

Vitor Amadeu Souza

Fundamentos e Aplicações dos

Sistemas Elétricos de Potência

Obra Completa

© 2024 by Cerne Tecnologia e Treinamento Ltda.

© 2024 by Vitor Amadeu Souza

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida sem autorização prévia e escrita de **Cerne Tecnologia e Treinamento Ltda.** Este livro publica nomes comerciais e marcas registradas de produtos pertencentes a diversas companhias. O editor utiliza as marcas somente para fins editoriais e em benefício dos proprietários das marcas, sem nenhuma intenção de atingir seus direitos.

Dezembro de 2024

Direitos reservados por:

Cerne Tecnologia e Treinamento Ltda

Produção: Cerne Tecnologia e Treinamento

E-mail da Empresa: cerne@cerne-tec.com.br

Home Page: www.cerne-tec.com.br.com.br

Atendimento ao Consumidor: sac@cerne-tec.com.br

Contato com o Autor: vitor@cerne-tec.com.br



FEITO NO BRASIL

"A parte que ignoramos é muito maior que tudo quanto sabemos."

Platão

Cerne Tecnologia

A Cerne Tecnologia tem uma equipe preparada para desenvolvimento de projetos elétricos, eletrônicos, automação em diversas áreas: Médica, Entretenimento, Industrial, Robótica, Científica, Automobilística, Aeronáutica, etc. Trabalhamos com tecnologia microcontrolada usando o PIC, ARM, AVR, 8051, dsPIC, PIC24, PIC32 além do Arduino, Raspberry, Beaglebone etc. Desenvolvemos o projeto desde sua concepção até a entrega do produto final, passando pelas etapas de esquema elétrico, protótipo e desenvolvimento de circuito impresso.

Desenvolvemos aplicativos para smartphones/tablets Android e iOS e no desenvolvimento de softwares a nível PC para plataforma Windows, usando ferramentas como o Visual Basic, C# e C++.

Atuamos na parte de montagem de placas, onde podemos fornecer ambos os serviços de desenvolvimento de projetos e produção ou apenas um destes.

Desenvolvemos esquemas elétricos e layout de PCI, tanto em tecnologia convencional como SMD.

Temos a flexibilidade de customizar um de nossos produtos, de modo a atender a uma necessidade específica do cliente, tornando o custo de desenvolvimento menor se comparado a construção de um projeto desde a sua fase inicial.

Desenvolvemos e fornecemos kits didáticos para diversos microcontroladores além de apostilas, livros e e-books.

Na hora de desenvolver um projeto ou equipar seu laboratório não hesite em nos contatar. Entre em contato conosco através do endereço cerne-tec.com.br para obter mais informações.



cerne-tec.com.br

Sumário

01. Revisão de Números Complexos.....	11
02. Programação em Python.....	82
03. Matrizes.....	142
04. Sistemas Lineares.....	176
05. Simulações e Esquemas no Proteus.....	204
06. Fundamentos de Corrente Contínua.....	247
07. Geração de energia.....	382
08. Leis Fundamentais.....	407
09. Fundamentos de Corrente Alternada.....	428
10. Reatância Indutiva e Capacitiva.....	448
11. Circuitos RL, RC e RLC em série.....	464
12. Circuitos RL, RC e RLC em paralelo.....	488

13. Potência em circuitos CA.....	502
14. Correção do Fator de Potência.....	508
15. Valores em pu.....	515
16. Estrutura de um SEP.....	520
17. Matriz de Impedância e Admitância.....	527
18. Fluxo de Potência.....	539
19. Método de Gauss.....	543
20. Método de Gauss-Seidel.....	566
21. Método de Newton–Raphson.....	580
22. Método de Newton–Raphson Desacoplado.....	598
23. Fluxo de Potência Ótimo.....	613
24. Linhas de transmissão.....	628
25. HVDC.....	638
26. Monitoramento de Sistemas de Potência.....	647

27. Componentes Simétricos.....665

28. Cálculo da Corrente de Curto Circuito.....677

Introdução

O livro "Fundamentos e Aplicações dos Sistemas Elétricos de Potência" é uma obra essencial para estudantes, engenheiros e profissionais que desejam aprofundar seus conhecimentos na área de sistemas elétricos de potência. Esta obra abrange uma ampla gama de tópicos, desde conceitos matemáticos fundamentais até técnicas avançadas de análise e monitoramento de sistemas.

Nos primeiros capítulos, o leitor é introduzido a conceitos matemáticos vitais, como números complexos e matrizes, que são a base para a compreensão dos fenômenos elétricos. A programação em Python é abordada para fornecer ferramentas práticas de simulação e análise.

À medida que o livro avança, são explorados os fundamentos da corrente contínua e alternada, incluindo a geração de energia e as leis fundamentais que regem esses sistemas. Capítulos

dedicados a circuitos específicos, como RL, RC e RLC, tanto em série quanto em paralelo, ajudam a solidificar o entendimento dos comportamentos dinâmicos dos circuitos elétricos.

A obra também destaca a importância da correção do fator de potência e a utilização de valores em pu (por unidade), que são essenciais para a análise e operação eficiente dos sistemas elétricos de potência. A estrutura de um sistema elétrico de potência (SEP) é detalhada, juntamente com as matrizes de impedância e admitância, que são ferramentas fundamentais para a análise de redes elétricas.

Nos capítulos finais, o livro aborda métodos avançados de análise de fluxo de potência, incluindo os métodos de Gauss, Gauss-Seidel e Newton-Raphson, além de suas variações e aplicações práticas. Tópicos especializados, como linhas de transmissão, HVDC (corrente contínua de alta tensão) e componentes simétricos, são

discutidos para fornecer uma visão abrangente dos desafios e soluções na área de sistemas elétricos de potência.

Por fim, o livro trata do cálculo da corrente de curto-circuito, um aspecto crítico para a segurança e a confiabilidade dos sistemas elétricos. Com uma abordagem prática e teórica, esta obra é um recurso valioso para o desenvolvimento e a operação de sistemas elétricos de potência, preparando os leitores para enfrentar os desafios do setor com confiança e competência.

Capítulo I

Revisão de Números Complexos

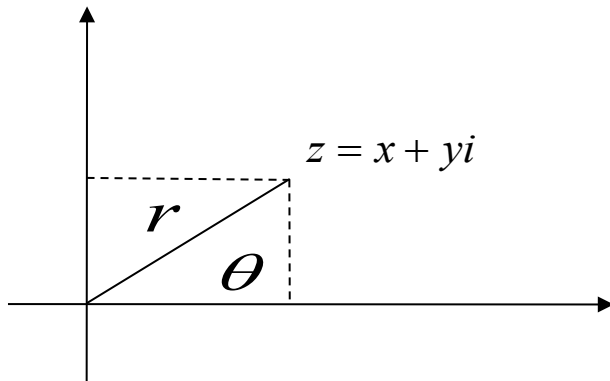
1. Introdução

Os números complexos surgiram com a necessidade de se obter raízes para números negativos onde estes não possuem solução no campo dos $\mathbb{R}$ (reais). Os números complexos são representados pela letra $\mathbb{C}$. Um número complexo é representado da seguinte forma:

$$z = a + bi \text{ ou } z = x + yi$$

Onde a ou x é a parte real enquanto que bi ou yi é a parte imaginária do número complexo z . Esta representação é chamada forma retangular.

Uma regra importante para o estudo dos números complexos é saber que $i^2 = -1$. Tal condição será usada em breve nos exercícios futuros. A representação de um plano complexo pode ser dada da seguinte forma:



Onde representaremos x como a parte Real dos complexos, como apresentado a seguir:

$$x = \text{Re}(z)$$

O valor de y será a parte imaginária, como exposto abaixo:

$$y = \text{Im}(z)$$

Obs: Em engenharia elétrica, é comum usar o j ao invés de i .

O ângulo θ formado no plano complexo será chamado de argumento do complexo, representado da seguinte forma:

$$\theta = \arg(z)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Onde θ é medido em radianos e é determinado por múltiplos de 2π e o mesmo não é definido para o ponto $z = 0 + 0i$. O módulo ou valor absoluto, ou seja, a distância entre a origem e o ponto formado pelo número complexo será representado pela letra r e será dado por:

$$r = |z|$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observe os dois números complexos abaixo:

$$z = x + yi$$

$$w = r + ti$$

Dois números complexos são iguais se e somente se a parte real e imaginária entre os mesmos forem iguais, ou seja, $x = r$ e $y = t$.

1.1 Exercícios

1) Dados os números complexos abaixo, diga quais que possuem apenas parte real, parte imaginária ou ambos.

a) $z = 10 + 5i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 10$ $\operatorname{Im}(z) = 5$

b) $z = 1$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 1$ $\operatorname{Im}(z) = 0$

c) $z = -2i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 0$ $\operatorname{Im}(z) = -2$

d) $z = -3 + 6i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = -3$ $\operatorname{Im}(z) = 6$

e) $z = 2 + 2i$

Resp: $\operatorname{Re}(z) = 2$ $\operatorname{Im}(z) = 2$

2. Propriedades dos Números Complexos

As seguintes propriedades são válidas nos números complexos:

$$i) z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$ii) z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$iii) z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$iv) z_1 (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

$$v) z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

$$vi) z \cdot 1 = z$$

$$vii) z + 0 = z$$

$$viii) z \cdot 0 = 0$$

Se um número complexo é escrito apenas com a parte imaginária, é chamado de imaginário puro, como apresentado a seguir:

$$z = 0 + 1i$$

$$z = i$$

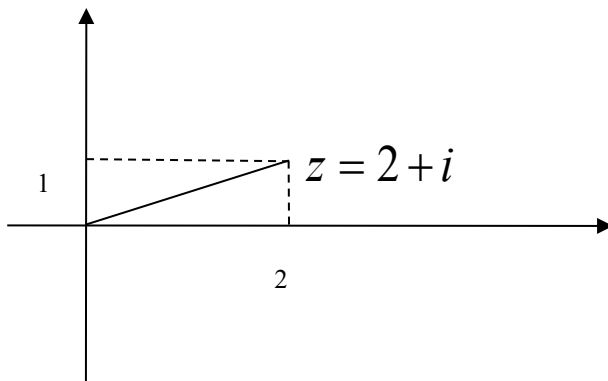
Podemos representar o conjunto dos números complexos da seguinte forma:

$$C = \{z = x + yi / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Onde $\mathbb{R} \subset C$, ou seja, o campo dos números reais está contido no campo dos números complexos.

2.1 Exercícios

1) Represente o número $z = 2 + i$ no plano complexo e encontre o seu argumento e seu módulo.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 26,56^\circ$$

$$\theta = 26,56^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{26,56\pi}{180} = \frac{13,28\pi}{90} = \frac{6,64\pi}{45} \text{ rad}$$

3. Conjugado de um Número Complexo

Um número complexo z terá seu conjugado quando o elemento bi tiver o sinal invertido. Ou seja, se $z = a + bi$ o conjugado de z será $\bar{z} = a - bi$. Observe que o conjugado de um complexo é representado por uma barra superior do complexo z .

3.1 Exercícios

1) Dê o conjugado dos complexos abaixo relacionados.

a) $z = 1 + 5i$

Resp: $\bar{z} = 1 - 5i$

b) $z = -9 - 20i$

Resp: $\bar{z} = -9 + 20i$

c) $z = -2i$

Resp: $\bar{z} = 2i$

d) $z = -3$

Resp: $\bar{z} = -3$

4. Adição de Complexos

A adição de números complexos é feita de maneira simples, bastando somar os elementos da parte real e imaginária. Observe o exemplo apresentado a seguir:

Dados $z_1 = -9 - 20i$ e $z_2 = 10 + 30i$ faça a adição destes números complexos.

$$z_1 + z_2 = (-9 - 20i) + (10 + 30i)$$

$$z_1 + z_2 = -9 + 10 - 20i + 30i$$

$$z_1 + z_2 = 1 + 10i$$

4.1 Exercícios

1) Faça as somas dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 + z_2 = 3 + 8i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 + z_2 = 5 + 5i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 + z_2 = 1 + i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 + z_2 = 2 + 6i$

5. Subtração de Complexos

A subtração de complexos é feita praticamente da mesma forma que a soma de complexos. Observe abaixo um exemplo elucidativo.

a) Dados $z_1 = 10 + 10i$ e $z_2 = 5 + 3i$ faça a subtração destes números complexos.

$$z_1 - z_2 = (10 + 10i) - (5 + 3i)$$

$$z_1 + z_2 = 10 + 10i - 5 - 3i$$

$$z_1 + z_2 = 5 + 7i$$

5.1 Exercícios

1) Faça as subtrações dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 - z_2 = -1 + 2i$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 - z_2 = 15 - 5i$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 - z_2 = -1 - 5i$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 - z_2 = 2 - 6i$

6. Multiplicação de Complexos

Para multiplicarmos dois números complexos, deveremos usar a regra distributiva, lembrando sempre que $i^2 = -1$. Observe o passo a passo do exemplo a seguir de forma a ficar mais claro tal conceito.

a)Dados $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + 5i$ faça a multiplicação destes números complexos.

$$z_1 * z_2 = (2 + 3i) * (4 + 5i)$$

$$z_1 * z_2 = 2 * 4 + 2 * 5i + 3i * 4 + 3i * 5i$$

$$z_1 * z_2 = 8 + 10i + 12i + 15i^2$$

Como $i^2 = -1$ teremos:

$$z_1 * z_2 = 8 + 22i + 15 * -1$$

$$z_1 * z_2 = 8 + 22i - 15$$

$$z_1 * z_2 = -7 + 22i$$

6.1 Exercícios

1) Faça as multiplicações dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

Resp: $z_1 * z_2 = (1 + 5i) * (2 + 3i)$

$$z_1 * z_2 = 2 + 3i + 10i + 15i^2$$

$$z_1 * z_2 = 2 + 13i - 15$$

$$z_1 * z_2 = -13 + 13i$$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $z_1 * z_2 = 10 * (-5 + 5i)$

$$z_1 * z_2 = -50 + 50i$$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $z_1 * z_2 = (-2i) * (1 + 3i)$

$$z_1 * z_2 = -2i - 6i^2$$

$$z_1 * z_2 = 6 - 2i$$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $z_1 * z_2 = 2 * 6i$

$$z_1 * z_2 = 12i$$

7. Divisão de Complexos

A divisão de números complexos é feita dividindo o numerador pelo denominador e pelo conjugado do denominador tanto no numerador quanto no denominador. Observe o exemplo a seguir.

a) Dados $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4i$ faça a divisão destes números complexos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(3+2i)(-4i)}{(4i)(-4i)} = \frac{-12i - 8i^2}{-16i^2} = \frac{-12i - 8(-1)}{-16(-1)} = \frac{-12i + 8}{16} = \frac{8 - 12i}{16}$$

$$\text{Logo, } \frac{z_1}{z_2} = \frac{8 - 12i}{16} = \frac{8}{16} - \frac{12}{16}i = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$$

7.1 Exercícios

1) Faça as divisões dos complexos apresentados a seguir.

a) $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 2 + 3i$

$$\text{Resp: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(1+5i) * (2-3i)}{(2+3i) * (2-3i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i + 10i - 15i^2}{4 - 6i + 6i - 9i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i-15(-1)}{4-9(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+7i+15}{4+9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{17+7i}{13}$$

b) $z_1 = 10$ e $z_2 = -5 + 5i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(10) * (-5 - 5i)}{(-5 + 5i) * (-5 - 5i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50 - 50i}{25 + 25i - 25i - 25i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50 - 50i}{25 - 25(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-50 - 50i}{50} = -1 - i$$

c) $z_1 = -2i$ e $z_2 = 1 + 3i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(-2i) * (1 - 3i)}{(1 + 3i) * (1 - 3i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i + 6i^2}{1 - 3i + 3i - 9i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i + 6(-1)}{1 - 9(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i - 6}{1 + 9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-6 - 2i}{10}$$

d) $z_1 = 2$ e $z_2 = 6i$

Resp: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(2) * (-6i)}{(6i) * (-6i)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{-36i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{-36(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-12i}{36} = \frac{-i}{3}$$

8. Potências de Unidades Imaginárias

As unidades imaginárias podem ter uma variedade imensa de expoentes, porém veremos que a partir do expoente 4 o mesmo

passa a se repetir, ficando assim fácil trabalhar com tais potências.

Observe os exemplos apresentados a seguir:

$$i^0 = 1$$

$$i^4 = 1$$

$$i^8 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i$$

$$i^9 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = -1$$

$$i^{10} = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^7 = -i$$

$$i^{11} = -i$$

Observe que conforme falado, a partir do expoente 4 os resultados ficam exatamente iguais à da primeira coluna apresentada. Agora, digamos que seja encontrado o resultado abaixo:

$$i^{49103} = ?$$

O que devemos fazer é dividir o expoente por 4 e o resto da divisão encontrado será o equivalente da potência do número complexo. Como 49103 dividido por 4 dá resto 3, temos a seguinte equivalência:

$$i^{49103} = i^3$$

Como sabemos que i^3 é igual a $-i$, sabemos que a resposta procurada é esta, logo:

$$i^{49103} = -i$$

8.1 Exercícios

1) Encontre o resultado das potências a seguir:

a) i^{100} Resp: 1

b) i^{124698} Resp: -1

c) $i^{6984151}$ Resp: -i

d) i^{779} Resp: -i

e) $i^{1234567}$ Resp: -i

f) i^{2036} Resp: 1

g) i^{366} Resp: -1

h) i^{10000} Resp: 1

9. Polinômios de Complexos

Podemos representar um complexo de forma de polinômio, como o exemplo apresentado a seguir:

$$p(z) = z^2 - 4z + 13$$

Agora encontremos $p(z)$ para $z = 2 + 3i$:

$$p(2 + 3i) = (2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13$$

$$p(2 + 3i) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 - 8 - 12i + 13$$

$$p(2 + 3i) = 4 + 12i + 9(-1) - 8 - 12i + 13$$

$$p(2 + 3i) = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13$$

$$p(2 + 3i) = 0$$

Logo, podemos perceber que $z = 2 + 3i$ é uma das raízes do polinômio $p(z) = z^2 - 4z + 13$. Podemos também encontrar as raízes de um polinômio. Por exemplo, quais seriam as raízes do polinômio abaixo:

$$p(z) = z^2 + 2iz - 5$$

A solução segue a mesma da equação do segundo grau convencional, precisando inicialmente achar o Δ e em seguida as raízes, observe:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2i)^2 - 4.1.(-5)$$

$$\Delta = 4i^2 + 20$$

$$\Delta = 4(-1) + 20$$

$$\Delta = -4 + 20$$

$$\Delta = 16$$

Agora podemos encontrar as raízes, como apresentado a seguir:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{16}}{2.1}$$

$$z = \frac{-2i \pm 4}{2}$$

$$z' = \frac{-2i + 4}{2} = -i + 2$$

$$z'' = \frac{-2i - 4}{2} = -i - 2$$

Logo as raízes do polinômio $p(z) = z^2 + 2iz - 5$ são $-i + 2$ e $-i - 2$.

9.1 Exercícios

1) Encontre as raízes dos polinômios a seguir:

a) $z^3 + 1 = 0$

Resp: $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$

$$z + 1 = 0$$

$$z = -1$$

Que é uma das raízes.

$$z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 1 - 4$$

$$\Delta = -3 = 3i^2$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{3i^2}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z'' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, -1 \right\}$$

b) $z + \frac{1}{z} = 0$

Resp: $z + \frac{1}{z} = z^2 + 1 = 0$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = i^2$$

$$z = \sqrt{i^2}$$

$$z = \pm i$$

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \{i, -i\}$$

c) $z^5 - z = 0$

Resp: $z^5 - z = z(z^4 - 1) = 0$

$z = 0$, é uma das raízes.

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = i^2$$

$$z = \sqrt{i^2}$$

$z = \pm i$, são raízes.

$$z^2 - 1 = 0$$

$$z^2 = 1$$

$$z = \sqrt{1}$$

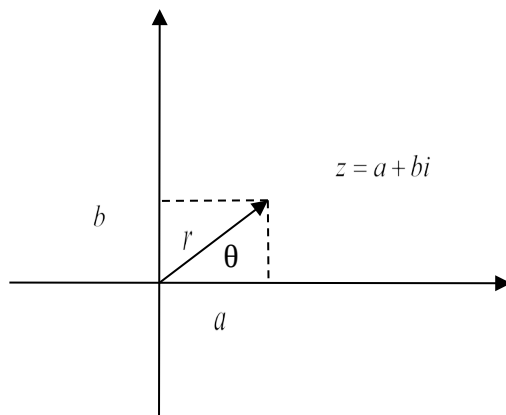
$z = \pm 1$, são raízes.

Logo, as raízes serão dadas por:

$$S = \{0, 1, -1, i, -i\}$$

10. Forma Triangular de um Número Complexo

Um número complexo também pode ser representado no plano completo ou plano de Argand-Gauss. Neste caso, a parte real é representada no eixo x e a parte imaginária no eixo y, observe abaixo:



Onde a é a parte real e b a imaginária. O valor de θ determina o ângulo entre a parte real e imaginária e r é o módulo, que é dado da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A forma triangular é assim definida da forma apresentada a seguir:

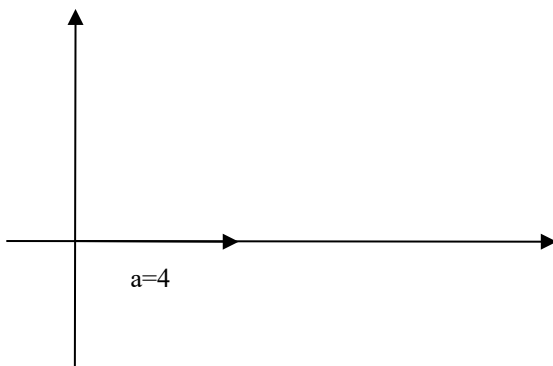
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Onde θ é o ângulo formado entre a e b dado em radianos e r é o módulo de z . Vejamos alguns exemplos apresentados a seguir para ficar claro o que foi abordado.

10.1 Exercícios

a) Determine a forma triangular do complexo $z = 4$ e represente-o graficamente.

Resp: Neste caso onde há apenas a parte real, o gráfico ficaria da seguinte forma:



Inicialmente, vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 0^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2}$$

$$r = |z| = 4$$

Podemos observar que o ângulo θ é zero, já que não há parte imaginária. Sendo assim, nossa representação na forma triangular fica da seguinte forma:

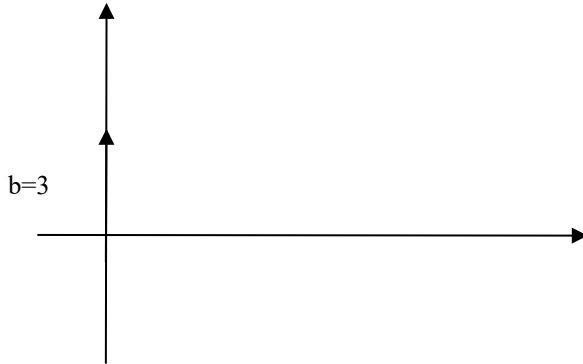
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 4(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

b) Determine a forma triangular do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = 3i$$

Resp: Como a parte real é nula, temos neste caso apenas a parte imaginária, onde nosso gráfico ficará da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 3^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{3^2}$$

$$r = |z| = 3$$

Podemos observar que o ângulo θ é 90° . Para convertermos graus para radianos, devemos multiplicar por $\frac{\pi}{180}$, sendo assim, 90° equivale a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Nossa representação na forma triangular fica da seguinte forma:

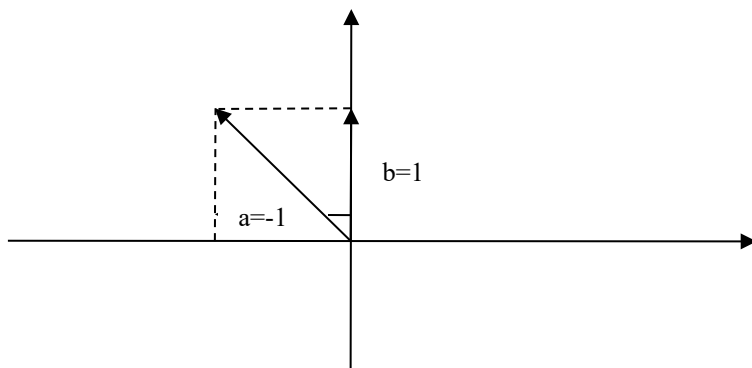
$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Determine a forma triangular do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = -1 + i$$

Resp: Neste exemplo temos tanto a parte real quanto imaginária, sendo assim o gráfico fica da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{2}$$

Agora podemos encontrar o ângulo θ da seguinte forma:

$$\cos \theta = \frac{C}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

Porém como estamos no segundo quadrante, devemos considerar os 90° do quadrante anterior, ficando assim com o ângulo θ de $90+45=135^\circ$. O próximo passo é converter para radianos, da forma apresentada a seguir:

$$135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Como temos o ângulo θ em radianos e o módulo, podemos escrever agora a forma triangular do número, como apresentado a seguir:

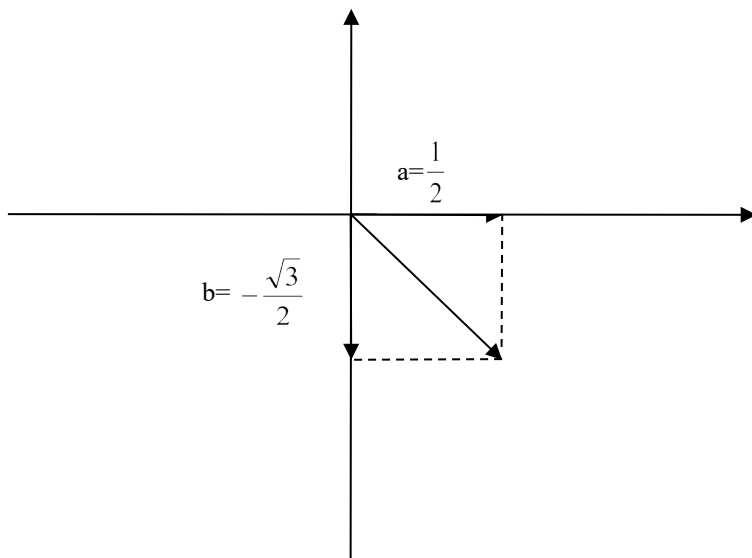
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4})$$

d) Determine a forma triangular do complexo apresentado a seguir, represente graficamente.

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resp: Neste exemplo temos tanto a parte real quanto imaginária, sendo assim o gráfico fica da seguinte forma:



Vamos encontrar o valor de r , ou seja, o módulo da seguinte forma:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$r = |z| = 1$$

Agora podemos encontrar o ângulo θ da seguinte forma:

$$\cos \theta = \frac{C}{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

Desta forma o ângulo será de 300° já que a circunferência completa possui 360° . Abaixo podemos ver a conversão para radianos:

$$300 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

De posse do módulo e do ângulo em radianos, podemos agora colocar na forma triangular, como apresentado a seguir:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 1(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3})$$

Algumas propriedades decorrentes da forma triangular são as apresentadas abaixo:

$$i) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$ii) \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$iii) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ com } z_2 \neq 0$$

$$iv) \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$v) |z| = |\bar{z}|$$

$$vi) \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$vii) \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$viii) \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{\bar{z}_2}}$$

11. Fórmula de De Moivre

Através desta fórmula, podemos calcular facilmente a potência de um número complexo na forma triangular. Observe a fórmula genérica apresentada abaixo:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Vejamos alguns exemplos apresentados a seguir de forma a elucidar o conceito apresentado.

11.1 Exercícios

a) Sendo $z = 1 + i$, calcule z^4 .

Resp: O primeiro passo é colocar na forma triangular, como apresentado a seguir, onde primeiramente é encontrado o módulo e em seguida o argumento.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

A forma triangular ficará da seguinte forma:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicando De Moivre, obteremos o seguinte valor de z^4 :

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

$$z^4 = \sqrt{2}^4 \left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^4 = 2^2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$z^4 = 4(\cos(\pi)), \text{ já que } i\sin(\pi) = 0.$$

12. Raízes de um número complexo

O objetivo é que possamos encontrar as raízes de um número complexo, onde este deverá estar disponível na forma triangular. Observe a forma genérica apresentada abaixo:

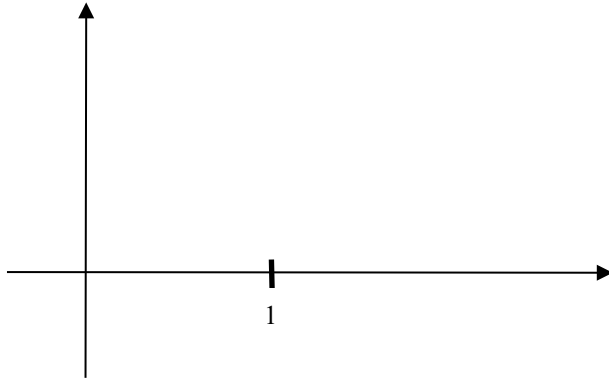
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$$

Onde n é a quantidade de raízes que se deseja encontrar e k é o número da raiz propriamente dita, podendo esta ser igual a $k = 0, 1, \dots, n-1$. Vejamos um exemplo prático para elucidar este conceito.

12.1 Exercícios

1) Encontre as raízes de $z^4 = 1$.

Resp: Representando em um plano complexo, obteremos o seguinte gráfico:



Vamos encontrar o módulo e o argumento deste número complexo, como apresentado a seguir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2}$$

$$r = 1$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{0}{1}\right)$$

$$\theta = 0^\circ$$

Logo, a equação na forma genérica ficará da seguinte forma:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1} \left(\cos\left(\frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) \right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{z} = 1(\cos(\frac{2k\pi}{4}) + isen(\frac{2k\pi}{4})), k = 0,1,2,3$$

Agora vamos encontrar as raízes para $k = 0,1,2,3$ separadamente, como apresentado a seguir:

$$k = 0$$

$$z_1 = (\cos(\frac{2.0.\pi}{4}) + isen(\frac{2.0.\pi}{4}))$$

$$z_1 = (\cos(0) + isen(0))$$

$$z_1 = 1$$

$$k = 1$$

$$z_2 = (\cos(\frac{2.1.\pi}{4}) + isen(\frac{2.1.\pi}{4}))$$

$$z_2 = (\cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2}))$$

$$z_2 = i$$

$$k = 2$$

$$z_3 = (\cos(\frac{2.2.\pi}{4}) + isen(\frac{2.2.\pi}{4}))$$

$$z_3 = (\cos(\pi) + isen(\pi))$$

$$z_3 = -1$$

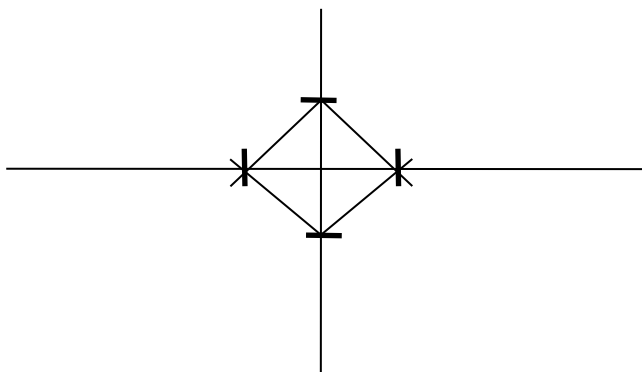
$$k = 3$$

$$z_4 = (\cos(\frac{2.3.\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{2.3.\pi}{4}))$$

$$z_4 = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\text{sen}(\frac{3\pi}{2}))$$

$$z_4 = -i$$

Observa-se que as raízes formam um quadrado, como apresentado a seguir:



Logo, o conjunto solução será dado por:

$$S = \{1, i, -1, -i\}$$

13. Fórmula exponencial de um número complexo

Um número complexo pode ser representado também na forma exponencial, bastando para isso se saber o seu módulo e o argumento do complexo. A fórmula exponencial está representada abaixo:

$$z = re^{i\theta}$$

Em que r é o módulo e θ o argumento.

13.1 Exercícios

1) Escreva na forma exponencial os seguintes números complexos.

a) $z = \sqrt{3} + i$

Vamos achar o módulo e argumento, como apresentado a seguir.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$r = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Logo, na forma exponencial o complexo ficará da seguinte forma:

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

b) $z = -1 + i$

Vamos achar o módulo e argumento, como apresentado a seguir.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right)$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Logo, na forma exponencial o complexo ficará da seguinte forma:

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

c) $z = -1 - i\sqrt{3}$

Vamos achar o módulo e argumento, como apresentado a seguir.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$r = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$