somme*** *est défini par* $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\left\{u+v \,\middle|\, (u,v)\in \mathrm{F}\times\mathrm{G}\right\}$.
- *On dit que* F *et* G *sont en* ***somme directe****, notée* $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$*, si* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_\mathrm{E}\}$.

Remarques.
- F + G est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G.
- On montre l'équivalence entre F et G sont en somme directe et

$$\forall\, u\in \mathrm{F},\quad v\in \mathrm{G},\qquad u+v=0_\mathrm{E}\quad\Rightarrow\quad u=v=0_\mathrm{E}.$$

PROPOSITION (RAPPEL) **unicité de la décomposition**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *Les sous-espaces* F *et* G *sont en somme directe.*

ii) *Tout vecteur* $u\in \mathrm{F}+\mathrm{G}$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*
$$u=u_\mathrm{F}+u_\mathrm{G}\quad \textit{avec}\quad u_\mathrm{F}\in \mathrm{F},\quad u_\mathrm{G}\in \mathrm{G}.$$

DÉFINITION (RAPPEL) **supplémentaire**

Soient E *un espace vectoriel et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
On dit que F *et* G *sont* ***supplémentaires*** *si tout vecteur de* E *se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G. *C'est-à-dire*

$$\forall\, w\in \mathrm{E},\quad \exists!\,(u,v)\in \mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad w=u+v.$$

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire et il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. Le raisonnement par analyse-synthèse est particulièrement adapté à cette définition.

Exercice 3



✦✦ **Exemples**

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\right\}$, $u_1=(1,0,0)$ et $u_2=(1,1,1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. ✎ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. p. 38
   Posons $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille (n,n). Justifier que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires.
   Rappels : A *est symétrique si* ${}^t\mathrm{A}=\mathrm{A}$*, antisymétrique si* ${}^t\mathrm{A}=-\mathrm{A}$.

PROPOSITION (RAPPEL) **caractérisation des supplémentaires**

Soient E *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *Les sous-espaces* F *et* G *sont supplémentaires.*

ii) $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $F + G = E$.

On a donc : F *et* G *sont supplémentaires si et seulement si* $F \oplus G = E$.

1.3 Rappels : précisions en dimension finie

Lorsqu'un espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E.

Exercice 4



✧ ✎ Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+b+c+d = 0 \right\},$$

$$E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P'(1) = 0\} \quad \text{et} \quad E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}.$$

p. 39

PROPOSITION (RAPPEL) **cardinal d'une famille libre/génératrice**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathscr{L}$, $\mathscr{G}$ *deux familles de* E.

Si — *La famille* $\mathscr{L}$ *est libre.*
— *La famille* $\mathscr{G}$ *est génératrice de* E.

Alors $\text{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \dim(E)$ *et* $\dim(E) \leqslant \text{Card}(\mathscr{G})$.

Remarque. La preuve du premier point est basée sur le *théorème de la base incomplète*. En dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E. Pour le second point, on montre que l'on peut extraire une base de E de n'importe qu'elle famille génératrice de E.

PROPOSITION (RAPPEL) **cas d'égalité**

Soit E *un espace de dimension finie.*

- *Une famille libre* $\mathscr{L}$ *de cardinal* $\dim(E)$ *est une base.*
- *Une famille génératrice* $\mathscr{G}$ *de cardinal* $\dim(E)$ *est une base.*

PROPOSITION (RAPPEL) — **existence d'un supplémentaire**

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de* E *admet un supplémentaire.*

Remarque. Concaténation de bases
Soient $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G. On montre que si F et G sont en somme directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $F \oplus G$. En particulier, on en déduit que

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

THÉORÈME (RAPPEL) — **formule de Grassmann**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors,*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

PROPOSITION (RAPPEL) — **caractérisation des supplémentaires**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
Les trois énoncés suivants sont équivalents.

i) F *et* G *sont supplémentaires.* **ii)** $F + G = E$ *et* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

iii) $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exercice 5



✦✦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $u = (a_1, a_2 \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$F = \mathrm{Vect}(u) \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}.$$

p. 40

1. F et G sont des s.e.v de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces vectoriels F et G lorsque $u = (1, 1)$.

1.4 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels

Sommes de sous-espaces vectoriels

DÉFINITION — **somme de s.e.v**

Soient $F_1, \dots, F_p$, *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E.

On appelle ***somme*** *de* $F_1, \dots, F_p$, *l'ensemble* $\sum_{i=1}^{p} F_i = \{ u_1 + \cdots + u_p \mid \forall\, i \in [\![1; p]\!],\ u_i \in F_i \}$.

Exemples.

• Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Notons $\mathscr{T}^+$, $\mathscr{T}^-$ et $\mathscr{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n,n). Ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{T}^+ + \mathscr{T}^- + \mathscr{D}$. En effet, pour $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in\mathscr{T}^+} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in\mathscr{T}^-} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\in\mathscr{D}}.$$

• Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right) = \mathrm{Vect}(e_1) + \mathrm{Vect}(e_2) + \ldots + \mathrm{Vect}(e_p).$$

Exercice 6



✧ Soient $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H, un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{F}_i \subset \mathrm{H}$. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \subset \mathrm{H}$.

p. 40

PROPOSITION — **somme et dimension**

Soient $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$, *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E.
Si *les* F_i *sont tous de dimension finie,* ***alors*** $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ *est aussi de dimension finie avec*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{F}_i\right).$$

Preuve. Rappelons que, d'après la formule de Grassmann, pour F, G deux s.e.v de E de dimension finie

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) \leqslant \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) \qquad \text{car} \quad \dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) \geqslant 0.$$

La proposition s'en déduit par récurrence. ■

Sommes directes, généralisation à p sous-espaces vectoriels

DÉFINITION — **somme directe**

La somme de p sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ *d'un espace vectoriel* E *est dite* ***directe*** *si*

$$\forall\, (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p, \qquad u_1 + \cdots + u_p = 0_{\mathrm{E}} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \cdots = u_p = 0_{\mathrm{E}}.$$

La somme directe des s.e.v $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ *est notée* $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_p$.

Exemples.

- En reprenant l'exemple précédent, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^- \oplus \mathcal{D}$.
- Si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur de E non nul alors la somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe si et seulement si la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre.

Preuve. Raisonnons par double implication.

$(\Rightarrow)$ Supposons la famille libre. La somme est directe. Soit $(u_1, u_2, \ldots u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0_\mathrm{E}$. Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $u_1 = \lambda_1 e_1$, $u_2 = \lambda_2 e_2$, …, $u_p = \lambda_p e_p$. On a donc

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p = 0_\mathrm{E}.$$

Comme la famille est libre, chaque λ_i vaut 0, $u_i = \lambda_i e_i = 0_\mathrm{E}$. La somme est directe.

$(\Leftarrow)$ Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\underbrace{\lambda_1 e_1}_{\in \mathrm{F}_1} + \underbrace{\lambda_2 e_2}_{\in \mathrm{F}_2} + \cdots + \underbrace{\lambda_p u_p}_{\in \mathrm{F}_p} = 0_\mathrm{E}$.

Si la somme est directe, chaque $\lambda_i e_i$ vaut 0_E. Comme $e_i \neq 0_\mathrm{E}$, on a $\lambda_i = 0$. La famille est libre.

■

Exercice 7



✦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0_\mathrm{E}\}, \quad \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_\mathrm{E}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_\mathrm{E}\}.$$

p. 40

A-t-on nécessairement $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_3$?

PROPOSITION — **somme directe et unicité**

Soient $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *On a équivalence entre :*

i) *La somme* $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ *est directe.*

ii) *Tout vecteur de* $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_p$ *s'écrit d'une manière unique comme somme de vecteurs de* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$. *Autrement dit,*

$$\forall\, u \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_p, \qquad \exists!\, (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_p \quad u = u_1 + u_2 + \ldots + u_p.$$

Preuve. Raisonnons par double implication.

$(\Rightarrow)$ Supposons **i)**. Soit $u \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_p$. Par définition de la somme, u se décompose comme somme de vecteurs des F_i. Justifions l'unicité de la décomposition.

Soient $u_1 \in \mathrm{F}_1$, $v_1 \in \mathrm{F}_1$, $u_2 \in \mathrm{F}_2$, $v_2 \in \mathrm{F}_2$, …, $u_p \in \mathrm{F}_p$, $v_p \in \mathrm{F}_p$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} u_i = \sum_{i=1}^{p} v_i$.

Par linéarité de la somme $\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(u_i - v_i)}_{\in \mathrm{F}_i} = \sum_{i=1}^{p} u_i - \sum_{i=1}^{p} v_i = u - u = 0_\mathrm{E}$.

Par définition de la somme directe, pour tout indice i, $u_i - v_i = 0_\mathrm{E}$, puis $u_i = v_i$. Ceci prouve l'unicité de l'énoncé **ii)**.

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons **ii)**. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_p$ tels que $0_\mathrm{E} = u = \sum_{i=1}^{p} u_i$. On a donc

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1 & + & u_2 & + & \dots & + & u_p & = & 0_E \\ \underbrace{0_E}_{\in F_1} & + & \underbrace{0_E}_{\in F_2} & + & \dots & + & \underbrace{0_E}_{\in F_p} & = & 0_E. \end{array}$$

Par unicité de la décomposition, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $u_i = 0_E$. La somme est directe.

■

THÉORÈME — **caractérisation par concaténation de bases**

Soient $F_1, \dots, F_p$ *des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel* E. *Soient* $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \dots, \mathscr{B}_p$ *des bases respectivement de* $F_1, F_2, \dots, F_p$. *On a équivalence entre les énoncés suivants.*

i) *La somme* $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe.*

ii) *La famille* $\mathscr{B}$, *obtenue par concaténation des familles* $\mathscr{B}_i$, *est une base de* $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Preuve. Raisonnons par double implication.

(⇒) Supposons la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ directe. Soit $u \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Le vecteur u s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_p \quad \text{avec} \quad u_i \in F_i.$$

De plus, par définition d'une base, chaque u_i s'écrit de manière unique dans la base $\mathscr{B}_i$. Au final, u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de la famille $\mathscr{B}$. Ceci étant vrai pour tout vecteur u arbitrairement choisi, $\mathscr{B}$ est donc une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

(⇐) Réciproquement, supposons que $\mathscr{B}$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$. Notons

$$\mathscr{B} = \big(\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_{j_1}}_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{de } \mathscr{B}_1}}, \underbrace{e_{j_1+1}, e_{j_1+2} \dots, e_{j_2}}_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{de } \mathscr{B}_2}}, \dots, \underbrace{e_{j_{p-1}+1}, e_{j_{p-1}+2} \dots, e_{j_p}}_{\substack{\text{vecteurs} \\ \text{de } \mathscr{B}_p}}\big).$$

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $u_1 + u_2 + \dots + u_p = 0_E$. Or, pour tout indice i, le vecteur u_i se décompose dans la base $\mathscr{B}_i$ de F_i.

$$\exists (\lambda_k) \in \mathbb{R} \qquad u_i = \sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \lambda_k e_k \qquad \text{(avec la convention } j_0 = 0\text{)}.$$

Puis par somme $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{j_p} \lambda_k e_k = 0_E$. Comme la famille $\mathscr{B} = (e_k)_{k \in [\![1;j_p]\!]}$ est libre, pour chaque indice k, $\lambda_k = 0$, puis pour chaque indice i, $u_i = 0_E$. On a vérifié la définition, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

■

Exercice 8



✦✦ **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F = \{(x,y,z,t) \mid x - y = z + t = 0\}, \quad \begin{cases} G = \text{Vect}(u), & u = (1,0,1,0) \\ H = \text{Vect}(v), & v = (0,1,0,1). \end{cases}$$

p. 40

1. Donner une base de F.
2. Vérifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ à l'aide du théorème précédent.

THÉORÈME **caractérisation en dimension finie**

Soient $F_1, \dots, F_p$ *des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel* E. *On a l'équivalence entre les énoncés suivants.*

i) *La somme* $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe.* **ii)** $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Preuve. Raisonnons de nouveau par double implication.

($\Rightarrow$) Si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe alors la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation de différentes bases de F_i en est une base. Par définition de la dimension :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(F_i\right).$$

L'énoncé **ii)** est prouvé.

($\Leftarrow$) Réciproquement, s'il y a égalité des dimensions.

- La famille $\mathscr{B}$ contient $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right)$ vecteurs.
- Par définition de la somme, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

On sait alors (voir cas d'égalité page 14) que la famille $\mathscr{B}$ est alors une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$. D'après le théorème précédent, on conclut que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe. ■

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

$$\dim\left(\mathscr{T}^+\right) + \dim\left(\mathscr{T}^-\right) + \dim(\mathscr{D}) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = \dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right).$$

Exercice 9



✦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\}, \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$$

$$\text{et} \quad \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3) = \dim(E).$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$?

p. 41

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Définitions et théorèmes

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E, alors pour tout vecteur u de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i.$$

Dans ce cas, $(x_1,\dots,x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$**. On définit la **matrice colonne des coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Généralisation. Soient $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de u_k dans la base $\mathscr{B}$.
On appelle **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, la matrice dont les colonnes sont les matrices coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ s'obtient en concaténant les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille.
On montre que $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

DÉFINITION (RAPPEL) **matrice d'une application linéaire**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}} = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ *deux bases respectives de* E *et* F. ***La matrice de*** $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ***relativement aux bases*** $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ ***et*** $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$, *notée* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\varphi)$, *est la matrice de la famille* $\big(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_p)\big)$ *dans la base* $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ *:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}\big(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_p)\big).$$

Représentation

Notons $(e_1,\cdots,e_p)$ et $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ des bases de E et F. Une manière commode de se représenter la matrice est de placer en colonne les composantes des images de la base $(e_1,\cdots,e_p)$ par φ dans la base d'arrivée $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$. Le coefficient en position (i,j) de la matrice est la composante de $\varphi(e_i)$ suivant le vecteur ε_j.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & & \varphi(e_p) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix}$$

Remarques.
- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\varphi)$ a $\dim(\mathrm{E})$ colonnes et $\dim(\mathrm{F})$ lignes.
- Dans le cas d'un endomorphisme (E = F), on peut choisir $\mathscr{B}_{\mathrm{E}} = \mathscr{B}_{\mathrm{F}}$. On note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\varphi)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\varphi)$.
- La matrice de l'application identité $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ est la matrice identité I_p où $p = \dim(\mathrm{E})$.
- La matrice de l'application nulle $u \in \mathrm{E} \mapsto 0_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ est $0_{n,p}$ avec $n = \dim(\mathrm{F})$, $p = \dim(\mathrm{E})$.

THÉORÈME (RAPPEL) **isomorphisme**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie (de dimension respective p et n) et $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ deux bases respectives de* E *et* F.

Alors l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

En particulier, pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi+\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\psi) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\lambda\varphi) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi).$$

Conséquences.

- À toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques.
Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** A.
- En dimension finie, il ne peut avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = \dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

THÉORÈME (RAPPEL) **image d'un vecteur**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$.*
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $u \in E$.

Si on note
- U *la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}_E$.*
- V *la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.*
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$, *la matrice de l'application* φ *dans les bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$,*

alors $AU = V$.

Remarques.

- Cette relation s'écrit directement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\left(\varphi(u)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$.
- Cette formule s'étend par concaténation aux matrices d'une famille de vecteurs.

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(u_1, \cdots, u_q)$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\left(\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_q)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u_1, \cdots, u_q)} \qquad (\bullet)$$

THÉORÈME (RAPPEL) **produit matriciel et composition d'applications**

Soient E, F, G *trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$.*
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$. *Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(\psi) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi).$$

COROLLAIRE (RAPPEL) — **inversibilité et isomorphisme**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie,* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ *deux bases respectives de* E *et* F. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *L'application linéaire* φ *est bijective.*

ii) *La matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$ *est inversible.*

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(\varphi^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)^{-1}$.

Exercice 10



✦ *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. Prouver le corollaire grâce au théorème précédent.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ défini par $\varphi(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$.
   À quelle condition sur a, b, c et d, l'application φ est bijective?
3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer A, la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+1) \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique.
   b) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

p. 41

2.2 Rappels : noyau, image et rang

Les définitions et le calcul

DÉFINITION (RAPPEL) — **noyau, image et rang d'une matrice**

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *on définit*

Le noyau *de* A *par* $\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\right\}$.

L'image *de* A *par* $\mathrm{Im}(A) = \left\{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\quad AX = Y\right\} = \left\{AX : X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}$.

Le rang *de* A, *noté* $\mathrm{rg}(A)$, *est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Autrement dit, si $A = \left[C_1\, C_2 \cdots C_p\right]$ *alors*

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)\right).$$

- **Propriétés de calculs**
  - → Le rang est invariant par transposition : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.
  - → Le rang est invariant par les opérations élémentaires :
    - L'échange de lignes ou de colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$).
    - La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$).
    - L'addition d'une autre ligne ou colonne ($L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$).

Remarque. On a toujours $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. De plus, le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

En particulier, on a aussi $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$.

Exercice 11



✦ ✎ Calculer les noyaux des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

p. 42

DÉFINITION (RAPPEL) — **noyau, image et rang d'une application linéaire**

Pour tout $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, *on définit*

- ***Le noyau*** *de* φ *par* $\quad \mathrm{Ker}(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\}$.
- ***L'image*** *de* φ *par* $\quad \mathrm{Im}(\varphi) = \{v \in F \mid \exists u \in E, \quad \varphi(u) = v\} = \{\varphi(u) \mid u \in E\}$.
- ***Le rang*** *de* φ, *noté* $\mathrm{rg}(\varphi)$, *est défini par* $\quad \mathrm{rg}(\varphi) = \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big)$.

Remarque. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\big(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\big)$. Ainsi le rang de φ correspond au rang de la famille image $\big(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\big)$.

PROPOSITION (RAPPEL) — **rang d'une matrice et d'une application linéaire**

Soient E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ *deux bases respectivement de* E *et* F. *Soient* $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$. *Alors,*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi).$$

Formule du rang et conséquences

THÉORÈME (RAPPEL) — **formule du rang**

Soient E, F *deux espaces vectoriels avec* E *de dimension finie et* $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. *Alors*

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E).$$

Rappels. L'application $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.
L'application φ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(\varphi) = F$. Dans le cas où F est de dimension finie, on a aussi la surjectivité de φ si et seulement si $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(F)$. À partir de la formule du rang, on montre les énoncés suivants :

• *Version endomorphisme*
Soient E un espace vectoriel de *dimension finie* n et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence entre :

i) φ est injective ($\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$).

ii) φ est surjective ($\mathrm{rg}(\varphi) = n$).

iii) φ est bijective.

• *Version matricielle*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

i) $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$.

ii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

iii) A est inversible.

2.3 Compléments : matrices de passage

DÉFINITION **cas particulier des matrices de passages**

Soient E, *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, *deux bases de* E.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ *est appelée* **matrice de passage de la base** $\mathscr{B}$ **à la base** $\mathscr{C}$. *On la note* $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$. *Dit autrement, la* j*-ème colonne de* $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ *est la matrice colonne des coordonnées du* j*-ème vecteur de* $\mathscr{C}$ *dans la base* $\mathscr{B}$.

Exemple. Soient $u = (1,2)$ et $v = (3,4)$. La famille $\mathscr{C} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathscr{C}$ est

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $e_1 = -2u + v$ et $e_2 = 3/2\,u - 1/2\,v$, d'où $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Remarque. Pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, deux bases de E, on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.}$$

En effet, si on note $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathrm{id}(e_1) & \mathrm{id}(e_2) & & & \mathrm{id}(e_n) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & & & e_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Remarque. Avec trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E, on a aussi $P_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$ (•).

Exercice 12



✦ On considère la base canonique $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On considère les familles de polynômes $\mathscr{C} = (1, x-a, (x-a)^2)$ et $\mathscr{D} = ((x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2)$.

1. a) Justifier que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Calculer $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$, $P_{\mathscr{B},\mathscr{D}}$ et $P_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$. Vérifier par le calcul que $P_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot P_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$.

2. Prouver la relation (•) dans le cas général de trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E.

p. 43

PROPOSITION **coordonnées et changement de bases**

Soient $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Soit u un vecteur de E *dont* $\mathrm{U}_{\mathscr{B}}$ *et* $\mathrm{U}_{\mathscr{C}}$ *sont les matrices colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ alors*

$$\mathrm{U}_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\mathrm{U}_{\mathscr{C}}.$$

Preuve. L'énoncé est une conséquence du théorème page 21. Soit $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{U}_{\mathscr{B}}$ (respectivement $\mathrm{U}_{\mathscr{C}}$) est respectivement la matrice colonne du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$). À partir de $u = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}(u)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u), \quad \text{puis} \quad \mathrm{U}_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\mathrm{U}_{\mathscr{C}}.$$

■

Exercice 13



✧ Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$. On vérifie que $\mathscr{C}$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases?
On pourra dans un premier temps, traduire matriciellement le problème.

p. 44

PROPOSITION **inversibilité**

Soient $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. *La matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est inversible avec*

$$\left(\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\right)^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}.$$

Autrement dit, l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$.

Preuve. On a vu que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$. Comme $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = I_n \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = I_n. \end{cases}$$

Par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ est inversible et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})^{-1}$. On en déduit le résultat.

■

Exemples. Vérifions la proposition précédente sur deux cas.

• On se place dans $\mathbb{R}^3$. Considérons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la famille définie par

$$\varepsilon_1 = (1,1,1), \qquad \varepsilon_2 = (2,3,2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1,-2,0).$$

On vérifie que la famille $\mathscr{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, elle contient exactement 3 vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Il vient

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après ce qui précède, $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est inversible. On peut calculer l'inverse par un pivot de Gauss, on trouve

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

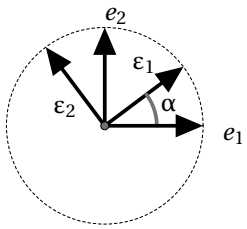
On peut vérifier ce calcul, par exemple, à l'aide de la première colonne

$$e_1 = 4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \iff (1,0,0) = 4(1,1,1) - 2(2,3,2) - (-1,-2,0).$$

• *Matrices de rotation*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et la famille $\mathscr{C}$ composée des deux vecteurs

$$\varepsilon_1 = \big(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\big) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \big(-\sin(\alpha), \cos(\alpha)\big).$$



Les vecteurs ε_1 et ε_2 s'obtiennent par rotation d'un angle α de centre l'origine à partir des vecteurs e_1 et e_2. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est alors :

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \neq 0$. La formule de l'inverse pour les matrices $(2,2)$ donne

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Or, les vecteurs e_1 et e_2 s'obtiennent aussi à partir de ε_1 et ε_2 par une rotation d'un angle $-\alpha$. La matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ s'obtient donc ici en remplaçant α par $-\alpha$ dans l'expression de $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$. En utilisant la parité du cosinus et l'imparité du sinus, il vient :

$$\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

On retrouve bien l'égalité $\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \big(\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\big)^{-1}$.

THÉORÈME **formule de changement de bases**

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *avec* E *de dimension finie,* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *deux bases de* E. *Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Preuve. Partons de l'égalité $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ \varphi \circ \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Matriciellement, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\big) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\big(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\big) \\ &= \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}. \end{aligned}$$

Enfin, la proposition précédente donne le résultat : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$. ■

Remarque. On peut généraliser la formule de changement de bases. Si $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E et F, deux espaces de dimension finie. Si $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ (resp. $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}$) sont deux bases de E (resp. de F) alors on montre qu'en précédemment

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_{\mathrm{F}},\mathscr{C}_{\mathrm{E}}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{C}_{\mathrm{F}}}{}^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(\varphi)\, \mathrm{P}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{C}_{\mathrm{E}}}.$$

Exercice 14



✦ ✎ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Posons de plus $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

p. 44

1. On admet que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser B, la matrice de φ dans la base $\mathscr{C}$.
2. Expliciter la relation entre A et B. À quelles conditions sur a et b, l'endomorphisme φ est un isomorphisme ?

2.4 Compléments : matrices semblables

DÉFINITION **matrices semblables**

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A *est* ***semblable*** *à* B *s'il existe une matrice inversible* P *telle que* $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercice 15



✦ **Vrai ou faux ?** Pour tous $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est semblable à A. ✓ ×
2. Si A est semblable à B, alors B est semblable à A. ✓ ×
3. Si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C. ✓ ×
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si A est semblable à B alors A^p est semblable à B^p. ✓ ×
5. Si A est semblable à B et A est inversible alors A^{-1} est semblable à B^{-1}. ✓ ×

p. 44

Exemple. Les matrices suivantes sont semblables :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 16



✦ Justifions l'exemple en considérant φ, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.

1. a) Prouver l'existence de $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Vect}(u) = \text{Ker}(\varphi - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   De même, on prouve que $v = (4, 3, -2)$, $w = (-2, 3, -2)$ *vérifient*

$$\text{Vect}(v) = \text{Ker}(\varphi - 2\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \textit{et} \quad \text{Vect}(w) = \text{Ker}(\varphi + 4\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

   b) Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que M et D sont semblables.

p. 45

PROPOSITION **endomorphisme et similitude**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, deux matrices et* E *un espace vectoriel de dimension finie* n*.*
Les matrices A *et* B *sont semblables si et seulement si* A *et* B *représentent un même endomorphisme de* E*.*
C'est-à-dire il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *de* E *et* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *tels que*

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad \textit{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de changement de base en précisant que toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de changement de base. ■

COROLLAIRE **invariance du rang par similitude**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.* ***Si*** A *et* B *sont semblables,* ***alors*** *elles ont même rang.*

Preuve. Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles représentent le même endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans des bases différentes. Ainsi, avec la proposition précédente $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(B)$. ■

Exercice 17



✧ La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner un contre-exemple ? p. 45

3 Compléments : trace d'une matrice

DÉFINITION **trace**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On définit la* ***trace*** *de* A*, notée* $\mathrm{Tr}(A)$*, comme la somme des coefficients diagonaux de* A*.*
Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$*,*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

À partir des règles de calculs usuelles, on montre que :

PROPOSITION (RAPPEL) **forme linéaire**

L'application trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est une forme linéaire. C'est-à-dire, pour tous* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \,\mathrm{Tr}(A).$$

Vocabulaire. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18



✦✦ ✎

1. Donner la dimension de Ker(Tr). Préciser une base.
2. Expliciter un supplémentaire du noyau.

p. 45

PROPOSITION — **trace, transposition et produit**

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad \mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$ *et* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 19



✦ Prouver cette proposition.

On note $[M]_{i,j}$*, le coefficient en position* (i, j) *de la matrice* M. *On rappelle que pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$.

p. 45

COROLLAIRE — **invariance par similitude**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *inversible. Alors* $\quad \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right)$.

Preuve. D'après la proposition précédente

$$\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \mathrm{Tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,(AI_n) = \mathrm{Tr}(A).$$

■

Remarque. Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace. La réciproque est fausse, par exemple la matrice I_n et J (de taille (n, n) et ne contenant que des "1") ont même trace pourtant elles ne sont pas semblables ($\mathrm{rg}(J) = 1 \neq n = \mathrm{rg}(I_n)$ pour $n > 1$).

Exercice 20



✦ ✎ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Que dire de A si $\mathrm{Tr}(A\,{}^tA) = 0$?
2. Que dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$?

p. 45

4 Compléments : les espaces stables

DÉFINITION — **espace stable**

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *et* F *une partie de* E. *On dit que* F *est une* ***partie stable*** *par* φ *si*

$$\forall\, u \in F, \qquad \varphi(u) \in F.$$

Exercice 21



✦ ✎ *Les questions sont indépendantes.*

1. Montrer que toute somme de s.e.v stables par φ reste stable par φ.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que le noyau et l'image de ψ sont stables par φ.

p. 45

Remarques.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F.
Alors F est une partie stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\varphi(e_i) \in F$.

Preuve. Supposons que pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\varphi(e_i) \in F$. Soit $u \in F$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant génératrice, il existe λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Comme φ est linéaire et F stable par combinaison linéaire

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in F} \in F.$$

L'espace F est donc stable par φ. La réciproque est évidente. ■

• Si F est un sous-espace vectoriel stable par φ, on peut définir la restriction de φ à F par

$$\varphi|_F : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ u & \mapsto & \varphi(u). \end{array} \right.$$

L'application $\varphi|_F$ définit alors un endomorphisme de F.

Exercice 22



✧ Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ. Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

p. 46



Exercices



Révisions en algèbre linéaire

Exercice 23. ✦ **Vrai ou faux?**

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible. ✓ ×
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles. ✓ ×

≫ Solution p. 46

Exercice 24. ✦ Soient E un espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.
Soit u, un vecteur non nul de E.

1. Est-ce que f est injective? surjective?
2. Justifier que $\big(u, f(u)\big)$ est une base de E.
3. Donner la matrice de f dans cette base.

≫ Solution p. 46

Exercice 25. ✦ ✎ **Rang et composition**
Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(\psi)\,;\,\mathrm{rg}(\varphi)\}$.
2. Justifier que $\mathrm{Im}(\varphi+\psi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi)$. Puis, en déduire que $\mathrm{rg}(\varphi+\psi) \leqslant \mathrm{rg}(\varphi)+\mathrm{rg}(\psi)$.
3. a) Pour tout isomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E',E)$, on a $\mathrm{rg}(f\circ\varphi) = \mathrm{rg}(f)$.
   b) Pour tout isomorphisme $\psi \in \mathscr{L}(F,F')$, on a $\mathrm{rg}(\psi\circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

≫ Solution p. 46

Exercice 26. ✦ On définit les matrices et l'application

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&1\\7&2\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \quad\text{et}\quad \varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_2(\mathbb{R})&\to&\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\\ M&\mapsto&AMB.\end{array}\right.$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Justifier que φ est une application bijective et exprimer φ^{-1}.
3. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de φ dans $\mathscr{B}$.
   Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce calcul Python :

≫ Solution p. 47

Editeur

```
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed

[[0. 0.]
 [0. 0.]]
[[0. 0.]
 [0. 0.]]
```

Exercice 27. ✦✦ 🔑 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f,\ g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

≫ Solution p. 48

Exercice 28. ✦✦ ✎ Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que φ est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$. *Pour rappel* φ^2 *désigne* $\varphi \circ \varphi$.
2. 🔑 Montrer que si $\lambda \neq 1$, $\varphi - \mathrm{id}_\mathrm{E}$ est bijective et exprimer son application réciproque à l'aide de φ.

≫ Solution p. 48

Exercice 29. ✦✦ **Exemples de formes linéaires**

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$, posons : $\varphi_1(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(1)$, $\varphi_2(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(0)$, $\varphi_3(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(-1)$ et $\psi(\mathrm{P}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que φ_1 et ψ sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$. *On admet que* φ_2 *et* φ_3 *sont elles-aussi des formes linéaires.*
2. Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.
3. **a)** Justifier l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_1 \mathrm{P}(1) + \lambda_2 \mathrm{P}(0) + \lambda_3 \mathrm{P}(-1).$$

b) Préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.

≫ Solution p. 48

Le cas nilpotent

Exercice 30. ✦✦ **Variante sur les endomorphismes nilpotents**
Soit φ un endomorphisme sur E de dimension 4 tel que $\varphi^5 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

1. Justifier que $\varphi^4 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
2. Dans la suite, on suppose de plus que $\varphi^3 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
   Peut-on avoir $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi^2$? Même question avec $\mathrm{Ker}\,\varphi^2 = \mathrm{Ker}\,\varphi^3$.
3. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi^3 = 3$.
4. Conclure en montrant qu'il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de φ dans cette base sont nuls partout, sauf sur la deuxième diagonale inférieure.

≫ Solution p. 49

Exercice 31. ✦✦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et φ un endomorphisme de E tel que :

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad \varphi^p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

On dit que φ est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{E}$.
   Vérifier que toutes ces inclusions sont strictes.
2. Soit $\mathscr{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On la complète en une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ une base $\mathscr{B}_k$ de $\mathrm{Ker}\left(\varphi^k\right)$ en une base $\mathscr{B}_{k+1}$ de $\mathrm{Ker}\left(\varphi^{k+1}\right)$.
   On trouve ainsi une succession de bases $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{B}_p$, où $\mathscr{B}_p$ est une base de E.
   Donner la forme de la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_p$. Préciser sa diagonale.

3. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$, alors A est de trace nulle.
Que dire de $\mathrm{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?

≫ Solution p. 50

Exercice 32. ✦✦ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que, pour tout $u \in E$, il existe un entier $n_u \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_u}(u) = 0_E$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

≫ Solution p. 51

Compléments de deuxième année

Exercice 33. ✧ Peut-on trouver deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

≫ Solution p. 51

Exercice 34. ✦ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

≫ Solution p. 51

Exercice 35. ✦ **Somme directe dans $\mathbb{R}_n[x]$**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on définit $F_i = \left\{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid \forall\, j \in [\![0; n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\right\}$.

1. Justifier que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$,
$$F_i = \mathrm{Vect}(L_i) \quad \text{où} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - j).$$

2. Vérifier que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe, puis l'égalité $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i = \mathbb{R}_n[x]$.

≫ Solution p. 51

Exercice 36. ✦ Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_2. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ On pose : $w = e_1 + e_2$.

1. En considérant les trois vecteurs e_1, e_2 et w, montrer qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $\big(x, \varphi(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la matrice M associée à φ dans la base $\big(x, \varphi(x)\big)$ est de la forme
$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$
où a et b sont deux réels, indépendants de la base $\big(x, \varphi(x)\big)$, que l'on exprimera en fonction de $\det(A)$ et $\mathrm{Tr}(A)$.
On pourra admettre que le déterminant est un invariant de similitude.
3. En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

≫ Solution p. 52

Exercice 37. ✦ ✎ **Trace d'un endomorphisme**
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. On définit la trace de φ par
$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\big).$$

1. Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.
2. *Exemples*
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P - P' \in \mathbb{R}_n[x]$.
   b) On pose $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      i) Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n, n) (noté $\mathscr{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathscr{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.

ii) En déduire la trace de φ.

c) Soit p un projecteur de E de dimension finie. Vérifier que la trace d'un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.

≫ Solution p. 52

Exercice 38. ✦✦ Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

1. Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathscr{C}$ cette base.
2. Expliciter la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base.
3. Calculer BA.

≫ Solution p. 53

Exercice 39. ✦✦✦ ✎ **Commutant d'une matrice nilpotente**

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathscr{C}_B$ et celle de $\mathscr{C}_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; AM = MA \right\}$.

≫ Solution p. 53

Exercice 40. ✦✦✦ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\Phi_A(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

1. Montrer que Φ_A est une forme linéaire.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \Phi_A$.

≫ Solution p. 54

Exercice 41. ✦✦✦ ✎ **Base de polynômes de Lagrange**

Soient a_0, a_1, …, a_n, $n+1$ réels deux à deux distincts. Notons $\mathscr{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \ldots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big). \end{array} \right.$$

2. Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on définit le polynôme $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \qquad P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i.$$

3. Préciser $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1}$. *Pour rappel,* $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ *désigne la matrice de passage de la base* $\mathscr{B}$ *à la base* $\mathscr{C}$.

≫ Solution p. 54

Exercice 42. ✦✦✦ ✎ **Vecteurs cycliques et espaces stables**

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est *cyclique* pour φ s'il existe un entier m non nul tel que la famille $\mathscr{B}_{u,m} = \left(u, \varphi(u), \varphi^2(u), \ldots, \varphi^{m-1}(u)\right)$ soit une famille génératrice de E.
Pour rappel, $\varphi^i(u) = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi(u)$ *avec* i *compositions.*

1. Comparer m et n.
2. 🔑 Montrer que si u est cyclique pour φ, alors $\mathscr{B}_{u,n}$ est une base de E.
3. *Application*
   Dans la suite, on suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par φ sont $\{0_E\}$ et E.
   a) 🔑 Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la famille $\mathscr{B}_{u,m}$ soit libre mais $\mathscr{B}_{u,m+1}$ n'est pas libre.
   b) Vérifier que $\text{Vect}(\mathscr{B}_{u,m})$ est un espace stable par φ.
   c) En déduire que tout vecteur $u \in E \setminus \{0_E\}$ est cyclique.
   d) 🔑 On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les coordonnées de $\varphi^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}_{u,n}$. Justifier que
   $$\varphi^n = a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot \varphi + \ldots + a_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}.$$
   e) Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_{u,n}$ à l'aide des réels a_i.

≫ Solution p. 55

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs.
JACQUES PRÉVERT
Poète français (1900-1977).



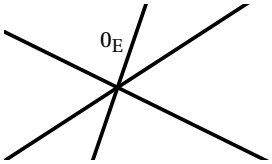
Indications et solutions



Indication de l'exercice 5 p. 15

1. Justifier que G est de dimension $n-1$ en exhibant une base. On pourra supposer que $a_n \neq 0$.

Indication de l'exercice 7 p. 17



Indication de l'exercice 8 p. 18

Déterminer une base (w_1, w_2) de F. Vérifier ensuite que la famille (u, v, w_1, w_2) est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclure avec la proposition précédente.

Indication de l'exercice 9 p. 19

Adapter le schéma de l'indication 7 dans $\mathbb{R}^3$.

Indication de l'exercice 10 p. 22

Pour rappel :
Soit $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
→ f est bijective.
→ Il existe une application $g : F \to E$ telle que : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Indication de l'exercice 15 p. 27

Tout est vrai !

Indication de l'exercice 17 p. 28

On pourra regarder les matrices semblables à I_n et les matrices de même rang que I_n.

Indication de l'exercice 23 p. 31

La première est fausse et la seconde est vraie (on pourra utiliser des matrices triangulaires).

Indication de l'exercice 33 p. 33

Pensez à la trace.

Indication de l'exercice 27 p. 32

Écrire les formules du rang pour f et g ainsi que la formule de Grassmann avec $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

Indication de l'exercice 28 p. 32

2. Exprimer l'application réciproque sous la forme $\alpha\varphi + \beta\,\mathrm{id}_E$.

Indication de l'exercice 37 p. 33

1. Appliquer la formule de changement de base et la relation Tr(AB) = Tr(BA).
2.a) Écrire la matrice de φ dans la base canonique.
2.b)ii. Écrire la matrice de l'application φ dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition

$$\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

3.c) Partir de l'égalité $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = E$.

Indication de l'exercice 39 p. 34

1. Justifier l'existence de $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi \setminus \mathrm{Im}\,\varphi$ et $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}\,\varphi$. Montrer que la famille $(u, \varphi(w), w)$ est une base. Que dire de la matrice de φ dans cette base ?
2. Écrire $A = P^{-1}BP$. Justifier que $M \in \mathscr{C}_A$ si et seulement si $PMP^{-1} \in \mathscr{C}_B$. Que peut-on en déduire sur les dimensions de $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_A$?
Calculer ensuite $\dim \mathscr{C}_B$ en déterminant les conditions sur les coefficients de

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

pour que $M \in \mathscr{C}_B$.

Indication de l'exercice 40 p. 34

2. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, on pose $\Phi_{ij} = \Phi_{E_{ij}}$
Montrer que la famille (Φ_{ij}) est une base de l'espace

vectoriel des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Utiliser ensuite la dimension de

$$\dim\left(\mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R}\right)\right)$$

pour justifier que l'on obtient une base. Conclure.

Indication de l'exercice 41 p. 34

1. Par un argument de dimension, il suffit de montrer que φ est injective. Montrer ensuite que si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, P est nécessairement le polynôme nul.

Indication de l'exercice 42 p. 35

2. Procéder par récurrence sur la propriété : la famille $\mathscr{B}_{u,k}$ est une famille libre (avec $k \in [\![1;n]\!]$).
3.a) Considérer la partie de $\mathbb{N}$: A est l'ensemble des entiers k tels que la famille $\mathscr{B}_{u,k}$ est libre.
3.d) Vérifier l'égalité pour tout vecteur de la base $\mathscr{B}_{u,n}$.

Exercice 1 p. 11

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels tels que $\lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_2 + \lambda_3 \cdot \varepsilon_3 + \lambda_4 \cdot \varepsilon_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned}&(3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4, -\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4,\\ &\quad \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_4) = (0,0,0,0)\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ -\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_4 &= 0. \end{cases}$$

Par un pivot de Gauss, on montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille est libre.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
→ Si P est de degré n, la famille $\left(P^{(k)}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés, elle est donc libre.
→ Sinon, $\deg(P) < n$ et pour $k = \deg(P)+1$, on obtient $P^{(k)} = 0$, la famille ne peut être libre.
Finalement, la famille est libre si et seulement si, P est de degré exactement n.

3.a) On suppose l'existence de quatre réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_4$ tels que

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = 0_2.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice, on obtient le système linéaire :

$$\mathscr{S}\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 &= 0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 \quad +\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &= 0. \end{cases}$$

Résolvons ce système par un pivot de Gauss,

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 &= 0\\ \lambda_3-\lambda_4 &= 0\\ -\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_4\leftarrow L_4+L_3\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 &= 0\\ \lambda_3-\lambda_4 &= 0\\ -\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ 2\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1 = 0$. La famille (A, B, C, D) est libre.

3.b) Une famille à 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 ne peut être libre. En étudiant les relations de linéarité, on montre que :

$$-3I_2 + 2A - B - C + 2D = 0_2.$$

La famille (A, B, C, D, I_2) n'est pas libre.

4.a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \tan + \lambda_2 \tan^2 + \lambda_3 \tan^3 + \cdots + \lambda_n \tan^n = \mathbf{0}.$$

Comme l'application tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \cdots + \lambda_n x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(\tan^i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est libre.

4.b) Soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = \mathbf{0}.$$

Si $\lambda_0 \neq 0$, alors la fonction

$$f_0 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} f_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} f_n$$

est dérivable en 0 en tant que combinaison linéaire d'applications dérivables en 0. Absurde, f_0 n'est pas

dérivable en 0. D'où $\lambda_0 = 0$. Il en va de même pour tout λ_i. En conclusion, la famille $(f_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est libre.

Exercice 2 p. 12

1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X \in F &\iff x - 2y = z \\ &\iff X = (2y + z, y, z) \\ &\qquad = y(2,1,0) + z(1,0,1). \end{aligned}$$

Si on pose $u = (2,1,0)$, $v = (1,0,1)$. On a

$$F = \text{Vect}(u, v)$$

La famille (u, v) est génératrice de F.

2. Pour tout $P \in G$, il existe des réels $a_0, \dots a_n$ tels que $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On a aussi

$$P(x) = -P(-x) = -\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i x^i.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!], \qquad -a_i(-1)^i = a_i.$$

Ainsi pour tout indice i pair, $a_i = 0$. Réciproquement, tout polynôme

$$P = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} a_i x^i$$

appartient à G. Dès lors une famille génératrice de G est

$$\left(x, x^3, x^5, \dots, x^p\right) \quad \text{avec} \quad p = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. M est symétrique si et seulement si il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posons ainsi

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut exprimer ces matrices à l'aide des matrices élémentaires,

$$M_1 = E_{1,1}, \quad M_2 = E_{1,2} + E_{2,1}, \quad M_3 = E_{1,3} + E_{3,1},$$

$$M_4 = E_{2,2}, \quad M_4 = E_{2,3} + E_{2,3} \quad \text{et} \quad M_6 = E_{3,3}.$$

La famille $(M_1, \dots, M_6)$ est génératrice de H.

Exercice 3 p. 13

1. La partie F est un bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Vérifions que $\text{Vect}(u_1)$ en est un supplémentaire (le raisonnement est similaire pour u_2).
Soit $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

• *Analyse (recherche des conditions nécessaires).*
Supposons qu'il existe $u_F = (x, y, z) \in F$ et $w \in \text{Vect}(u_1)$ tels que

$$v = u_F + w$$

C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(a, b, c) = (x, y, z) + \lambda(1, 0, 0)$$

$$\text{avec} \quad x + y + z = 0.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} a &= x + \lambda \\ b &= y \\ c &= z \\ 0 &= x + y + z \end{cases}$$

Nécessairement,

$$\begin{cases} \lambda &= a - x = a + y + z = a + b + c \\ x &= -y - z = -b - c \\ y &= b \\ c &= z \end{cases}$$

Ainsi, si la décomposition existe, elle est unique et

$$(a, b, c) = \underbrace{(-b - c, b, c)}_{\in F} + \underbrace{(a + b + c)(1, 0, 0)}_{\in \text{Vect}(u_1)}.$$

• *Synthèse (recherche des conditions suffisantes).*

Posons $u_F = (-b - c, b, c)$ et $w = (a + b + c)\, u_1$,

de sorte que $u_F \in F$, $w \in \text{Vect}(u_1)$ et

$$v = u_F + w.$$

On a trouvé une décomposition.

• *En conclusion*, on a bien prouvé l'existence et l'unicité d'une telle décomposition pour tout vecteur u. Par définition, F et $\text{Vect}(u_1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

De nouveau, on constate qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• *Analyse.* Supposons qu'il existe deux matrices carrées A, S respectivement antisymétrique et symétrique telles que $M = A + S$. En transposant, il vient

$${}^tM = {}^tA + {}^tS = -A + S.$$

On en déduit par somme et différence des deux relations précédentes,

$$A = \frac{1}{2}(M - {}^tM) \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2}(M + {}^tM).$$

Résumons, si une telle décomposition $M = A+S$ (avec A antisymétrique et S symétrique) existe, alors les matrices A et S sont uniques.

• *Synthèse.*

Posons $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$,

de sorte que

$$\begin{aligned} {}^tA &= \frac{1}{2}{}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) \\ &= -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -A. \end{aligned}$$

et $${}^tS = \frac{1}{2}{}^t(M + {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = S.$$

De plus $$A + S = \frac{1}{2}(M - {}^tM) + \frac{1}{2}(M + {}^tM) = M.$$

Résumons :

→ Les matrices A et S sont respectivement antisymétrique et symétrique ;

→ $A + S = M$.

On vient de justifier l'existence d'une telle décomposition.

• *Conclusion.* On a prouvé que toute matrice carrée M s'écrit, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$\mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 4 p. 14

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & M \in E_1 \\ \iff & \exists a,b,c,d \in \mathbb{R},\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ & \qquad \text{avec} \quad a+b+c+d = 0 \\ \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R},\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{bmatrix} \\ \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R}, \\ & M = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_3}. \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence :

$$M \in E_1 \iff M \in \text{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

Puis $$E_1 = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

La famille (A_1, A_2, A_3) est génératrice de E_1. On vérifie que la famille est libre, c'est donc une base de E_1. Elle contient trois vecteurs. Concluons :

$$\dim(E_1) = 3.$$

2. On procède de même. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\begin{aligned} & P \in E_2 \\ \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c \text{ et } P'(1) = 0 \\ \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R},\ P = ax^2 + bx + c \text{ et } 2a + b = 0 \\ \iff & \exists a,c \in \mathbb{R},\ P = ax^2 - 2ax + c = a(x^2 - 2x) + c. \end{aligned}$$

Si on note $P_1(x) = x^2 - 2x$ et $P_2(x) = 1$, on a montré que $P \in E_2$ si et seulement si $P \in \text{Vect}(P_1, P_2)$. La famille (P_1, P_2) est donc génératrice de E_2. De plus, cette dernière est libre (car de degré échelonné). C'est donc une base de E_2,

$$\dim(E_2) = 2.$$

3. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, notons D_i désigne la matrice diagonale de taille (n, n) ne contenant que des « 0 » sauf un « 1 » en position (i, i).

$(D_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une base de E_3.

On a donc $$\dim(E_3) = n.$$

Exercice 5 — p. 15

1. • Le vecteur u étant non nul, F est une droite vectorielle :

$$\dim \mathrm{F} = 1.$$

• Il existe un indice i tel que $a_i \neq 0$. Pour simplifier, supposons $a_n \neq 0$. Les vecteurs

$$\begin{aligned}
v_1 &= (a_n, 0, 0, \dots, 0, -a_1) = a_n e_1 - a_1 e_n \\
v_2 &= (0, a_n, 0, \dots, 0, -a_2) = a_n e_2 - a_2 e_n \\
v_3 &= (0, 0, a_n, \dots, 0, -a_3) = a_n e_3 - a_3 e_n \\
&\vdots \\
v_{n-1} &= (0, 0, 0, \dots, 0, a_n, -a_{n-1}) = a_n e_{n-1} - a_{n-1} e_n.
\end{aligned}$$

forment une famille libre de G avec $n-1$ vecteurs. Comme $\mathrm{G} \neq \mathbb{R}^n$, $\dim \mathrm{G} \leqslant n-1$. On a donc l'égalité

$$\dim \mathrm{G} = n - 1.$$

2. Utilisons le troisième énoncé de la proposition précédente. On a bien

$$\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = n = \dim \mathbb{R}^n$$

et pour $v \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = \lambda u = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

La condition $v \in \mathrm{G}$ impose

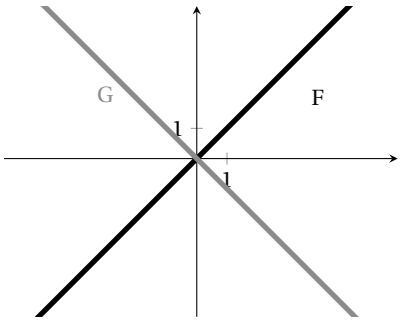
$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2.$$

Comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \neq 0$ et $\lambda = 0$. On a $v = 0_{\mathrm{E}}$ et

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

En conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

3. G est une droite vectorielle engendrée par $(1, -1)$.



Exercice 6 — p. 16

1. • On a

$$0_{\mathrm{E}} = \underbrace{0_{\mathrm{E}}}_{\in \mathrm{F}_1} + \underbrace{0_{\mathrm{E}}}_{\in \mathrm{F}_2} + \dots + \underbrace{0_{\mathrm{E}}}_{\in \mathrm{F}_p}.$$

D'où $0_{\mathrm{E}} \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ qui est donc non vide.

• Soient $u, v \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe

$$(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \dots \mathrm{F}_p,$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \dots \times \mathrm{F}_p$$

tels que $u = \sum_{i=1}^{p} u_i$ et $v = \sum_{i=1}^{p} v_i$.

Il vient

$$\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{i=1}^{p} u_i + \mu \sum_{i=1}^{p} v_i = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda u_i + \mu v_i)}_{\in \mathrm{F}_i}$$

car chaque sous-espace F_i est stable par combinaison linéaire. D'où $\lambda u + \mu v \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$.

• Finalement, $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est un sous-espace de E.

2. Soit $u \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. On a $u = \sum_{i=1}^{p} u_i$ où chaque $u_i \in \mathrm{F}_i$. Par hypothèse, $u_i \in \mathrm{H}$ et H est stable par somme donc

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i \in \mathrm{H}.$$

On a bien l'inclusion demandée.

Exercice 7 — p. 17

Non.

Le schéma de l'indication donne un contre-exemple en intersectant trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Les intersections deux à deux sont bien réduits à $\{0\}$, pourtant la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$ n'est pas directe.

Exercice 8 — p. 18

1. Précisons une base de chacun des sous-espaces :
- (u) est une base de G.
- (v) est une base de H.
- (w_1, w_2) avec

$$w_1 = (1, 1, 0, 0), \quad w_2 = (0, 0, 1, -1)$$

est une base de F. En effet, (w_1, w_2) est libre (les deux vecteurs sont non colinéaires) et aussi génératrice de F puisque pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} X \in F &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ z = -t \end{cases} \\ &\iff X = (x, x, z, -z) \\ &\iff X = x(1,1,0,0) + z(0,0,1,-1) \\ &\iff X = xw_1 + zw_2 \\ &\iff X \in \text{Vect}(w_1, w_2) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \text{Vect}(w_1, w_2)$.

2. On montre ensuite que la famille (u, v, w_1, w_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$. La famille est génératrice

$$F + G + H = \text{Vect}(u, v, w_1, w_2) = \mathbb{R}^4$$

et d'après la proposition précédente, la somme est directe

$$F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4.$$

Remarque. On a alors

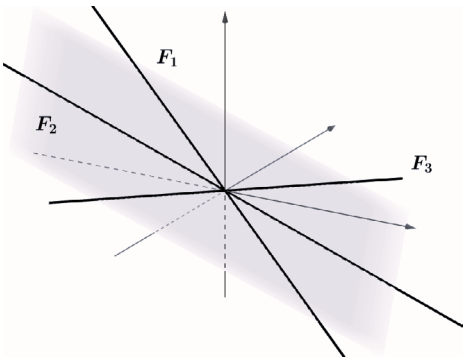
$$\begin{aligned} \dim F + \dim G + \dim H = 2 + 1 + 1 &= \dim \mathbb{R}^4 \\ &= \dim(F \oplus G \oplus H). \end{aligned}$$

Le théorème suivant généralise cette égalité.

Exercice 9 p. 19

Non.

Pour un contre-exemple, il suffit de prendre 3 droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ toutes contenues dans un même plan.



Exercice 10 p. 22

1. Raisonnons par double implication. Soit n la dimension commune de E et de F.

Remarque. Il ne pourrait exister d'isomorphisme si $\dim E \neq \dim F$.

$(\Rightarrow)$ Supposons φ bijective. On peut alors considérer φ^{-1} et d'après le théorème précédent, l'égalité

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_F$$

donne

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi) \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}\left(\varphi^{-1}\right) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_F}(\varphi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_F}(\text{id}_F) = I_n. \end{aligned}$$

De même $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_E$

impose

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}\left(\varphi^{-1}\right) \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_E}(\text{id}_E) = I_n.$$

Par conséquent, $\text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi)$ est inversible et son inverse est la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}\left(\varphi^{-1}\right)$.

$(\Leftarrow)$ Supposons la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi)$ inversible. Il existe une matrice carrée B telle que

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi) \cdot B = I_n \quad \text{et} \quad B \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi) = I_n.$$

Or il existe $\psi \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(\psi)$. Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(\psi)\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi) = I_n$$

et $\text{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\varphi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi)\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(\psi) = I_n$.

Donc

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\text{id}_E)$$

et $\text{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\varphi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\text{id}_F)$.

On en déduit $\psi \circ \varphi = \text{id}_E$ et $\varphi \circ \psi = \text{id}_F$.

Finalement, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$. En particulier,

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}\left(\varphi^{-1}\right) = B = \text{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\varphi)^{-1}.$$

2. La matrice de φ dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Cette dernière est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. D'après le théorème précédent, φ est un isomorphisme si et seulement si

$$ad - bc \neq 0.$$

3.a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, pour $k \in [\![0;n]\!]$,

$$\varphi(x^k) = (1+x)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell.$$

Notons $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$, la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. Soit $j \in [\![1;n+1]\!]$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(e_j) & = & \varphi(x^{j-1}) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j-1}{\ell} x^\ell \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} x^{i-1} \quad (i = \ell+1) \\ \varphi(e_j) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} e_i. \end{array}$$

Il vient : $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \cdots & \binom{i-1}{j-1} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si on note $a_{i,j}$ les coefficients de cette matrice, alors

$$\forall\, i,j \in [\![1;n+1]\!], \quad a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

En adoptant la convention que

$$\binom{j-1}{i-1} \quad \text{si} \quad i > j.$$

3.b) En reprenant le raisonnement précédent, φ est un isomorphisme avec

$$\varphi^{-1} : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x-1) \in \mathbb{R}_n[x].$$

Si on note $b_{i,j}$ les coefficients de A^{-1}, on a :

$$\forall\, i,j \in [\![1;n+1]\!], \quad b_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}.$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}(e_j) & = & (x-1)^{j-1} \\ & = & \displaystyle\sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j-1}{\ell} (-1)^{j-1-\ell} x^\ell \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} x^{i-1} \\ \varphi^{-1}(e_j) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} e_i. \end{array}$$

Pour construire la matrice A^{-1}, il suffit de partir de la matrice A et d'alterner les signes sur les diagonales.

Exercice 11 p. 23

• Calculons le noyau de la matrice A à l'aide d'un pivot de Gauss.
Soit $X = {}^t[x \quad y \quad z] \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0_{3,1}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{-3L_3 = 2L_2 \\ L_1 \leftrightarrow -L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array} \right. \iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}.$$

Finalement, le noyau est

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Soit $X = {}^t[x \quad y \quad z] \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(B_\alpha) \iff B_\alpha X = 0_{3,1} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (2-\alpha)x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 5x & + & (6+\alpha)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - (2-\alpha)L_3}}{\iff}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & (1+\alpha)y & + & (5-\alpha^2)z & = & 0 \\ & & (1+\alpha)y & + & (11+5\alpha)z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & (2+\alpha)(3+\alpha)z & = & 0 \\ & & (1+\alpha)y & + & (11+5\alpha)z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+\alpha)z & = & 0. \end{array}\right.$$

En effet

$$11+5\alpha-5+\alpha^2=\alpha^2+5\alpha+6=(2+\alpha)(3+\alpha).$$

Procédons par disjonction des cas.

→ Si $\alpha\notin\{-2,-3\}$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ (1+\alpha)y+(11+5\alpha)z & = & 0 \\ x+y-(2+\alpha)z & = & 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ (1+\alpha)y & = & 0 \\ x+y & = & 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, si $\alpha\notin\{-1;-2;-3\}$, il n'y a que ${}^t\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ comme solution.

Pour $\alpha\notin\{-1;-2;-3\}$, le noyau est $\{0_{3,1}\}$.

→ Si $\alpha=-1$, le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x+y & = & 0. \end{array}\right.$$

On obtient :

$$X\in\mathrm{Ker}(B_{-1}) \iff X=\begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$\mathrm{Ker}(B_{-1})=\left\{x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}.$$

→ Si $\alpha=-2$, le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ x+y & = & 0. \end{array}\right.$$

On obtient :

$$X\in\mathrm{Ker}(B_{-2}) \iff X=\begin{bmatrix} x \\ -x \\ -x \end{bmatrix}.$$

Puis $$\mathrm{Ker}(B_{-2})=\left\{x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}.$$

→ Si $\alpha=-3$, le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2y-4z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2z \\ x & = & z \end{array}\right..$$

Il vient :

$$X\in\mathrm{Ker}(B_{-3}) \iff X=\begin{bmatrix} z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$\mathrm{Ker}(B_{-3})=\left\{z\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 12 **p. 24**

1.a) La famille $\mathscr{C}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. La famille est donc libre. Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_2[x]$, c'est une base.
Justifions que $\mathscr{D}$ est une famille libre. Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(x-a)^2+\lambda_2(x-a)(x-b)+\lambda_3(x-b)^2=0.$$

En évaluant en a, on obtient $\lambda_3(a-b)^2=0$ et $\lambda_3=0$ puisque $a\neq b$. En évaluant en b, $\lambda_1=0$. Nécessairement $\lambda_2=0$ et la famille est libre. Avec trois vecteurs, $\mathscr{D}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

1.b) On a

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}=\begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{D}}=\begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ -2a & -a-b & -2b \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

car $(x-a)^2=x^2-2a+a^2$, $(x-b)^2=x^2-2b+b^2$

et $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$. De plus

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b)&=(x-a)\big((x-a)+(a-b)\big)\\&=(x-a)^2+(a-b)(x-a)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(x-b)^2&=\big((x-a)+(a-b)\big)^2\\&=(x-a)^2+2(a-b)(x-a)+(a-b)^2.\end{aligned}$$

Ainsi $$P_{\mathscr{C},\mathscr{D}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & (a-b)^2 \\ 0 & (a-b) & 2(a-b) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\cdot\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}\\&=\begin{bmatrix}1&-a&a^2\\0&1&-2a\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&(a-b)^2\\0&a-b&2(a-b)\\1&1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a^2&-a(a-b)+a^2&(a-b)^2-a2(a-b)+a^2\\-2a&a-b-2a&2(a-b)-2a\\1&1&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Après simplifications $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\cdot\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}=\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}$.

2. Partons de l'égalité $\mathrm{id}_\mathrm{E}\circ\mathrm{id}_\mathrm{E}=\mathrm{id}_\mathrm{E}$. On obtient matriciellement

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}\left(\mathrm{id}_\mathrm{E}\right)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left(\mathrm{id}_\mathrm{E}\right)\cdot\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}\left(\mathrm{id}_\mathrm{E}\right)$$

D'où le résultat.

Exercice 13 p. 25

Oui.

On cherche un vecteur u non nul tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u).$$

Avec la relation précédente, on a

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

Or on a aussi

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}.$$

On cherche donc a, b, $c\in\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

La résolution d'un pivot de Gauss donne par exemple

$$u=(a,b,c)=(2,-2,1).$$

Exercice 14 p. 27

1. On a par linéarité de φ :

$$\begin{aligned}\varphi(u_1)&=\varphi(e_1)-\varphi(e_3)\\&=(ae_1+be_2+be_3)-(be_1+be_2+be_3)\\&=(a-b)e_1+(b-a)e_3\\\varphi(u_1)&=(a-b)(e_1-e_3)=(a-b)u_1.\end{aligned}$$

On vérifie de même

$$\varphi(u_2)=(a-b)u_2\quad\text{et}\quad\varphi(u_3)=(a+2b)u_3.$$

Par définition :

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}a-b&0&0\\0&a-b&0\\0&0&a+2b\end{bmatrix}.$$

2. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ est

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\-1&1&1\end{bmatrix}.$$

On vérifie que

$$\mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3&0&-3\\1&-2&1\\2&2&2\end{bmatrix}.$$

Par la formule de changement de base

$$\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Ensuite, φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible. Comme P est inversible, c'est équivalent à B inversible. Or cette dernière est diagonale. La condition d'isomorphisme est donc

$$a-b\neq0\quad\text{et}\quad a+2b\neq0.$$

Exercice 15 p. 27

1. Vrai.

$$\mathrm{A}=\mathrm{I}_n\cdot\mathrm{A}\cdot{\mathrm{I}_n}^{-1}.$$

2. Vrai.

S'il existe $\mathrm{P}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, alors $\mathrm{PBP}^{-1}=\mathrm{A}$.

3. Vrai.

Soient $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que

$$\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\quad\text{et}\quad\mathrm{C}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ}.$$

Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{PQ})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PQ})&=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APQ}\\&=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ}=\mathrm{C}.\end{aligned}$$

La matrice PQ est inversible, A est semblable à C.

4. Vrai.

On démontre par récurrence que si $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\qquad\mathrm{B}^p=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^p\mathrm{P}.$$

5. Vrai.

Il existe donc une matrice P inversible telle que

$$A = PBP^{-1} \qquad (\text{i.e } B = P^{-1}AP)$$

La seconde relation permet de justifier que B est inversible par produit et

$$B^{-1} = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

Exercice 16 p. 27

1.a) Vérifier que $u = (1,1,1)$.

1.b) Justifier que (u,v,w) est une famille libre à trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Par la formule de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = {P_{\mathrm{can},\mathscr{C}}}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi)P_{\mathrm{can},\mathscr{C}}.$$

Posons P, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C} = (u,v,w)$. Comme

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(v) = 2v \quad \text{et} \quad \varphi(w) = -4w,$$

on a $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$.

Finalement, on obtient

$$D = P^{-1}MP.$$

Les matrices M et D sont semblables.

Exercice 17 p. 28

Prenons le cas des matrices inversibles. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}A = n$. Si la réciproque était vraie, toute matrice inversible serait semblable à la matrice I_n. Absurde, seule I_n est semblable à I_n car

$$P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n.$$

Exercice 18 p. 29

1. La trace est une forme linéaire non nulle, d'après la formule du rang, le noyau est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr})\right) = n^2 - 1.$$

Notons E_{ij} sont les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Une base est donnée par les matrices :

- E_{ij} pour $i \neq j$,
- $E_{ii} - E_{n,n}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.

2. Tout supplémentaire est de dimension 1. Toute droite vectorielle engendrée par une matrice de trace non nulle convient. Par exemple

$$\mathrm{Vect}\,(I_n).$$

Exercice 19 p. 29

L'idée est d'inverser l'ordre de sommation dans la somme double :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}[AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{ki}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[B]_{ki}\,[A]_{ik} = \sum_{k=1}^{n}[BA]_{kk} = \mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}$$

Exercice 20 p. 29

1. Pour $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in[\![1;n]\!]}$, vérifier que

$$\mathrm{Tr}\left(A\,{}^tA\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}{a_{ij}}^2.$$

Ainsi, pour $\mathrm{Tr}\left(A\,{}^tA\right) = 0$, on obtient une somme de termes positifs qui est nulle. Nécessairement, chaque terme est nul.

$$\forall\, i,\, j \in [\![1;n]\!], \qquad a_{ij} = 0.$$

La matrice A est nulle.

2. Par linéarité de la trace

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left((A-B)X\right) &= \mathrm{Tr}(AX - BX)\\ &= \mathrm{Tr}(AX) - \mathrm{Tr}(BX) = 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour $X = {}^t(A-B)$,

$$\mathrm{Tr}\left((A-B)\,{}^t(A-B)\right) = 0.$$

D'après la question 1, $A - B = 0_n$, puis $A = B$.

Exercice 21 p. 30

1. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ stables par φ. Soit $u \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Il existe donc $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i.$$

Par linéarité de φ $\qquad \varphi(u) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\varphi\left(u_i\right)}_{\in F} \in F$

car F est stable par somme. Ce qui conclut.

2. • Justifions que $\mathrm{Ker}(\psi)$ est stable par φ.
Soit $u \in \mathrm{Ker}(\psi)$, montrons que $\varphi(u) \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
Par définition,

$$\psi(u) = 0_E \quad \Rightarrow \quad \varphi\big(\psi(u)\big) = \varphi(0_E) = 0_E.$$

Or, φ et ψ commutent,

$$\psi\big(\varphi(u)\big) = \varphi\big(\psi(u)\big) = 0_E.$$

Ainsi, $\varphi(u) \in \mathrm{Ker}(\psi)$, $\mathrm{Ker}(\psi)$ est stable par φ.

• Démontrons que $\mathrm{Im}(\psi)$ est stable par φ.
Soit $v \in \mathrm{Im}(\psi)$, par définition, il existe $u \in E$ tel que $\psi(u) = v$. Il vient

$$\varphi(v) = \varphi\big(\psi(u)\big) = \psi\big(\varphi(u)\big) = \psi(w),$$

où $w = \varphi(u)$. D'où $\varphi(v) \in \mathrm{Im}(\psi)$.
Finalement, $\mathrm{Im}(\psi)$ est stable par φ.

Exercice 22 p. 30

L'application $\varphi|_F$ est un endomorphisme injectif de dimension finie. Par le corollaire de la formule du rang, $\varphi|_F$ est un isomorphisme.

Exercice 23 p. 31

1. Faux.
Si A est inversible, $-A$ aussi mais la somme $A + (-A) = 0_n$ ne l'est pas.

2. Vrai.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours écrire A sous la forme

$$A = U + L$$

où U et L sont respectivement des matrices triangulaires supérieures et inférieures avec des coefficients diagonaux tous non nuls. Donnons un exemple avec une matrice A avec un coefficient diagonal nul

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les matrices U et L sont inversibles et sont solutions du problème.

Exercice 24 p. 31

1. On a

$$f \circ (-f) = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad (-f) \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Par la caractérisation de la bijectivité, f est bijective (donc injective et surjective) avec $f^{-1} = -f$.

2. Par hypothèse $f \neq \mathrm{id}_E$. Il existe alors $u \in E$ tel que $f(u) \neq u$. Montrons que $(u, f(u))$ est une base de E.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u) = 0_E \quad (L_1).$$

On applique f

$$\begin{array}{rcll} f\big(\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u)\big) & = & f(0_E) & f \text{ linéaire} \\ \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f^2(u) & = & 0_E & f^2 = -\mathrm{id}_E \\ \lambda \cdot f(u) - \mu \cdot u & = & 0_E & (L_2) \end{array}$$

En effectuant $\lambda L_1 - \mu L_2$, on trouve $(\lambda^2 + \mu^2) \cdot u = 0_E$.

Or $u \neq 0_E$ car $f(0_E) = 0_E$, alors que $f(u) \neq u$. Donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Une somme de carrés de réels (donc positifs) ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls. Donc $\lambda = \mu = 0$ et la famille $(u, f(u))$ est libre. De plus

$$\mathrm{Card}\big(u, f(u)\big) = 2 = \dim(E).$$

C'est une base de E.

3. Posons $v = f(u)$ de sorte que $f(v) = f^2(u) = -u$. La matrice de f dans la base (u, v) est

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque. Le résultat se généralise en dimension paire. Vérifier par récurrence qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que la famille

$$\big(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_n, f(x_n)\big)$$

soit une base de E.
Pour cela, prendre $x_2 \notin \mathrm{Vect}\big(x_1, f(x_1)\big)$, puis, $x_3 \notin \mathrm{Vect}\big(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)\big)$, etc. La matrice dans cette base est une matrice par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} J & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J & \ddots & 0_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & J \end{bmatrix}.$$

Exercice 25 p. 31

1. À partir de l'inclusion

$$\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\psi),$$

on a sur les dimensions

$$\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi)=\dim(\mathrm{Im}(\psi\circ\varphi))\leqslant\dim(\mathrm{Im}(\psi))=\mathrm{rg}(\psi).$$

On a aussi

$$\mathrm{Ker}(\varphi)\subset\mathrm{Ker}(\psi\circ\varphi)$$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\varphi))$,

puis par application de la formule du rang,

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\varphi)&=\dim(\mathrm{E})-\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))\\&\geqslant\dim(\mathrm{E})-\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\varphi))=\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. • Soit $v\in\mathrm{Im}(\varphi+\psi)$. Il existe $u\in\mathrm{E}$ tel que :

$$(\varphi+\psi)(u)=v,\quad\text{i.e}\quad\varphi(u)+\psi(u)=v.$$

Or, $\varphi(u)\in\mathrm{Im}(\varphi),\psi(u)\in\mathrm{Im}(\psi)$. On a bien

$$v\in\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi).$$

D'où $\mathrm{Im}(\varphi+\psi)\subset\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi)$.

• Par la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi))=\dim(\mathrm{Im}(\varphi))+\dim(\mathrm{Im}(\psi))\\&-\dim(\mathrm{Im}(\varphi)\cap\mathrm{Im}(\psi))\\&\leqslant\dim(\mathrm{Im}(\varphi))+\dim(\mathrm{Im}(\psi))\\&\dim(\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi))\leqslant\mathrm{rg}(\varphi)+\mathrm{rg}(\psi).\end{aligned}$$

De plus, l'inclusion de la question 1 donne :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi+\psi))\leqslant\dim(\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Im}(\psi)).$$

En conclusion, $\mathrm{rg}(\varphi+\psi)\leqslant\mathrm{rg}(\varphi)+\mathrm{rg}(\psi)$.

3.a) D'après la question 1 :

$$\mathrm{rg}(f\circ\varphi)\leqslant\mathrm{rg}(f)$$

et $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}\left((f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}\right)\leqslant\mathrm{rg}(f\circ\varphi)$.

On en déduit l'égalité $\mathrm{rg}(f\circ\varphi)=\mathrm{rg}(f)$.

3.b Il suffit de reprendre la rédaction précédente en composant à gauche.

Exercice 26 p. 31

1. On a, pour tous $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathrm{M},\mathrm{N}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\mathrm{M}+\mathrm{N})&=\mathrm{A}(\alpha\mathrm{M}+\mathrm{N})\mathrm{B}=\alpha\mathrm{AMB}+\mathrm{ANB}\\&=\alpha\varphi(\mathrm{M})+\varphi(\mathrm{N})\end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

2. Les déterminants sont non nuls, les matrices A et B sont inversibles et :

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix},\quad\mathrm{B}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-7&4\end{bmatrix}.$$

On peut donc poser l'application linéaire

$$\psi:\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\quad\mathrm{N}\longmapsto\mathrm{A}^{-1}\mathrm{NB}^{-1},$$

Or

$$\begin{cases}\forall\mathrm{M}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),&(\psi\circ\varphi)(\mathrm{M})=\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AMB})\mathrm{B}^{-1}=\mathrm{M}\\\forall\mathrm{N}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),&(\varphi\circ\psi)(\mathrm{N})=\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{NB}^{-1}\right)\mathrm{B}=\mathrm{N},\end{cases}$$

Autrement dit

$$\psi\circ\varphi=\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\quad\text{et}\quad\varphi\circ\psi=\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$

D'après la caractérisation de la bijectivité, φ est une application bijective et sa bijection réciproque existe et vaut $\varphi^{-1}=\psi$.

3. Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension, il suffit de prouver que la famille est libre.

$$\begin{aligned}&\alpha\mathrm{I}_2+\beta\mathrm{A}+\gamma\mathrm{B}+\delta\mathrm{AB}=0\\&\iff\alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\\&\quad+\gamma\begin{bmatrix}4&1\\7&2\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}15&4\\41&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\\&\iff\begin{cases}\alpha+2\beta+4\gamma+15\delta=0\\\beta+\gamma+4\delta=0\\5\beta+7\gamma+41\delta=0\\\alpha+3\beta+2\gamma+11\delta=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}\alpha+2\beta+4\gamma+15\delta=0\\\beta+\gamma+4\delta=0\\5\beta+7\gamma+41\delta=0\\\beta-2\gamma-4\delta=0&\mathrm{L}_4\longleftarrow\mathrm{L}_4-\mathrm{L}_1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}\alpha+2\beta+4\gamma+15\delta=0\\\beta+\gamma+4\delta=0\\2\gamma-21\delta=0&\mathrm{L}_3\longleftarrow\mathrm{L}_3-5\mathrm{L}_2\\-3\gamma-8\delta=0&\mathrm{L}_4\longleftarrow\mathrm{L}_4-\mathrm{L}_2\end{cases}\end{aligned}$$

Il vient

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

La famille $\mathscr{B}$ est libre. C'est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

• Le calcul Python donne

$$\mathrm{A}^2=5\mathrm{A}-\mathrm{I}_2\quad\text{et}\quad\mathrm{B}^2=6\mathrm{B}-\mathrm{I}_2.$$

Calculons les images de la base :

$$\varphi(I_2) = AB, \quad \varphi(A) = (5A - I_2)\,B = -B + 5AB,$$

$$\varphi(B) = A\,(6B - I_2) = -A + 6AB$$

$$\varphi(AB) = A(AB)B = A^2B^2 = (5A - I_2)\,(6B - I_2)$$
$$= I_2 - 5A - 6B + 30AB.$$

On conclut, la matrice demandée est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 6 & 30 \end{bmatrix}.$$

Exercice 27 p. 32

La formule du rang donne pour f et g :

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

$$\dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim E$$

et la formule de Grassmann impose

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim\left(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g\right)$$
$$= \dim\left(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g\right) = \dim E.$$
$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim\left(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g\right)$$
$$= \dim\left(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g\right) = \dim E.$$

La somme de ces deux dernières lignes donnent

$$\dim E + \dim E - \dim\left(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g\right) - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$$
$$= 2 \dim E.$$

Comme une dimension est nombre positif, nécessairement

$$\dim\left(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g\right) = \dim\left(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g\right) = 0.$$

D'où $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_E\}$, les sommes sont directes.

Exercice 28 p. 32

1. D'après la formule du rang

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - \operatorname{rg}(\varphi) = n - 1.$$

Autrement dit, le noyau admet un supplémentaire de dimension 1. Il existe donc $u_0 \in E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$ tel que

$$\operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Vect}(u_0) = E.$$

Comme $\varphi(u_0) \in E$, il existe $u_k \in \operatorname{Ker} \varphi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_k + \lambda u_0 = \varphi(u_0).$$

Puis

$$\varphi^2(u_0) = \varphi\left(\varphi(u_0)\right) = \varphi\left(u_k + \lambda u_0\right)$$
$$= \varphi\left(u_k\right) + \lambda\varphi(u_0)$$
$$= \lambda\varphi(u_0).$$

Vérifions que ce réel λ répond au problème.
Soit $u \in E$, il existe $v \in \operatorname{Ker} \varphi$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$v + \mu u_0 = u.$$

Puis

$$\varphi^2(u) = \varphi^2\left(v + \mu u_0\right) = \varphi\left(\varphi(v) + \mu\varphi(u_0)\right)$$
$$= \varphi\left(\mu\varphi(u_0)\right) = \mu\varphi^2(u_0)$$
$$= \mu\lambda\varphi(u_0) = \lambda\varphi\left(\mu u_0\right)$$
$$= \lambda\varphi\left(\mu u_0\right) + \mu\varphi(v)$$
$$= \lambda\varphi\left(\mu u_0 + v\right) = \lambda\varphi(u).$$

Cela étant vrai pour tout $u \in E$, $\varphi^2 = \lambda\varphi$.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cherchons l'application réciproque sous la forme $\alpha\varphi + \beta\,\mathrm{id}_E$.

$$\left(\alpha\varphi + \beta\,\mathrm{id}_E\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_E\right) = \alpha\varphi^2 + \beta\varphi - \alpha\varphi - \beta\,\mathrm{id}_E$$
$$= \alpha\lambda\varphi + \beta\varphi - \alpha\varphi - \beta\,\mathrm{id}_E$$
$$= (\alpha\lambda + \beta - \alpha)\varphi - \beta\,\mathrm{id}_E.$$

On constate que

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta - \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(\lambda - 1) = -\beta = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 1/(\lambda - 1) \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Avec ce choix,

$$\left(\frac{1}{\lambda - 1}\varphi - \mathrm{id}_E\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{id}_E$$

et $$\left(\varphi - \mathrm{id}_E\right) \circ \left(\frac{1}{\lambda - 1}\varphi - \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{id}_E.$$

Par la caractérisation de la bijectivité, $\varphi - \mathrm{id}_E$ est bijective et

$$(\varphi - \mathrm{id}_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1}(\varphi - \mathrm{id}_E).$$

Exercice 29 p. 32

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(1)$$
$$= P(1) + \lambda Q(1)$$
$$\varphi_1(P + \lambda Q) = \varphi_1(P) + \lambda\varphi_1(Q).$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\psi(P+\lambda Q) &= \int_{-1}^{1}(P+\lambda Q)(t)\,dt\\ &= \int_{-1}^{1}P(t)+\lambda Q(t)\,dt\\ &= \int_{-1}^{1}P(t)\,dt+\lambda\int_{-1}^{1}Q(t)\,dt\\ \psi(P+\lambda Q) &= \psi(P)+\lambda\psi(Q).\end{aligned}$$

Les applications φ_1, ψ sont linéaires. Comme l'ensemble d'arrivée des applications est $\mathbb{R}$: φ_1, ψ sont des formes linéaires.

2. Posons $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x],\mathbb{R})$. Justifions que la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est libre. Soient λ_1, λ_2 et λ_3, trois réels tels que

$$\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3=0_E.$$

Dit autrement, pour tout $P\in\mathbb{R}_2[x]$,

$$\lambda_1\varphi_1(P)+\lambda_2\varphi_2(P)+\lambda_3\varphi_3(P)=0.$$

C'est-à-dire $\quad\lambda_1P(1)+\lambda_2P(0)+\lambda_3P(-1)=0.$

On teste cette relation pour différents polynômes. On choisit ces polynômes pour avoir 0, -1 *et* 1 *comme racines.*

Pour $P(x)=x(x+1)$, on trouve directement $\lambda_1=0$.
De même, $P(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$ et $P(x)=(x-1)x$ donnent respectivement $\lambda_2=0$ et $\lambda_3=0$.
La famille est libre. Or, elle contient autant d'éléments que la dimension de E car :

$$\dim(E)=\dim\left(\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x],\mathbb{R})\right)=\dim(\mathbb{R}_2[x])=3.$$

Concluons : $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de E.

3.a) D'après ce qui précède, $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une famille génératrice de E. Ainsi, $\psi\in E$ est une combinaison linéaire de la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, il existe λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\psi=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3.$$

C'est-à-dire, pour tout $P\in\mathbb{R}_2[x]$,

$$\psi(P)=\lambda_1\varphi_1(P)+\lambda_2\varphi_2(P)+\lambda_3\varphi_3(P),$$

$$\int_{-1}^{1}P(t)\,dt=\lambda_1P(1)+\lambda_2P(0)+\lambda_3P(-1).$$

3.b) Testons la relation précédente avec le polynôme $P(x)=x(x+1)$,

$$\int_{-1}^{1}t(t+1)\,dt=\int_{-1}^{1}P(t)\,dt=2\lambda_1.$$

Or $\quad\displaystyle\int_{-1}^{1}t(t+1)\,dt=\int_{-1}^{1}t^2\,dt+\int_{-1}^{1}t\,dt=\frac{2}{3}.$

Il vient : $\quad\lambda_1=\dfrac{1}{3}.$

Remarque. Notons que l'on peut simplifier les calculs en remarquant que les fonctions $t\mapsto t^2$, $t\mapsto 1$ *sont paires et* $t\mapsto t$ *impaire.*
Avec les choix $P(x)=x^2-1$ et $P(x)=(x-1)x$, on trouve

$$\lambda_2=\frac{4}{3}\quad\text{et}\quad\lambda_3=\frac{1}{3}.$$

Exercice 30 p. 32

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\varphi^4\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Il existe donc $x\in E$ tel que

$$\varphi^4(x)\neq 0_E.$$

Justifions maintenant que

$$\mathscr{B}_x=\left(x,\varphi(x),\varphi^2(x),\varphi^3(x),\varphi^4(x)\right)$$

est une famille libre. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_4\in\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{4}\lambda_i\varphi^i(x)=0_E\quad(\bullet)$$

En appliquant φ^4 à chaque membre de l'égalité et par linéarité de φ^4, il vient

$$\sum_{i=0}^{4}\lambda_i\varphi^{i+4}(x)=\varphi^4\left(0_E\right)=0_E\quad(\star)$$

Or pour $i\geqslant 1$

$$\varphi^{i+4}(x)=\varphi^{i-1}\left(\varphi^5(x)\right)=\varphi^{i-1}\left(0_E\right)=0_E.$$

Dans la relation $(\star)$, il ne reste que

$$\lambda_0\underbrace{\varphi^4(x)}_{\neq 0_E}=0_E.$$

D'où $\lambda_0=0$. En appliquant ensuite $\varphi^3,\varphi^2,\dots$ à $(\bullet)$, on démontre de même que $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0,\dots$ Finalement, la famille $\mathscr{B}_x$ est libre.
Or cette famille contient 5 vecteurs alors que E est de dimension 4. Absurde et

$$\varphi^4=0_{\mathscr{L}(E)}.$$

2.• Raisonnons de nouveau par l'absurde en supposant

$$\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\varphi^2.$$