Oraux
corrigés et commentés

Concours BCPST

2e édition

Maths

Agro-Véto
G2E



ellipses

Vincent Devinck

Oraux

corrigés et commentés

Concours BCPST

Maths

Oraux

corrigés et commentés

Concours BCPST

Maths

Agro-Véto
G2E

2e édition

Vincent Devinck
Professeur agrégé et docteur en mathématiques
Professeur en classe préparatoire MPSI au lycée Auguste Mariette à Boulogne-sur-Mer

ellipses

Collection

Oraux

corrigés et commentés

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-110854

Dépôt légal : novembre 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Table des matières

Introduction 5

Concours Agro-Véto 9

Algèbre

Planche 1 . . . 11
Étude d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3

Planche 2 . . . 21
Évolution d'une population de souris et diagonalisation

Planche 3 . . . 31
Estimation du nombre de vecteurs propres d'une matrice

Planche 4 . . . 43
Projection orthogonale sur un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Planche 5 . . . 51
Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 *et diagonalisation*

Planche 6 . . . 61
Diagonalisabilité des éléments d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Planche 7 . . . 71
Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Planche 8 . . . 81
Probabilité qu'un vecteur soit vecteur propre d'une matrice

Analyse

Planche 9 . . . 91
Étude d'une fonction définie par une intégrale

Planche 10 . . . 103
Étude de la fonction définissant les racines d'une équation

Planche 11 . . . 113
Une suite récurrente d'ordre deux, mais non linéaire

Planche 12 . . . 123
Une suite récurrente de fonctions définies par des intégrales

Planche 13 . . . 133
Étude de deux suites implicites

Planche 14 . . . 143
Étude de fonctions définies par des produits

Planche 15 . . . 155
Suite d'intégrales et approximation du nombre π

Planche 16 . . . 165
Étude d'une suite récurrente non linéaire

Planche 17 . . . 177
Dérivabilité en zéro d'une fonction définie par une intégrale
Planche 18 . . . 187
Une suite de fonctions qui approxime une fonction du second degré
Planche 19 . . . 197
Étude d'une suite liée à la fonction arctangente

Probabilités

Planche 20 . . . 207
Descendance d'une fleur liée à la loi binomiale
Planche 21 . . . 217
Probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable
Planche 22 . . . 227
Tirages successifs dans des urnes
Planche 23 . . . 237
Évolution d'une population de bactéries procaryotes
Planche 24 . . . 247
Lancers de dés et temps d'attente pour obtenir tous les six
Planche 25 . . . 257
Une densité de probabilité définie par la racine d'une équation
Planche 26 . . . 267
Probabilité de ne jamais obtenir la boule noire
Planche 27 . . . 277
Détermination d'un intervalle de confiance lié au nombre π
Planche 28 . . . 289
Évolution d'une puce sur un axe gradué
Planche 29 . . . 301
Loi conjointe et simulation d'une probabilité conditionnelle
Planche 30 . . . 311
Temps de parcours moyens des participants d'une course

Concours G2E **323**

Couplage 1 . . . 325
Diagonalisation d'une matrice paramétrée, minimum d'un couple de variables suivant une loi géométrique
Couplage 2 . . . 331
Dérivation d'une application réciproque, loi de Poisson et loi binomiale, variable à densité
Couplage 3 . . . 339
Endomorphisme d'un espace de fonctions et diagonalisabilité, tirages dans une urne et variable discrète
Couplage 4 . . . 347
Convergence d'une suite de variables à densités, diagonalisation simultanée pour résoudre une équation matricielle
Couplage 5 . . . 353
Tirages successifs avec remise dans une urne et loi conjointe, comportement d'une suite d'intégrales

Couplage 6 361
Minimum et maximum pour un tirage sans remise dans une urne, diagonalisabilité et matrices semblables
Couplage 7 369
Probabilités discrètes et matrice de transition, suite de polynômes et factorisation
Couplage 8 377
Loi et espérance d'un minimum de variables à densités, puissances et diagonalisabilité de matrices d'ordre 2
Couplage 9 385
Minimum et maximum pour un tirage simultané dans une urne, diagonalisation de matrices symétriques positives
Couplage 10 393
Variables discrètes, lois binomiale et de Poisson, suite définie par une relation de récurrence
Couplage 11 399
Calculs des puissances d'une matrice, loi exponentielle et produit de convolution
Couplage 12 407
Endomorphisme d'un espace de polynômes et équation différentielle, deux premiers piles lors d'un lancer de pièces
Couplage 13 415
Loi uniforme et estimateurs sans biais et convergents, projection orthogonale et calcul de distance
Couplage 14 423
Équation différentielle linéaire du second ordre, loi exponentielle et théorème de transfert
Couplage 15 431
Loi de Bernoulli et moyenne empirique de variables non indépendantes, calcul des puissances d'une matrice d'ordre n
Couplage 16 439
Indépendance de deux événements, fonction arctangente et suite définie par une relation de récurrence
Couplage 17 447
Calculs d'espérances avec les lois binomiale et de Poisson, développement asymptotique d'une suite implicite
Couplage 18 455
Loi de Poisson et série exponentielle, convergence d'une suite et sommes de Riemann
Couplage 19 461
Lois exponentielle et géométrique, diagonalisabilité d'une matrice paramétrée
Couplage 20 469
Endomorphisme d'un espace de polynômes et diagonalisabilité, loi uniforme et produit de convolution

Introduction

Ce livre est destiné aux étudiants de classe préparatoire de la filière BCPST préparant les concours Agro-Véto et G2E. Il regroupe des sujets d'oraux correspondants à chacune des deux banques d'épreuves, en tenant compte de leurs particularités respectives. La première partie de l'ouvrage, qui rassemble trente sujets, est consacrée à l'épreuve de « Mathématiques pratiques et Informatique » (concours Agro-Véto). La deuxième partie correspond à l'oral de mathématiques du concours G2E et comporte vingt sujets.

Les sujets ont été choisis de manière à couvrir un large spectre du programme des deux années de classe préparatoire, conformément à ce qui est proposé à chaque session par les différents concours. Pour chaque exercice, un corrigé détaillé est proposé, le plus pédagogique possible, dans le souci d'exposer clairement les idées et les démarches du raisonnement. Les corrigés sont agrémentés de nombreux commentaires dans lesquels on y rappelle notamment des points de cours et de méthodologie. Des remarques issues des différents rapports de jury sont également apportées. On encourage le lecteur à prendre connaissance de ces rapports qui indiquent notamment les erreurs fréquemment commises par les candidats. Ceux-ci sont disponibles sur les sites internet des deux services de concours :

`https://www.concours-agro-veto.net`

et :

`https://concoursg2e.univ-lorraine.fr`

Le lecteur ne tirera profit de ce livre que s'il cherche des solutions personnelles des exercices avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est fondamentale.

Avant de préciser les spécificités de chacun des deux types d'oraux de mathématiques, faisons quelques commentaires généraux. L'oral de mathématiques est un échange entre le candidat et l'examinateur : les interrogateurs posent des questions visant à évaluer les compétences du candidat, et cherchent avec bienveillance à l'aider pour compléter son argumentation ou éventuellement se rendre compte d'une erreur. L'avantage d'une telle épreuve pour le candidat est de pouvoir donner oralement de nombreux arguments pour gagner du temps. Les rapports de jury indiquent par exemple que les calculs qui ont pu être réalisés lors de la préparation ne doivent pas forcément être totalement développés au tableau pendant l'interrogation.

Les sujets proposés peuvent être de longueurs ou de difficultés variables. Ces aspects sont pris en compte dans la notation dans un souci d'équité et il est souligné dans les rapports qu'il n'est pas nécessaire d'avoir traité la totalité du ou des exercices pour obtenir

une excellente note. Il est préférable d'avoir mené un raisonnement rigoureux et argumenté, reposant sur des connaissances solides, plutôt que d'avoir survolé les questions sans donner de réelles explications.

Signalons enfin que les calculatrices ne sont pas autorisées.

L'oral de mathématiques au concours Agro-Véto

L'intitulé de l'épreuve est « Mathématiques pratiques et Informatique ». Comme son nom l'indique, une part de l'évaluation se porte sur l'informatique. Un sujet (appelé « une planche » dans le présent ouvrage) est composé d'une question de cours suivie d'un premier exercice portant sur le programme de mathématiques et d'informatique de première ou de deuxième année de BCPST. Chaque candidat dispose de quarante minutes de préparation dans une salle dédiée où il a accès à un ordinateur. Une clé USB est fournie au début de la préparation sur laquelle il doit enregistrer les programmes relatifs à la partie informatique du sujet. Ensuite, le candidat est amené dans une salle d'interrogation, l'exposé dure également quarante minutes.

La question de cours est écrite sur le sujet donc le candidat en prend connaissance au début de sa préparation. Les seules questions de cours qui sont posées sont des énoncés de définitions ou de théorèmes et il ne s'agit pas de reproduire une démonstration. Signalons que le lecteur peut trouver une liste non exhaustive des questions qui ont été posées au cours de la session 2018 dans le rapport du jury associé (disponible sur le site du concours).

Il est conseillé au candidat de préciser dès le début de l'épreuve les questions qu'il a eu le temps d'aborder pendant la préparation, de sorte que l'examinateur gère au mieux le déroulement de l'oral. Le candidat est systématiquement interrogé sur une question d'informatique, qu'elle ait été préparée ou non, afin de vérifier les compétences acquises en informatique.

Les trente premières minutes de l'oral consistent en la résolution de la question de cours (2 minutes) et de l'exercice (28 minutes). Au cours des dix dernières minutes de l'oral, le candidat prend connaissance d'un exercice d'informatique (2 ou 3 questions en général) qu'il doit traiter.

Le lecteur pourra trouver sur le site internet du Service des Concours Agronomiques et Vétérinaires (SCAV) des exemples de sujets proposés lors des différentes sessions d'oraux. Toutes les planches présentes dans ce livre sont des sujets officiels à l'exception des planches numérotées 11, 12, 17, 18, 19, 28 et 30. Dans ce qui suit, les sujets sont regroupés par thèmes : il y a au total huit planches d'algèbre, onze planches d'analyse et onze planches de probabilités.

L'oral de mathématiques au concours G2E

Le candidat dispose de 20 minutes de préparation, suivies de 20 minutes d'exposé devant l'examinateur. Le sujet proposé (appelé « couplage » dans ce livre) comporte toujours deux exercices dont un portant sur les probabilités. Le jury conseille vivement

aux candidats, pendant la préparation, de consacrer le même temps de travail aux deux exercices plutôt que de s'acharner sur le premier et de n'avoir rien à dire sur le second (les deux exercices sont obligatoires).

Concours Agro-Véto

– Mathématiques pratiques et Informatique –

Temps de préparation : 40 minutes

Durée de l'interrogation : 40 minutes

Chaque candidat a accès à un ordinateur (sur lequel est installé Pyzo, Spyder, Excel et Geogebra) pendant la préparation et lors de l'exposé.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Planche 1

Question de cours

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout nombre réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. Écrire en `python` une fonction `f_a(x,y,z,a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de $f_a(u)$, le vecteur u étant de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathscr{B}$.
2. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.
   (b) Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.
3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathscr{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.
4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.
   (a) Montrer que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.
   (c) En déduire que 0 est la seule valeur propre de A. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?
5. Pour tout nombre réel x non nul, on pose $B(x) = A - x\,\mathrm{I}_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout nombre réel x non nul.
   (b) Exprimer $(A - x\,\mathrm{I}_3)(A + x\,\mathrm{I}_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice non préparé

1. Écrire une fonction `gene(n)` qui prend en entrée un entier naturel non nul `n` et qui retourne une chaîne de `n` caractères formée aléatoirement, de façon équiprobable, des caractères `'A'`, `'C'`, `'G'` et `'T'`.
2. Écrire une fonction `nbAC(g)` qui prend en entrée une chaîne de caractères `g` formée des caractères `'A'`, `'C'`, `'G'` et `'T'` et qui retourne le nombre de fois où la séquence `'AC'` est présente.
   Par exemple, `nb('GAGCACCCTACTTGGCGCGA')` retourne 2.

Un corrigé

Question de cours

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition notée F. Alors X admet une densité de probabilité si (et seulement si) :

- ⋆ F est continue sur $\mathbb{R}$;
- ⋆ F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Dans ces conditions, on obtient une densité f de X en dérivant F en chaque point où elle est dérivable et en posant par exemple $f(x) = 0$ en les autres points.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

On sait qu'un tel endormorphisme f_a de E existe et est unique car la famille $\mathscr{B}$ est une base de E.

1. Commençons par déterminer l'expression analytique de f_a. Soit u un vecteur de E de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathscr{B}$ de E, c'est-à-dire tel que $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Par linéarité de f_a et d'après les données de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} f(u) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(ae_1 + e_2 - ae_3) + z(ae_1 + e_2 - ae_3) \\ &= (ax + az)e_1 + (x + z)e_2 + (-ax - az)e_3 \end{aligned}$$

On en déduit la fonction suivante :

```
def f_a(x,y,z,a) :
    return (a*x+a*z,x+z,-a*x-a*z)
```

Commentaire

Cette unique question d'informatique du sujet ne pose pas de problème une fois l'expression analytique de f_a obtenue.

2.(a) Comme $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E, on a :

$$\mathrm{Im}(f_a) = \mathrm{Vect}\big(f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)\big) = \mathrm{Vect}(ae_1 + e_2 - ae_3)$$

car $f_a(e_1) = f_a(e_3)$ et $f_a(e_2) = 0$. Quelle que soit la valeur de a, le vecteur $ae_1 + e_2 - ae_3$ est non nul (car la famille (e_1, e_2, e_3) est libre et car le nombre réel par lequel est multiplié e_2, à savoir 1, est non nul). On en déduit donc que la famille génératrice $(ae_1 + e_2 - ae_3)$ de l'image de f_a est libre (car constituée d'un unique vecteur non nul). Ainsi :

une base de $\mathrm{Im}(f_a)$ est $(ae_1 + e_2 - ae_3)$

Commentaires

▷ On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels où E est de dimension finie et si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E, alors pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a l'égalité :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$$

▷ Une famille constituée d'un seul vecteur est libre si et seulement si le vecteur est *non nul*. Une famille constituée de deux vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2.(b) Comme l'espace de départ est de dimension finie égale à 3, on sait d'après le théorème du rang que :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

d'après la question 2.(a). Or on sait que $f_a(e_2) = 0$ et, par linéarité de f_a :

$$f_a(e_1 - e_3) = f_a(e_1) - f_a(e_3) = 0$$

puisque $f_a(e_1) = f_a(e_3)$. Ainsi, les vecteurs e_2 et $e_1 - e_3$ appartiennent au noyau de f_a. Calculons le rang de la famille $(e_2, e_1 - e_3)$ (en exprimant les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$ de E) :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(e_2, e_1 - e_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \end{matrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \end{matrix} \\ &= 2 \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(f_a))\end{aligned}$$

La famille $(e_2, e_1 - e_3)$ est donc libre et composée de deux vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f_a)$ qui est de dimension 2. Ainsi :

une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$

Commentaire

On peut aussi déterminer le noyau de f_a en utilisant l'expression analytique obtenue à la question 1.

3. Comme $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$:

la matrice de f_a exprimée dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$f_a \circ f_a$ est l'endomorphisme nul de E, c'est-à-dire $f_a \circ f_a = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Commentaires

▷ Il n'est pas nécessaire de refaire le calcul au tableau. Il suffit de signaler qu'on trouve la matrice nulle.

▷ On rappelle que si E, F et G sont des espaces vectoriels de dimensions finies munis de bases notées $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ respectivement, et si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Il est souvent plus facile d'effectuer un produit matriciel qu'une composition d'applications. Pour montrer que $f_a \circ f_a = 0_{\mathscr{L}(E)}$, il suffit de montrer que $A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

4.(a) Calculons le rang de la famille de vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) (en exprimant leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de E) :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \end{matrix} &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - a\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + a\,\mathrm{L}_1 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{rg}(e'_1, e'_2, e'_3) = 3$. De plus, cette famille comporte trois vecteurs et l'espace vectoriel E est de dimension 3 donc :

la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E

Commentaire

On ne peut pas échelonner la première matrice avec l'opération $L_2 \leftarrow a\,L_2 - L_1$ car celle-ci n'est pas licite pour $a = 0$.

4.(b) On a :

$$f_a(e'_1) = (f_a \circ f_a)(e_1) = 0_{\mathscr{L}(E)}(e_1) = 0$$

De plus, $e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f_a)$ donc $f_a(e'_2) = 0$. Enfin :

$$f_a(e'_3) = f_a(e_3) = f_a(e_1) = e'_1$$

Donc :

$$\boxed{\text{la matrice de } f_a \text{ dans la base } (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ de } E \text{ est } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Commentaire

Soient E et F deux espaces vectoriels munis de bases :

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$$

respectivement. On obtient la matrice d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ en déterminant les coordonnées des vecteurs $f(e_k)$ (où $k \in [\![1, n]\!]$) dans la base $\mathscr{C}$ de F.

4.(c) Les matrices A et A' représentent le même endomorphisme de E (à savoir f_a) dans des bases différentes de E. Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres. La matrice A' est triangulaire (supérieure) donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de la matrice. Ainsi :

$$\boxed{\text{la seule valeur propre de } A \text{ est } 0}$$

Comme 0 est valeur propre de A :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible}}$$

De plus (comme un endomorphisme et une matrice qui le représente ont le même rang) :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f_a) = \mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

et donc (d'après le théorème du rang) :

$$\dim(\mathrm{E}_0(A)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 \qquad \text{(l'ordre de la matrice } A\text{)}$$

Ainsi :

la matrice A n'est pas diagonalisable

Commentaires

Les résultats suivants, que l'on vient d'utiliser sont très importants.
▷ Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) sont les coefficients diagonaux de la matrice.

▷ Une matrice est inversible si et seulement si 0 n'appartient pas au spectre de la matrice.

▷ Une matrice est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à l'ordre de la matrice.

5.(a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors x n'est pas une valeur propre de A (sa seule valeur propre étant 0). La matrice $A - x\,\mathrm{I}_3$ est donc de rang maximal ce qui implique qu'elle est inversible. Ainsi :

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la matrice $B(x)$ est inversible

Commentaire

Il n'y a ici aucun calcul à faire par définition d'une valeur propre. En effet, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors une caractérisation du spectre $\mathrm{Sp}(M)$ de M est :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \,\middle|\, \mathrm{rg}(M - \lambda\,\mathrm{I}_n) < n\right\}$$

5.(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Par distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition (et en utilisant le fait que $A\,\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3\,A = A$), on a :

$$(A - x\,\mathrm{I}_3)(A + x\,\mathrm{I}_3) = A^2 - x^2\,\mathrm{I}_3 = -x^2\,\mathrm{I}_3$$

car on a vu à la question 3. que $A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Comme $-x^2 \neq 0$, il vient :

$$-\frac{1}{x^2}(A - x\,\mathrm{I}_3)(A + x\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3 \quad \text{soit encore} \quad B(x)\left(-x^{-2}A - x^{-2}\,\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$$

Or on a aussi $\left(-x^{-2}A - x^{-2}\,\mathrm{I}_3\right) B(x) = \mathrm{I}_3$ (car A commute avec elle-même et avec la matrice identité) donc :

l'inverse de la matrice $B(x)$ est $B(x)^{-1} = -x^{-2}A - x^{-2}\,\mathrm{I}_3$

Commentaire

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si (et seulement si) :

$$\exists\, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad MN = NM = \mathrm{I}_n \tag{1}$$

Le polynôme :

$$\mathrm{P} = (X - x)(X + x) + x^2 \in \mathbb{R}[X]$$

est un *polynôme annulateur de* A, ce qui signifie que $\mathrm{P}(A) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Comme celui-ci a un coefficient constant non nul, on peut *isoler la matrice identité* dans la relation $\mathrm{P}(A) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ afin de revenir à la définition (1) de l'inversibilité d'une matrice.

5.(c) Soient $(x, n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}$. On a $B(x) = A - x\,\mathrm{I}_3$. Les matrices A et $-x\,\mathrm{I}_3$ commutent car $-x\,\mathrm{I}_3$ est une matrice scalaire. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton et on a :

$$B(x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-x\,\mathrm{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k} A^k$$

Or on sait que $A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ donc, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a (puisque $k - 2 \in \mathbb{N}$) :

$$A^k = A^2 A^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} A^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient pour $n \geqslant 2$:

$$B(x)^n = (-x)^n\,\mathrm{I}_3 + n(-x)^{n-1} A + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k} A^k}_{=0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall (x, n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}, \qquad B(x)^n = (-x)^n\,\mathrm{I}_3 + n(-x)^{n-1} A}$$

car l'expression de $B(x)^n$ obtenue reste valable pour $n \in \{0, 1\}$ (en effet, on retrouve bien que $B(x)^0 = \mathrm{I}_3$ et $B(x)^1 = B(x) = A - x\,\mathrm{I}_3$).

Commentaire

Pour appliquer la formule du binôme de Newton, il ne faut pas oublier de signaler, voire de justifier, que les deux matrices mises en jeu commutent. On rappelle qu'une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\lambda\,\mathrm{I}_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, commute avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice non préparé

1. La méthode `choice`, disponible dans le module `random`, permet de choisir aléatoirement un élément d'une liste prise en argument. On commence donc par créer la liste constituée des quatre caractères `'A'`, `'C'`, `'G'` et `'T'`, dans laquelle nous allons choisir aléatoirement `n` fois un élément.

```
import random as rd

def gene(n) :
     L = ['A', 'C', 'G', 'T']
     chaine = ''
     for _ in range(n) :
          chaine += rd.choice(L)
     return chaine
```

Commentaire

On peut aussi utiliser la fonction `randint` qui nous permet ici de choisir aléatoirement un entier dans $[\![0, 3]\!]$; cet indice détermine le caractère choisi dans `L`.

```
L = ['A', 'C', 'G', 'T']
chaine = ''
for _ in range(n) :
     indice = rd.randint(0,3)
     chaine += L[indice]
```

2. On utilise une structure itérative et un compteur `compt` afin de dénombrer la séquence `'AC'` dans la chaîne de caractères `g` passée en argument.

```
def nbAC(g) :
     compteur = 0
     n = len(g)
     for k in range(0,n-1) :
          if g[k] == 'A' and g[k+1] == 'C' :
               compteur += 1
     return compteur
```

Commentaires

▷ Il faut être vigilant quant au dépassement d'indice (dans la boucle, la dernière position visitée par `k` est `n-2`).

▷ On peut remplacer la ligne 5 de cette fonction par :

```
if g[k:k+2] == 'AC' :
```

Rappelons que si `Objet` est une liste ou une chaîne de caractères de longueur $n > 0$ et si `i` et `j` sont des entiers tels que $0 \leqslant$ `i` $<$ `j` $\leqslant n$, alors `Objet[i:j]` est la sous-liste ou la sous-chaîne de caractères des éléments de `Objet` situés aux positions `i` à `j-1` incluses.

Planche 2

Question de cours

Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année ;
- la probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de $0,25$ et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.
Pour tout entier naturel n, notons respectivement j_n et a_n le nombre de jeunes souris femelles et de souris femelles adultes après n années.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :
$$\begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n \\ a_{n+1} &= 0,25j_n \end{cases}$$
On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.
Expliciter alors une matrice L telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $S_{n+1} = LS_n$.
2. En déduire une expression de S_n en fonction de L, S_0 et n.
3. (a) Déterminer (U_1, U_2) une base de vecteurs propres de L.
   (b) Soient λ et μ les coordonnées de S_0 dans la base (U_1, U_2). Exprimer S_n en fonction de λ, μ et n.
4. On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.
   (a) Écrire un programme informatique qui permette de retourner les listes $(j_0, j_1, \ldots, j_{10})$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{10})$.
   (b) Exprimer j_n et a_n en fonction de n.
   (c) Pour tout entier naturel n, on désigne par t_n le nombre total de souris femelles après n années. Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$$

(d) Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

(e) Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre cette population ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice non préparé

1. Écrire une fonction `somme_cumul` qui prend en entrée une liste L d'entiers et qui renvoie la liste des sommes cumulées, c'est-à-dire une liste M, de même longueur que L, telle que $M[i] = \sum_{k=0}^{i} L[k]$ pour tout indice i de L.

2. On propose à deux joueurs A et F la résolution d'une infinité de problèmes numérotés $0, 1, \ldots, n, \ldots$

   Ils débutent la résolution à l'instant 0 du problème numéro 0. Dès que l'un des joueurs termine la résolution du problème k, il passe au problème $k+1$.

   Le numéro d'un problème est attribué au joueur qui le résout en premier. En cas de simultanéité de la résolution d'un problème par les deux joueurs, celui-ci n'est pas attribué.

   On souhaite écrire une fonction Python `répartition(duréesA, duréesF)` qui, étant données les deux listes des durées de résolution des n premiers problèmes par les deux joueurs, renvoie les listes des numéros des problèmes attribués à A et F pour les n premiers problèmes.

   (a) `répartition([7,1,2,1,2],[4,2,4,3,1])` renvoie `([3,4],[0,1])`. Quel couple renvoie l'exécution de `répartition([3,2,5,1,1,1],[4,2,2,4,4,2])` ?

   (b) Écrire la fonction recherchée.

Un corrigé

Question de cours

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité f continue sur $\mathbb{R}$. Alors X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Dans ce cas, on définit l'espérance de X, notée $\mathrm{E}(X)$, par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

⋆ Chacune des j_n jeunes souris de la n^{e} génération donne naissance à une souris à la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ génération. Cela donne donc déjà j_n jeunes souris pour la nouvelle génération. D'autre part, chacune des a_n souris adultes donne naissance à 8 souris, ce qui comptabilise encore $8a_n$ jeunes souris pour la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ génération. Comme une souris ne survit pas à plus de deux générations, le nombre de jeunes souris à la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ génération est bien $j_{n+1} = j_n + 8a_n$.

⋆ D'après l'énoncé, les souris adultes d'une génération ne peuvent provenir que des jeunes souris de la génération précédente. En moyenne, un quart de ces souris devient adulte donc $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4}$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n \\ a_{n+1} &= 0,25 j_n \end{cases}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n + 8a_n \\ 0,25 j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{en posant } L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \text{ on l'égalité } S_{n+1} = LS_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

Commentaire

La mise en équation de l'évolution du nombre de souris est immédiate et la reformulation matricielle du système linéaire obtenu est très standard.

2. On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n, considérons la proposition $\mathscr{P}_n$: « $S_n = L^n S_0$ ».

⋆ **Initialisation :** montrons que la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie. On a :

$$L^0 S_0 = \mathrm{I}_2\, S_0 = S_0$$

donc la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.

⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$. On sait d'après la question 1. que $S_{n+1} = LS_n$. Par hypothèse de récurrence (et par associativité du produit matriciel), on a alors :

$$S_{n+1} = L(L^n S_0) = (LL^n)S_0 = L^{n+1} S_0$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

⋆ **Conclusion :** par principe de récurrence (simple), on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = L^n S_0}$$

Commentaires

▷ Les suites géométriques sont réservées aux suites de nombres réels. On ne peut donc pas donner cet argument pour conclure directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = L^n S_0$. Il faut l'établir à l'aide d'un raisonnement par récurrence, même si celle-ci est très classique et immédiate. Une bonne partie de cette récurrence doit pouvoir se faire oralement.

▷ Une erreur classique est d'écrire :

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = S_0 L^n \text{ »}$$

Ceci n'a aucun sens car le produit matriciel figurant à droite de cette égalité est incompatible.

3.(a) Commençons par déterminer les valeurs propres de la matrice L. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } L \iff \operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_2) < 2 &\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0,25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2\end{aligned}$$

Les valeurs propres de L sont donc -1 et 2. Or :

$$L + \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0,25 & 1 \end{pmatrix}$$

et (en notant C_1 et C_2 les colonnes de la matrice) on a $4\,\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (qui est non nul) est un vecteur propre de L associé à la valeur propre -1.
De même :

$$L - 2\,\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0,25 & -2 \end{pmatrix}$$

et on observe que $8\,\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $U_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ (qui est non nul) est un vecteur propre de L associé à la valeur propre 2.
La famille de vecteurs (U_1, U_2) est libre dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ car U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires. La famille comporte de plus deux vecteurs, ce qui coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, d'où :

> la famille (U_1, U_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de L (associés respectivement aux valeurs propres -1 et 2) où :
>
> $$U_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Commentaire

Le calcul standard des sous-espaces propres de la matrice L est tout aussi immédiat.

3.(b) Notons P la matrice de passage de la base canonique vers la base (U_1, U_2). On a l'égalité $L = PDP^{-1}$ où on a posé $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence (simple), montrons que pour tout entier naturel n la proposition $\mathscr{P}_n$: « $L^n = PD^nP^{-1}$ » est vraie.

⋆ **Initialisation :** on a

$$PD^0P^{-1} = P\,\mathrm{I}_2\,P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_2 = L^0$$

donc la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.

⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence (et par associativité du produit matriciel), on a :

$$\begin{aligned} L^{n+1} = L^nL = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^n\,\mathrm{I}_2\,DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

⋆ **Conclusion :** par principe de récurrence simple, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad L^n = PD^nP^{-1}$$

On en déduit que (puisque P est inversible et d'après la question 2.) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P^{-1}S_n = D^nP^{-1}S_0$$

Ici, $P^{-1}S_0$ est la matrice des coordonnées du vecteur S_0 exprimé dans la base (U_1, U_2), notée $P^{-1}S_0 = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$. On a (puisque la matrice D est diagonale) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P^{-1}S_n = \begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^n\lambda\\ 2^n\mu\end{pmatrix}$$

Nous avons obtenu la matrice des coordonnées du vecteur S_n exprimé dans la base (U_1, U_2). Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = (-1)^n\lambda U_1 + 2^n\mu U_2 = \begin{pmatrix}4(-1)^n\lambda + 8\times 2^n\mu\\ (-1)^{n+1}\lambda + 2^n\mu\end{pmatrix}}$$

Commentaires

▷ La récurrence établie ici est très classique.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. La matrice du vecteur S_n exprimé dans la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est $S_n = \begin{pmatrix}j_n\\ a_n\end{pmatrix}$. Par contre, la matrice de ses coordonnées dans la base (U_1, U_2) est $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = P^{-1}S_n$ par définition même de P (la matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base (U_1, U_2) vers la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$).

▷ Plus généralement, on rappelle que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases d'un même espace vectoriel E de dimension finie alors, en notant respectivement X et Y les matrices des coordonnées d'un vecteur x de E dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on a l'égalité :

$$Y = \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}X$$

où $\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ vers la base $\mathscr{B}$ de E.

4.(a) La fonction suivante prend en entrée le nombre n de générations :

```
def souris(n) :
    j = 20 #nombre de jeunes au début
    a = 0 #nombre d'adultes au début
    J = [20] #liste des jeunes
    A = [0] #liste des adultes
    for k in range(n) :
        j, a = j+8*a, 0.25*j
        J.append(j)
        A.append(a)
    return J, A
```

Un appel à la fonction `souris` avec la valeur $n = 10$ fournit les deux listes :

`[20,20,60.0,100.0,220.0,420.0,860.0,1700.0,3420.0,6820.0,13660.0]` (jeunes)

et :

`[0,5.0,5.0,15.0,25.0,55.0,105.0,215.0,425.0,855.0,1705.0]` (adultes)

Commentaire

On rappelle que la commande `a, b = b, a` permet de faire une affectation simultanée. L'enchaînement :

```
j = j+8*a
a = 0.25*a
```

dans la boucle `for` ne donne pas le résultat escompté.

4.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons les coordonnées (λ et μ) du vecteur $S_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (U_1, U_2). Par définition de U_1 et U_2, on a :

$$S_0 = \lambda U_1 + \mu U_2 = \begin{pmatrix} 4\lambda + 8\mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda & + & 2\mu & = & 5 \\ -\lambda & + & \mu & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \lambda = \mu = \frac{5}{3}$$

On applique maintenant le résultat obtenu à la question 3.(b) :

$$\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3}(-1)^n + \frac{40}{3}2^n \\ \frac{5}{3}(-1)^{n+1} + \frac{5}{3}2^n \end{pmatrix}$$

et donc (par identification) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad j_n = \frac{20}{3}(-1)^n + \frac{40}{3}2^n \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{5}{3}(-1)^{n+1} + \frac{5}{3}2^n}$$

Commentaire

Une autre méthode pour déterminer le terme général des deux suites est de remarquer que la suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. En effet, en exploitant le système obtenu à la question 1., on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

4.(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre t_n de souris femelles après n années est :

$$\begin{aligned} t_n = j_n + a_n &= \frac{20}{3}(-1)^n + \frac{40}{3}2^n + \frac{5}{3}(-1)^{n+1} + \frac{5}{3}2^n \\ &= \left(\frac{20}{3} - \frac{5}{3}\right)(-1)^n + 15 \times 2^n \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n = 15 \times 2^n + 5(-1)^n}$$

4.(d) Pour tout entier naturel n, on a $t_n \neq 0$ et :

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{30 \times 2^n - 5(-1)^n}{15 \times 2^n + 5(-1)^n} = \frac{30 - 5\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{15 + 5\left(\frac{-1}{2}\right)^n}$$

en factorisant par 2^n. Comme $-\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 2}$$

On peut donc en déduire que :

à long terme, la population de souris femelles tend à doubler d'année en année

Commentaire

Il est important de préciser que la suite géométrique converge vers 0 car la raison (qui vaut ici $-\frac{1}{2}$) appartient à l'intervalle $]-1, 1[$.

4.(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_n \neq 0$ et :

$$\frac{j_n}{a_n} = \frac{20(-1)^n + 40 \times 2^n}{5(-1)^{n+1} + 5 \times 2^n} = \frac{40 + 20\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{j_n}{a_n} = \dfrac{40}{5} = 8$. Ainsi :

la population tend vers une répartition de 8 jeunes pour 1 adulte

★ ★ ★

Exercice non préparé

1. La variable `s` dans la fonction ci-dessous permet de calculer les sommes cumulées, que l'on ajoute progressivement dans la liste `M` demandée.

```
def somme_cumul(L) :
     n = len(L)
     M = []
     s = 0
     for i in range(n) :
          s += L[i]
          M.append(s)
     return M
```


Commentaire

On peut éviter d'introduire la variable `s` en procédant comme suit :

```
M = [L[0]]
for i in range(1,n) :
     M.append(L[i]+M[i-1])
```

En effet, l'élément en position `i` $\in [\![1, \mathtt{n}-1]\!]$ de la liste `M` est la somme de la somme cumulée précédente (donc `M[i-1]`) et de l'élément en position `i` dans `L` (à savoir `L[i]`).

2.(a) Ce sont les temps cumulés que l'on regarde pour attribuer la résolution d'un problème à un joueur plutôt qu'à l'autre. Les listes des temps de résolution (cumulés) sont :

- ⋆ `[3,5,10,11,12,13]` pour le joueur A ;
- ⋆ et `[4,6,8,12,16,18]` pour le joueur F.

On observe donc que le joueur A a remporté les épreuves numéros 0, 1, 3, 4 et 5. Quant au joueur B, il gagne l'épreuve numéro 2 uniquement. Ainsi :

le couple renvoyé par la fonction est `([0,1,3,4,5],[2])`

2.(b) On utilise la fonction `somme_cumul` afin d'obtenir les temps cumulés. En comparant les temps cumulés, on peut ensuite construire les listes `listeA` et `listeF` qui contiennent les problèmes résolus (en premier) par chacun des deux joueurs.

```
def répartition(duréesA, duréesF) :
     durées_cumulA = somme_cumul(duréesA)
     durées_cumulF = somme_cumul(duréesF)
     listeA, listeF = [], []
     n = len(duréesA)
     for k in range(n) :
          if durées_cumulA[k] < durées_cumulF[k] :
               listeA.append(k)
          if durées_cumulA[k] > durées_cumulF[k] :
               listeF.append(k)
     return listeA, listeF
```

Commentaire

Un problème n'est pas attribué si les temps (cumulés) de résolution sont égaux, il ne faut donc pas utiliser l'instruction `else`.

Planche 3

Question de cours

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter la loi de X, et donner son espérance et sa variance.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

Pour les programmes `python`, on pourra utiliser la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy`, qui permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
Exemple d'utilisation de cette fonction :

```
import numpy as np
V = np.array([[1,2,1] , [2,3,2]])
print(np.linalg.matrix_rank(V))
```

La valeur renvoyée par `python` est alors : `2`.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A.

1. (a) Écrire une fonction `python` prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.
   On pourra représenter les vecteurs par des listes.
   (b) Écrire une fonction `python` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est vecteur propre de A.
2. (a) Vérifier que les vecteurs $(1, -2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. (a) Écrire un programme `python` permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).
   (b) Pour un entier naturel N non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).

4. Soit N un entier naturel non nul. Une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $[\![-N, N]\!]^3$.
   (a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre parmi ces N vecteurs ?
   (b) Quelle est la limite de $N \ln\left(1 - \dfrac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)$ quand N tend vers $+\infty$?
   En déduire la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice non préparé

1. Écrire une fonction `somme(f,a,b,N)` qui retourne $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)$ où f est une fonction, a et b deux réels ($a < b$), et N un entier supérieur à 1.
2. Écrire une fonction prenant en entrée une fonction `f`, deux réels `a`, `b` et qui retourne une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Utiliser cette fonction pour donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de l'égalité :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} f\left(\frac{t}{1-t}\right)\,\mathrm{d}t$$

Un corrigé

Question de cours

On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

- ⋆ l'univers image de X est $X(\Omega) = \mathbb{N}$;
- ⋆ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k\,!}$.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance qui valent :

$$\mathrm{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \lambda$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

1.(a) On utilise la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy` suggérée dans l'énoncé. Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ sont colinéaires si et seulement si la famille (u, v) est liée, c'est-à-dire si et seulement si le rang de la famille (u, v) n'est pas maximal (soit encore $\mathrm{rg}(u, v) \leqslant 1$).

```
import numpy as np
def colineaires(u,v) :
     M = np.array([u,v])
     r = np.linalg.matrix_rank(M)
     if (r == 2) : #la famille (u,v) est libre
          return False
     return True
```

1.(b) Soit $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $U \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. On sait que U est un vecteur propre de la matrice A si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $AU = \lambda U$, ce qui équivaut à la colinéarité des matrices colonnes AU et U (que l'on vérifie à l'aide de la fonction `colineaires` précédente). On écrit une fonction `vecteur_propre` qui calcule dans un premier temps le vecteur correspondant au produit matriciel AU.

```
def vecteur_propre(u) :
     v = [-4*u[0]-3*u[1]-3*u[2],2*u[1],6*u[0]+3*u[1]+5*u[2]]
     if (colineaires(u,v) and u != [0,0,0]) :
          return True
     return False
```

Commentaires

▷ Il ne faut pas oublier qu'un vecteur propre est nécessairement *non nul*.

▷ Indiquons également qu'il est possible de calculer le produit matriciel AU à l'aide de la commande `np.dot`. On remplace alors la deuxième ligne du programme précédent par :

```
A = np.array([[-4,-3,-3],[0,2,0],[6,3,5]])
v = np.dot(A,u)
```

2.(a) Tout d'abord, les trois vecteurs proposés sont non nuls. De plus :

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

et donc (puisque A est la matrice de f exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$$f(1,-2,0)=2(1,-2,0) \quad \text{et} \quad f(0,1,-1)=2(0,1,-1) \quad \text{et} \quad f(1,0,-1)=-(1,0,-1)$$

Ainsi :

les vecteurs $(1,-2,0)$ et $(0,1,-1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 tandis que $(1,0,-1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1

Commentaire

Cette question, qui ne pose aucun problème, est surtout l'occasion de contrôler que la fonction établie à la question 1.(b) est juste. Il est d'ailleurs opportun de mettre en œuvre cette fonction ici.

2.(b) Posons $u=(1,-2,0)$, $v=(0,1,-1)$ et $w=(1,0,-1)$. En notant respectivement $\mathrm{E}_2(f)$ et $\mathrm{E}_{-1}(f)$ les sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres 2 et -1, on a les inclusions suivantes (d'après la question 2.(a) et car un sous-espace propre est un espace vectoriel) :

$$\mathrm{Vect}(u,v)\subset \mathrm{E}_2(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Vect}(w)\subset \mathrm{E}_{-1}(f) \tag{1}$$

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc $\mathrm{rg}(u,v)=2$ et le vecteur w est non nul donc $\mathrm{rg}(w)=1$. Les inclusions (1) fournissent donc les inégalités suivantes (en considérant les dimensions) :

$$2\leqslant \dim(\mathrm{E}_2(f)) \qquad \text{et} \qquad 1\leqslant \dim(\mathrm{E}_{-1}(f))$$

Ainsi :

$$3\leqslant \dim(\mathrm{E}_2(f))+\dim(\mathrm{E}_{-1}(f))\leqslant 3$$

car une somme de dimensions des sous-espaces propres de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est inférieure ou égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$. Finalement :

$$\dim(\mathrm{E}_2(f)) + \dim(\mathrm{E}_{-1}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

et donc :

l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable

Commentaires

▷ Il n'est pas nécessaire de calculer (par la méthode standard) les sous-espaces propres $\mathrm{E}_2(f)$ et $\mathrm{E}_{-1}(f)$. On rappelle qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à n.

▷ Nous pouvons également déduire du raisonnement précédent que le spectre de f est $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 2\}$ et que :

$$\dim(\mathrm{E}_2(f)) = 2 \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{E}_{-1}(f)) = 1$$

3.(a) On considère chaque vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées appartiennent à l'intervalle $[\![-10, 10]\!]$. La fonction `vecteur_propre` permet de tester si le vecteur choisi est un vecteur propre de la matrice A.

```
nb = 0
for i in range(-10,11) :
     for j in range(-10,11) :
          for k in range(-10,11) :
               if vecteur_propre([i,j,k]) :
                    nb = nb+1
print(nb)
```

Cette fonction permet de dénombrer 240 vecteurs propres de A dans l'ensemble $[\![-10, 10]\!]^3$.

Commentaire

Il est inutile de rajouter une condition du type `[i,j,k] != [0,0,0]` car le vecteur nul a déjà été pris en considération dans la fonction `vecteur_propre` de la question 1.(b).

3.(b) On a vu à la question 2.(b) que les sous-espaces propres de f sont :

$$\mathrm{E}_2(f) = \mathrm{Vect}\big((1,-2,0),(0,1,-1)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_{-1}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1)\big)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Notons V_N l'ensemble des vecteurs propres de f appartenant à $[\![-N, N]\!]^3$. Notons encore $V_{2,N}$ l'ensemble des vecteurs propres (non nuls donc) de f associés à la valeur propre 2 dont les coordonnées appartiennent à $[\![-N, N]\!]$, c'est-à-dire :

$$V_{2,N} = \mathrm{E}_2(f) \cap \big([\![-N, N]\!]^3 \setminus \{(0,0,0)\}\big)$$

et, de la même manière, posons :

$$V_{-1,N} = \mathrm{E}_{-1}(f) \cap \left([\![-N, N]\!]^3 \setminus \{(0,0,0)\} \right)$$

On a alors l'égalité $V_N = V_{2,N} \cup V_{-1,N}$. On sait de plus que $\mathrm{E}_2(f) \cap \mathrm{E}_{-1}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $V_{2,N} \subset \mathrm{E}_2(f)$ et $V_{-1,N} \subset \mathrm{E}_{-1}(f)$ donc :

$$V_{2,N} \cap V_{-1,N} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{card}(V_N) = \mathrm{card}\,(V_{2,N}) + \mathrm{card}\,(V_{-1,N})$$

Il reste donc à dénombrer les ensembles $V_{2,N}$ et $V_{-1,N}$. Par définition :

$$\begin{aligned} V_{-1,N} &= \left\{ (\alpha, 0, -\alpha) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \cap \left([\![-N, N]\!]^3 \setminus \{(0,0,0)\} \right) \\ &= \left\{ (\alpha, 0, -\alpha) \,\middle|\, \alpha \in [\![-N, N]\!] \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

donc (puisque deux vecteurs du type $(\alpha, 0, -\alpha)$ et $(\beta, 0, -\beta)$ sont différents si $\alpha \neq \beta$) :

$$\mathrm{card}\,(V_{-1,N}) = \mathrm{card}\,([\![-N, N]\!] \setminus \{0\}) = (2N+1) - 1 = 2N \tag{2}$$

Dénombrons maintenant l'ensemble $V_{2,N}$. Tout d'abord :

$$\mathrm{E}_2(f) = \left\{ (\alpha, -2\alpha + \beta, -\beta) \,\middle|\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ainsi, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (\alpha, -2\alpha+\beta, -\beta) \in V_{2,N} &\iff \left\{ \begin{array}{c} -N \leqslant \alpha \leqslant N \\ -N \leqslant -2\alpha + \beta \leqslant N \\ -N \leqslant -\beta \leqslant N \\ (\alpha, \beta) \neq (0,0) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} -N \leqslant \alpha \leqslant N \\ -N \leqslant \beta \leqslant N \\ 2\alpha - N \leqslant \beta \leqslant 2\alpha + N \\ (\alpha, \beta) \neq (0,0) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} -N \leqslant \alpha \leqslant N \\ \max(-N, -N+2\alpha) \leqslant \beta \leqslant \min(N, N+2\alpha) \\ (\alpha, \beta) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in [\![-N, N]\!]$, on pose :

$$W_\alpha = \left\{ (\alpha, -2\alpha+\beta, -\beta) \,\middle|\, \max(-N, -N+2\alpha) \leqslant \beta \leqslant \min(N, N+2\alpha) \text{ et } (\alpha, \beta) \neq (0,0) \right\}$$

et on a l'égalité :

$$V_{2,N} = \bigcup_{\alpha=-N}^{N} W_\alpha$$

Les ensembles intervenant dans cette réunion sont deux à deux disjoints donc :

$$\mathrm{card}(V_{2,N}) = \sum_{\alpha=-N}^{N} \mathrm{card}(W_\alpha) \tag{3}$$

On dénombre les ensembles W_α en distinguant trois cas (remarquons que la condition $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ n'est importante que si $\alpha = 0$). Soit $\alpha \in [\![-N, N]\!]$.

⋆ Premier cas : $\alpha < 0$.
Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(W_\alpha) &= \operatorname{card}\left([\![\max(-N, -N+2\alpha), \min(N, N+2\alpha)]\!]\right)\\ &= \operatorname{card}\left([\![-N, N+2\alpha]\!]\right)\\ &= 2N + 2\alpha + 1\end{aligned}$$

⋆ Deuxième cas : $\alpha = 0$.
On a ici :

$$\operatorname{card}(W_0) = \operatorname{card}\left([\![-N, N]\!] \setminus \{0\}\right) = 2N$$

⋆ Troisième cas : $\alpha > 0$.
On a enfin :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(W_\alpha) &= \operatorname{card}\left([\![\max(-N, -N+2\alpha), \min(N, N+2\alpha)]\!]\right)\\ &= \operatorname{card}\left([\![-N+2\alpha, N]\!]\right)\\ &= 2N - 2\alpha + 1\end{aligned}$$

D'après (3) et la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(V_{2,N}) &= \sum_{\alpha=-N}^{-1} (2N + 2\alpha + 1) + \sum_{\alpha=1}^{N} (2N - 2\alpha + 1) + 2N\\ &= 2\sum_{\ell=1}^{N} (2N - 2\ell + 1) + 2N\end{aligned}$$

en utilisant le changement d'indice $\ell = -\alpha$ dans la première somme. Le changement d'indice $k = N - \ell$ et la linéarité de la somme fournissent :

$$\operatorname{card}(V_{2,N}) = 4\sum_{k=0}^{N-1} k + 2\sum_{k=0}^{N-1} 1 + 2N = 2N(N-1) + 4N$$

En reprenant le dénombrement (2) de l'ensemble $V_{-1,N}$, il vient finalement :

$$\operatorname{card}(V_N) = 2N(N-1) + 6N = 2N(N+2)$$

On peut donc conclure que :

pour tout entier naturel N non nul, le nombre de vecteurs propres de A appartenant à l'ensemble $[\![-N, N]\!]^3$ est $2N(N+2)$

Commentaires

▷ Le plus difficile dans cette question est d'écrire *proprement* les choses afin d'utiliser la formule donnant le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles finis.

▷ On retrouve bien le résultat obtenu avec l'outil informatique à la question 3.(a) (240 vecteurs propres dont les coordonnées sont comprises entre -10 et 10).

▷ On rappelle que si a et b sont des entiers tels que $a \leqslant b$, alors :

$$\text{card}(\llbracket a, b \rrbracket) = \sum_{k=a}^{b} 1 = b - a + 1$$

4.(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On répète N fois la même épreuve de Bernoulli (à savoir choisir un vecteur à coefficients entiers dans $\llbracket -N, N \rrbracket$) dont le succès (correspondant au fait d'être un vecteur propre pour A) a pour probabilité (par équiprobabilité) :

$$p = \frac{\text{card}(V_N)}{\text{card}(\llbracket -N, N \rrbracket^3)} = \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}$$

d'après la question 3.(b). Les épreuves sont de plus indépendantes. Si X désigne la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus, on peut conclure que X suit la loi binomiale de paramètres N et p. La probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre parmi les N vecteurs choisis est alors :

$$p_N = \text{P}(X \geqslant 1) = 1 - \text{P}(X = 0) = 1 - \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{p_N = 1 - \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)^N}$$

4.(b) On sait que :

$$2N(N+2) \underset{N\to+\infty}{\sim} 2N^2 \qquad \text{et} \qquad (2N+1)^3 \underset{N\to+\infty}{\sim} 8N^3$$

donc (par quotient d'équivalents) :

$$\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4N}$$

En particulier :

$$\lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) = \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{4N} = 0$$

donc :

$$\ln\left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} \underset{N\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4N}$$

Par produit, il vient :

$$N\ln\left(1-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} N\ln\left(1-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)=-\frac{1}{4}}$$

D'après la question 4.(a), on a :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\qquad p_N=1-\mathrm{e}^{N\ln\left(1-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)}$$

et, par composition des limites :

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{e}^{N\ln\left(1-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)}=\lim_{X\to-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{X}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

On conclut donc que :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} p_N=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}$$

Commentaire

Il était ici suggéré de calculer la limite en écrivant $1-p_N$ sous forme exponentielle. On est souvent amené à le faire pour des suites avec une expression de la forme $u_n^{v_n}$ conduisant notamment à la forme indéterminée « 1^∞ ». Il est par exemple très classique de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

Ajoutons qu'il n'est pas licite de composer les équivalents. On cherche d'abord la limite de $v_n\ln(u_n)$ (en utilisant l'équivalent usuel du logarithme) puis on compose les *limites*.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice non préparé

1. On utilise la structure itérative classique permettant de calculer une somme.

```
def somme(f,a,b,N) :
    s = 0
    for k in range(N) :
        s += f(a+k*(b-a)/N)
    return s
```

Commentaire

Ce type de question est un grand classique.

2. On utilise le théorème sur les sommes de Riemann. D'après ce théorème, une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\displaystyle\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)$ (pour N suffisamment grand), si la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$.

```
def approximation(f,a,b) :
    N = 1000
    return (b-a)/N*somme(f,a,b,N)
```

Le changement de variable $x=\varphi(t)$, où :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{1-t} = -1 + \dfrac{1}{1-t} \end{array} \right. ,$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et est strictement croissante (et bijective). Celui-ci fournit l'égalité annnoncée puisque :

$$\forall t \in [0,1[, \qquad \varphi'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

On en déduit que (la convergence de l'intégrale de Gauss est connue) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2}\exp\left(-\frac{t^2}{(1-t)^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Considérons maintenant la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{(1-t)^2}\exp\left(-\dfrac{t^2}{(1-t)^2}\right) & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$. En effet, elle l'est sur $[0,1[$ comme produit et composée de fonctions continues et car :

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{t^2} \times \frac{t^2}{(1-t)^2}\exp\left(-\frac{t^2}{(1-t)^2}\right) = 0$$

car $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{t^2}{(1-t)^2} = +\infty$ donc, d'après le théorème de composition des limites (et par croissances comparées),

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{t^2}{(1-t)^2}\exp\left(-\frac{t^2}{(1-t)^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$

La fonction f est donc également continue en 1. Le programme suivant permet d'obtenir une approximation de l'intégrale de Gauss.

```
from math import exp

def f(t) :
     if t == 1 :
          return 0
     else :
          return 1/(1-t)**2*exp(-t**2/(1-t)**2)

print(approximation(f,0,1))
```

Commentaires

▷ On rappelle le résultat lié aux sommes de Riemann. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) \qquad \text{(somme de Riemann associée à } f\text{)}$$

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$, alors la suite $(R_N(f))_{N\geqslant 1}$ est convergente de limite $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

▷ Le changement de variable permet d'obtenir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, cadre dans lequel s'inscrit le théorème sur les sommes de Riemann (et le programme écrit à la première question).

Planche 4

Question de cours

Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice préparé

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels non nuls.
   Écrire une fonction `python` qui renvoie `True` si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a l'inégalité $a_i^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$ et qui renvoie `False` sinon. La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \dots, a_n$.
2. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = \sqrt{2}(0, 1, 0)$ et $\vec{w} = \sqrt{2}(0, 0, 1)$ et on note $\mathscr{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :
   $$y - z = 0$$
   Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur le plan $\mathscr{P}$ et vérifier que ceux-ci ont la même norme.
3. Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a_1, a_2, a_3 trois réels tous non nuls.
   On suppose qu'il existe un plan $\mathscr{P}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1\,\vec{e_1}$, $a_2\,\vec{e_2}$ et $a_3\,\vec{e_3}$ sur ce plan aient tous la même norme que l'on notera d.
   On considère $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ une base orthonormée de $\mathscr{P}$ et $\vec{\varepsilon_3}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$ de norme 1.
   On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$.
   (a) Donner une expression de $p(\vec{e_i})$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'aide des vecteurs $\vec{\varepsilon_1}$ et $\vec{\varepsilon_2}$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :
   $$\langle \vec{e_i}, \vec{\varepsilon_1} \rangle^2 + \langle \vec{e_i}, \vec{\varepsilon_2} \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i} \right)^2$$
   (c) Montrer que :
   $$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}$$
   (d) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geqslant d$ puis que :
   $$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$$

⋆ ⋆ ⋆