

Jean-Pierre Escofier

Toute l'analyse de la Licence

3^e édition

DUNOD

© Dunod, 2014, 2020, 2023
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086497-3

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	XI
---------------------	-----------

Chapitre 1 • Prérequis à ne pas oublier

1.1	Alphabet grec	1
1.2	Formules d'algèbre	1
1.3	Rappels de trigonométrie	4
1.4	Relations d'équivalence et d'ordre	8
1.5	Écriture des formules	10
1.6	Inégalité triangulaire	13
	Exercices corrigés	13

Chapitre 2 • Des fonctions entre ensembles

2.1	Histoire de la notion de fonction	21
2.2	Fonctions d'un ensemble dans un autre	23
2.3	Fonctions de variable réelle	27
	Exercices corrigés	29

Chapitre 3 • Nombres réels

3.1	Définition et propriétés des nombres réels	31
3.2	Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures	39
3.3	Fonctions croissantes et décroissantes sur $\mathbb{R}$	42
3.4	Les nombres, histoires anciennes	43
3.5	Construction des nombres réels	45
3.6	Problèmes de cardinaux	48
	Exercices corrigés	51

Chapitre 4 • Nombres complexes

4.1	Résolution de l'équation du troisième degré	57
4.2	Une construction des nombres complexes	60

Table des matières

4.3	Propriétés de $\mathbb{C}$	61
4.4	Forme trigonométrique et notation exponentielle	65
4.5	Nombres complexes de module 1	69
4.6	Extraction de racines	71
4.7	Nombres complexes et transformations géométriques	74
	Exercices corrigés	77

Chapitre 5 • Suites numériques

5.1	Suites	85
5.2	Limite d'une suite de nombres réels	87
5.3	Limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient de suites	90
5.4	Suites croissantes majorées, suites adjacentes	95
5.5	Théorème de Bolzano-Weierstrass (BW)	98
5.6	Un peu d'histoire	98
5.7	Critère de Cauchy pour les suites	101
5.8	Suites de nombres complexes	102
	Exercices corrigés	104

Chapitre 6 • Fonctions de variable réelle continues

6.1	Un peu d'histoire	113
6.2	Limite d'une fonction en un point	114
6.3	Limites et inégalités	118
6.4	Limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions	120
6.5	Fonctions équivalentes	122
6.6	Limites de fonctions monotones	124
6.7	Continuité	125
6.8	Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI)	129
6.9	Image d'un intervalle par une fonction continue	133
6.10	Fonctions continues strictement monotones	134
6.11	La fonction arc sinus	136
6.12	La fonction arc cosinus	138
6.13	La fonction arc tangente	140
6.14	Les fonctions $x \mapsto x^a$	141
6.15	Continuité uniforme	143
	Exercices corrigés	144

Chapitre 7 • Fonctions dérivables

7.1	Dérivabilité et dérivée	157
7.2	Approximation par une fonction affine	162
7.3	Formules	165
7.4	Dérivation d'une fonction réciproque	167
7.5	Dérivées successives	170
7.6	Sens de variation et signe de la dérivée	172
7.7	Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis (TAF)	174
7.8	Signe de la dérivée et sens de variation	179
7.9	Autour de la règle de L'Hospital	182
7.10	Fonctions convexes	184
7.11	Étude des branches infinies	189
7.12	Étude des fonctions numériques	190
7.13	Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange	193
7.14	Pierre de Fermat (1607 ?-1665) et les débuts de l'analyse	195
	Exercices corrigés	198

Chapitre 8 • Suites récurrentes

8.1	Suites définies par récurrence	213
8.2	Exemple de $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$	215
8.3	Exemple de $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$	217
8.5	Interpolation linéaire pour le calcul d'une racine	219
8.6	Théorème du point fixe	221
8.7	Calcul de $\sqrt{2}$	225
8.8	Un peu d'histoire	227
8.9	Méthode de Newton	230
8.10	Sur la route du chaos	233
8.11	Qu'on aimerait voir Syracuse résolu	237
	Exercices corrigés	238

Chapitre 9 • Logarithme et exponentielle

9.1	La fonction logarithme népérien	245
9.2	Un peu d'histoire	248
9.3	Calcul d'un logarithme décimal à l'aide d'une table	253
9.4	La fonction exponentielle	255
9.5	Exponentielle et puissances	257

Table des matières

9.6	Limites importantes	259
9.7	Sinus et cosinus hyperbolique et leurs fonctions réciproques	261
	Exercices corrigés	265

Chapitre 10 • L'intégrale de Riemann

10.1	Introduction	279
10.2	Histoire de la construction des intégrales	279
10.3	Intégration des fonctions étagées	286
10.4	Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées	289
10.5	Sommes de Darboux	291
10.6	L'intégrale de Riemann	293
10.7	Propriétés de l'intégrale de Riemann	295
10.8	Exemples de fonctions Riemann-intégrables	298
10.9	Autres propriétés	303
10.10	Fonctions à valeurs complexes	304
10.11	Sommes de Riemann	306
10.12	Bernhard Riemann (1826-1866)	308

Chapitre 11 • Primitives et intégrales

11.1	Le théorème fondamental pour les fonctions continues	311
11.2	Un peu d'histoire : Newton, Leibniz, Jean Bernoulli	315
11.3	Formulaire	316
11.4	Formules d'intégration par parties (IPP)	318
11.5	Changement de variable	319
11.6	Calcul des primitives de fractions rationnelles	323
11.7	Terence (Terry) Tao (né le 17 juillet 1975)	325
11.8	Calcul numérique d'intégrales	326
11.9	Intégrales généralisées	333
11.10	Vers une première construction rigoureuse du sinus, du cosinus et de π	342
	Exercices corrigés	344

Chapitre 12 • Formules de Taylor et applications

12.1	Formule de Taylor avec reste intégral	369
12.2	Formule de Taylor locale dite de Taylor-Young	376
12.3	Développements limités	378
12.4	Formulaire	380
12.5	Calculs avec DL	382

12.6 Applications des DL	387
12.7 Comportements à l'infini	389
Exercices corrigés	391

Chapitre 13 • Équations différentielles du premier ordre

13.1 Introduction	405
13.2 Un peu d'histoire	408
13.3 Équations différentielles linéaires (EDL) d'ordre 1	410
13.4 Résolution de $a(x)y' + b(x)y = c(x)$	415
13.5 ED se ramenant à une EDL	417
13.6 ED à variables séparables	418
13.7 Autour de l'équation $y' = ay$ avec a réel	419
13.8 Miroir, mon beau miroir	422
13.9 Méthodes numériques	424
Exercices corrigés	427

Chapitre 14 • Courbes en coordonnées paramétriques ou polaires

14.1 Courbes paramétrées	437
14.2 Tangente en un point d'une courbe paramétrée	439
14.3 Étude des branches infinies	443
14.4 La cardioïde	444
14.5 Courbes en polaires	445
14.6 Planètes et comètes autour du Soleil	448
14.7 Arcs géométriques et arcs paramétrés	457
14.8 Théorème de relèvement	459
14.9 Longueur d'un arc	461
14.10 La chaînette	468
Exercices corrigés	470

Chapitre 15 • Séries numériques

15.1 Généralités	483
15.2 Convergence et divergence	484
15.3 Exemples	487
15.4 Séries à termes positifs	490
15.5 Séries à termes réels ou complexes quelconques	502
Exercices corrigés	515

Table des matières

Chapitre 16 • Séries entières

16.1	Séries de fonctions et convergence uniforme	533
16.2	Séries entières	542
16.3	Détermination du rayon de convergence	547
16.4	Convergence au bord du disque de convergence	550
16.5	Dérivation et intégration des séries entières	551
16.6	Développement en série entière d'une fonction	553
16.7	Exemples de développements en série entière d'une fonction	556
16.8	Produit et composition de séries entières	559
16.9	La fonction exponentielle	561
16.10	Formule du binôme	566
16.11	Calcul des logarithmes	570
16.12	Séries génératrices	572
	Exercices corrigés	575

Chapitre 17 • Séries de Fourier

17.1	Introduction historique	589
17.2	Premiers éléments du décor	591
17.3	La machinerie trigonométrique	595
17.4	Normes dans les espaces $C_m^0(T, \mathbb{R})$ ET $C_m^0(T, \mathbb{C})$	598
17.5	Polynômes et séries trigonométriques	602
17.6	Séries de Fourier	606
17.7	Calculs de coefficients de Fourier	609
17.8	Inégalité de Bessel	612
17.9	Théorème de Dirichlet	616
17.10	Egalité de Parseval	619
17.11	Phénomène de Gibbs	622
17.12	Résolution de l'équation de la chaleur	624
17.13	Conclusion	626
	Exercices corrigés	627

Bibliographie	643
----------------------	------------

Index	647
--------------	------------

AVANT-PROPOS

En mémoire de Jos Pennec (1944-2011), Pascal Quinton (1952-2013) et de Michel Viallard (1940-2019).

Pour J., C., C. et É., J.

Ce livre a été rédigé pour être vraiment accessible aux étudiants et étudiantes de licence de mathématiques. Il est aussi destiné aux étudiants et étudiantes de CAPES ou d'agrégation de mathématiques. Enfin, j'ai aussi pensé en l'écrivant aux enseignants et enseignantes de mathématiques actuels du secondaire et à tous ceux et celles qui ont fait un jour des mathématiques et ont envie de les revoir avec un éclairage historique et culturel qui permette de mieux les intégrer dans leurs connaissances.

Le livre a son plan, ses exigences propres et il comporte des passages nettement plus difficiles que d'autres. Les mathématiques ne sont pas faites que de généralités faciles, même si nos devanciers ont travaillé pour nous rendre les choses plus simples et mieux organisées. Les lecteurs et lectrices sauront reconnaître les passages et les exercices plus difficiles et les laisser de côté, pour une seconde lecture peut-être.

Le sujet de ce livre, la partie des mathématiques appelée « analyse », a commencé à être vraiment exploré au XVII^e siècle. Son objet est d'abord l'étude des fonctions numériques (les fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels ou l'ensemble des nombres complexes et à valeur dans ces ensembles). Une grande partie de l'analyse est consacrée aux méthodes pour trouver des fonctions vérifiant des propriétés données comme être solution d'équations fonctionnelles, d'équations différentielles (ED) ou d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Pour développer l'analyse, il faut commencer par construire rigoureusement les réels, ce qu'une approche géométrique héritée des Grecs ne permettait pas. Il faut définir et étudier les fonctions continues, les fonctions dérivables, construire des intégrales. Comme les ED et EDP ne se résolvent que très rarement avec les fonctions dont on dispose, il faut aussi développer des méthodes d'analyse numérique, savoir approcher une fonction, utiliser des inégalités, construire des suites et des séries...

Dans ce livre, vous trouverez des résultats du XIX^e siècle, du début du XX^e siècle et parfois plus récents, qui sont à la base des résultats actuels. Ils sont décrits dans le langage mis au point autour des années 1950.

Les exercices du livre poursuivent différents objectifs : les uns sont des applications immédiates du cours, avec des calculs faciles ; ils sont destinés à l'entraînement, à la mémorisation, à la compréhension des notions exposées. D'autres sont plus difficiles, voire beaucoup plus difficiles. Ceux-là sont destinés à vous faire voir différents aspects des applications et des prolongements des chapitres. Tous (sauf exception) sont corrigés en détail.

Avant-propos

Le mathématicien est un aventurier, explorant des domaines de la pensée. Il aime raconter ses découvertes, mais son public est en général un peu restreint. L'auteur de manuels ne doit pas seulement présenter à ses lecteurs les techniques pour arriver à ces beaux résultats, pour leur permettre de comprendre et d'apprendre les mathématiques de la licence. Il doit aussi leur montrer comment toutes ces choses si ingénieuses et si belles se sont construites dans le temps, par quels chemins. Pour ma part, j' aime aussi connaître quelques histoires autour des mathématiciens qui ont fait ces découvertes. J'ai donc donné un certain nombre de repères historiques¹, tout en cherchant à ne pas reprendre ceux de mon petit livre *Petites histoires des mathématiques* (chez le même éditeur). J'espère que cela aidera un certain nombre d'entre vous pour comprendre, apprendre et aimer les mathématiques et y trouver de grandes sources de plaisir.

Les applications des mathématiques ont explosé ces dernières années. Les modèles mathématiques, par exemple, prennent de plus en plus d'importance en médecine, en biologie, en météorologie, etc. Ce n'est pas le sujet de ce livre de le raconter, mais j'espère vous préparer à le comprendre.

Jean-Pierre Escofier,
Betton-Rennes-Valette-La Brée, 2011-2013 ; Betton, mai 2020, juillet 2023.

Remerciements

Je remercie Françoise Guimier pour avoir tout relu avec beaucoup de soin et Michel Viallard pour ses relectures et ses conseils sur les premiers états du texte. Leurs corrections et suggestions font que ce livre est aussi le leur. Merci également à Nicolas Macé et Michel Saez. Tout ce qui ne va pas, bien sûr, c'est de moi.

Mes remerciements vont aussi aux éditions Dunod, à Anne Pompon, Clémence Mocquet, Benjamin Peylet, Laetitia Jammet, Vanessa Beunèche et Agathe Jeandeau pour leur confiance, leur écoute et leur gentillesse.

Bien sûr, je n'oublie pas Martine Lemonnier qui m'a proposé un premier travail en 1995 et m'a montré magistralement mes imperfections dans mes rédactions.

Je me suis permis de faire des renvois à mes livres précédents; vous pouvez très bien les sauter (même s'ils apportent quelque chose à mes yeux).

Pour m'écrire : jean-pierre.escofier@univ-rennes1.fr

1. Les dates de naissance et (éventuellement) de décès des personnes citées sont données dans l'index.

PRÉREQUIS

1

À NE PAS OUBLIER

Les rappels qui suivent sont à la base de l'enseignement des mathématiques en licence ; tout(e) étudiant(e) devrait les connaître (ou savoir les retrouver rapidement) sans avoir recours à aucune note ni aucune calculatrice. Si vous ne les connaissez pas bien, retravaillez-les !

1.1 ALPHABET GREC

Les mathématicien(ne)s ont besoin, pour bien distinguer les différents objets qu'ils manipulent de notations variées. Des notations bien choisies, en harmonie avec ce qu'elles doivent représenter et avec les traditions, permettent des économies de pensée considérables.

L'alphabet latin, même en ajoutant aux majuscules et minuscules des primes ou des indices (f_n'' , etc.), ne suffit pas. L'alphabet grec donne de nouvelles possibilités pour les lettres qui ne s'écrivent pas comme en français ; je rappelle l'écriture des minuscules (avec les majuscules correspondantes si elles se distinguent des nôtres) qui peuvent servir :

alpha : α , bêta : β , gamma : γ et Γ , delta : δ et Δ , epsilon : ε , zêta : ζ , êta : η , thêta : θ et Θ , kappa : κ , lambda : λ et Λ , mu : μ , nu : ν , ksi : ξ et Ξ , pi : π et Π (avec une variante ϖ), rho : ρ , sigma : σ et Σ , tau : τ , phi : φ et ϕ , ou Φ , khi : χ , psi : ψ et Ψ , oméga : ω et Ω .

1.2 FORMULES D'ALGÈBRE

Les formules qui suivent valent pour des calculs où tout se passe comme pour les nombres réels (les éléments commutent, etc.).

1.2.1 Identités remarquables

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

1.2.2 Sur les notations $\sum$ et $\prod$

Les notations $\sum$ et $\prod$ sont souvent utilisées pour écrire de manière ramassée des sommes et des produits. Étant donnés $n \geq 1$ éléments $x_1, \dots, x_n$ (réels, complexes...) leur somme s'écrit $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ou :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} x_k, \quad \sum_{k=1}^n x_k, \quad \sum_{1 \leq k \leq n} x_k$$

et leur produit $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ ou :

$$\prod_{1 \leq k \leq n} x_k, \quad \prod_{k=1}^n x_k \quad \text{ou} \quad \prod_{1 \leq k \leq n} x_k.$$

On lit au choix : somme ou sigma des x_k , produit ou pi des x_k , de 1 à n ou de $k = 1$ à $k = n$. L'indice k est *muet* et peut être changé en une autre lettre comme $i, j, l, m, p, q, \dots$ sans changer la somme ou le produit des termes. Pour $n = 1, 2, 3$, les notations $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ ont un petit désavantage, puisqu'elles supposent au moins quatre termes et doivent être interprétées.

Ces sommes et produits sont en fait définis par récurrence pour $n \geq 1$: la somme de $n + 1$ éléments $x_1, \dots, x_{n+1}$ est définie comme la somme des n premiers et du $n + 1$ -ième ; on a la relation :

$$\sum_{1 \leq k \leq n+1} x_k = \left(\sum_{1 \leq k \leq n} x_k \right) + x_{n+1} ;$$

de même pour la définition du produit de $n + 1$ éléments, donnée, pour $n \geq 1$, par :

$$\prod_{1 \leq k \leq n+1} x_k = \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \times x_{n+1}.$$

La somme et le produit de la famille vide sont 0 et 1 par convention.

L'emploi de pointillés ou des signes $\sum$ et $\prod$ nécessite donc des raisonnements par récurrence, souvent évidents. On peut effectuer des changements d'indices, par exemple : $\sum_{0 \leq l \leq n} (l+1)^2 = \sum_{1 \leq k \leq n+1} k^2$ en posant $k = l + 1$.

L'adoption de ces notations est assez récente (au XX^e siècle, alors qu'Euler avait proposé le signe Σ en 1755) ; on utilisait avant un langage moins précis, mais que tout le monde comprenait ; on pouvait parler, par exemple, de la famille des éléments $a, b, c, \dots, l$ et de leur somme $a + b + c + \dots + l$.

1.2.3 Somme de termes successifs d'une suite arithmétique

La suite arithmétique de raison r et de premier terme a est la suite $(a + kr)_{k \geq 0}$ (pour la notation, voir 5.1.1). La formule à connaître par cœur est la somme des entiers de 1 à n :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit, par exemple, la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite $(a + kr)$ avec $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (a + kr) = (n + 1)a + \frac{n(n + 1)}{2}r.$$

Attention, la première formule commence au rang $k = 1$, la seconde au rang $k = 0$.

1.2.4 Somme de termes successifs d'une suite géométrique

La suite géométrique de raison q et de premier terme a est la suite $(aq^k)_{k \geq 0}$ (pour la notation, voir 5.1.1). La formule à connaître est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique (q^n) de raison $q \neq 1$:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

$$\text{Si } q = 1, \sum_{0 \leq k \leq n} q^k = n + 1.$$

1.2.5 Formule du binôme

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

La **factorielle** de n (on dit souvent : n factoriel) est définie par récurrence par $0! = 1$ et $(n + 1)! = n! \times (n + 1)$. C'est le produit des n premiers entiers. Les premières valeurs de $n!$, pour $n = 0, 1, 2, \dots, 8$, sont 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040, 40 320.

Je préfère la notation C_n^k , pour *combinaisons* (dont l'initiale donne le C) de k éléments parmi n éléments, plutôt que $\binom{k}{n}$ qui doit se lire k parmi n sans que la notation vous y aide. Pour le calcul des coefficients, on peut aussi utiliser le triangle bien connu dit de Pascal ¹, basé sur la formule :

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

1. Les Arabes le connaissaient vers l'an 1000, les Chinois en 1261 et il apparaît dans le *General Trattato* de Tartaglia en 1556 (les Italiens disent d'ailleurs : triangle de Tartaglia). Mais Pascal fait une étude approfondie du triangle et c'est là qu'il rédige le premier (peut-être) raisonnement par récurrence.

1.2.6 L'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Rappelons que la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ vient de la réécriture de l'équation sous la forme dite *canonique* :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$. On a les trois cas :

- $\Delta < 0$: l'équation n'a aucune racine réelle ;
- $\Delta = 0$: l'équation a une racine réelle dite double $x_1 = -b/2a$ et s'écrit $a(x - x_1)^2 = 0$;
- $\Delta > 0$: l'équation a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc :

$$x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 x_2 = c/a,$$

des relations qui viennent aussi de ce que l'équation s'écrit :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \text{ soit } a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = 0.$$

Réciproquement, deux nombres réels de somme S et de produit P sont les racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. La résolution des équations du second degré à coefficients complexes sera donnée en 4.6.4.

1.3 RAPPELS DE TRIGONOMÉTRIE

1.3.1 Définition géométrique des fonctions sinus, cosinus et tangente

Les fonctions trigonométriques sont définies à partir des points du cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre O d'un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$; on note A le point $(1, 0)$ (voir figure 1.1).

Soient a un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\widehat{Ox}, \widehat{OM}) = a$ (a est en radians). On projette M en H sur $(x'x)$, en K sur $(y'y)$. On pose $\overline{OH} = \cos a$, $\overline{OK} = \sin a$. Si $a \neq \pi/2 \bmod \pi$, la perpendiculaire en A à l'axe $x'Ox$ coupe (OM) en T et on pose $\tan a = \overline{AT}$.

On définit ainsi, via la géométrie, des fonctions **sinus**, $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, **cosinus**, $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ et **tangente**, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$.

On définit aussi la **cotangente** comme l'inverse de la tangente :

$$\cotan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \cotan x = \frac{1}{\tan x}.$$

La construction des fonctions trigonométriques dans les classes de lycée est basée sur la géométrie. Cela ne gênait personne, il y a 100 ans. Mais aujourd'hui, toute l'analyse est basée sur la construction des nombres réels que nous présentons au chapitre 3. Les outils pour construire rigoureusement les fonctions trigonométriques ne seront mis au point qu'en 11.10 et 16.9. En attendant, nous utiliserons les fonctions trigonométriques et leurs propriétés telles que nous les connaissons.

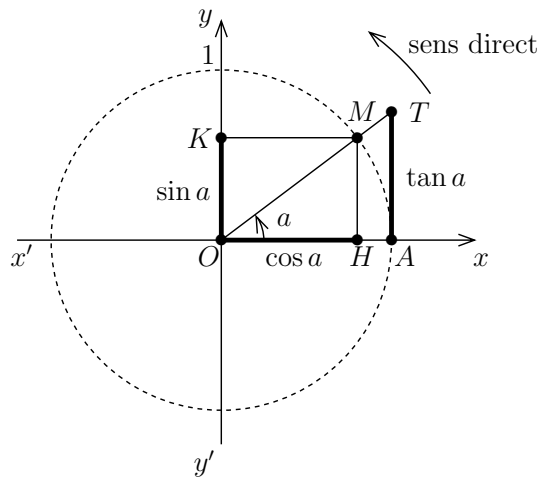


Figure 1.1 Définition géométrique du sinus, du cosinus et de la tangente.

1.3.2 Valeurs des fonctions trigonométriques

Le tableau de valeurs des fonctions trigonométriques pour cinq angles compris entre 0 et $\pi/2$ est à connaître (sans calculatrice !).

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	

1.3.3 Formules de trigonométrie

Les formules qui suivent n'ont parfois pas de sens pour certaines valeurs de la variable : par exemple, si $\tan x$ apparaît, il faut supposer $x \neq \pi/2 \bmod \pi$, etc.

Premières formules.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad 1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Il faut savoir retrouver, en traçant un cercle trigonométrique dans un coin de son brouillon ou en réfléchissant un peu :

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x, \tan(-x) = -\tan(x),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1/\tan x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x,$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Formules d'addition. Les formules pour $a - b$ se déduisent de celles pour $a + b$ en changeant b en $-b$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Formules donnant les produits. Par addition ou soustraction des formules précédentes, on obtient :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)] ;$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)] ;$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

Formules donnant les sommes et les différences. En prenant les formules précédentes à l'envers avec $a = (p + q)/2$ et $b = (q - p)/2$:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{q - p}{2} ;$$

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{q - p}{2} ;$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} ;$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

Formules de duplication.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

Formules en fonction de la tangente de l'arc moitié. En posant $t = \tan(a/2)$:

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Dérivées. Nous reverrons ce qui suit en 6.7.2 et 7.1.7. Les fonctions trigonométriques sont des fonctions continues, dérivables sur leur domaine de définition et leurs dérivées sont données par les formules :

$$\sin' x = \cos x \quad \cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On peut aussi écrire les dérivées du sinus et du cosinus sous la forme $\sin' x = \sin(x + \pi/2)$, $\cos' x = \cos(x + \pi/2)$, ce qui donne facilement une expression des dérivées successives du sinus et du cosinus :

$$\sin^{(n)} x = \sin(x + n\pi/2) \quad \cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2).$$

Inégalités.

$$\sin x < x \text{ pour } x > 0 ;$$

$$\sin x > 2x/\pi \text{ pour } 0 < x < \pi/2 ;$$

$$\tan x > x \text{ pour } 0 < x < \pi/2.$$

Transformation de $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. On a souvent besoin en physique de transformer l'expression de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, où A, B sont des réels non tous deux nuls. Comme $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$

$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ sont des éléments de $[-1, 1]$ dont les carrés ont pour somme 1, il exis-

te un réel φ , qu'on peut prendre dans un intervalle de longueur 2π comme $[0, 2\pi[$, tel que :

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Alors, $f(t) = \sqrt{A^2 + B^2}(\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t)$, soit :

$$f(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \varphi).$$

1.4 RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ET D'ORDRE

1.4.1 Relations sur un ensemble

Soit E un ensemble. Un sous-ensemble² $\mathcal{R}$ de $E \times E$ définit ce qu'on appelle une **relation** entre les éléments de E . On écrit $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y .

Par exemple, si E est l'ensemble des élèves d'un lycée, on peut considérer la relation définie par les couples d'élèves qui sont dans une même classe.

1.4.2 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble. Une **partition** de E est la donnée d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles non vides de E telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tous i, j de I distincts et $E = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Par exemple, les entiers multiples de 3, ceux de la forme $3k+1$ et ceux de la forme $3k+2$ forment une partition de $\mathbb{N}$ en trois parties.

1.4.3 Relations d'équivalence

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'équivalence** si on a les trois propriétés suivantes :

- 1) **réflexivité** : pour tout élément x de E , on a $x\mathcal{R}x$;
- 2) **symétrie** : pour tous x, y de E , si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$;
- 3) **transitivité** : pour tous x, y, z de E , si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Les exemples de relation d'équivalence se rencontrent d'abord en algèbre ; la relation d'égalité est une relation d'équivalence sur tout ensemble. Sur $\mathbb{N}$ (ou aussi sur $\mathbb{Z}$) la relation d'égalité modulo n (au sens que $x\mathcal{R}y$ équivaut à n divise $x - y$),

2. On utilisera indifféremment les synonymes *partie* et *sous-ensemble*.

est une relation d'équivalence essentielle en théorie des nombres. La relation d'être dans une même classe de lycée est une relation d'équivalence.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E , la **classe d'équivalence** de x est l'ensemble des éléments $y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$. Les classes d'équivalence de deux éléments sont disjointes ou confondues. Les différentes classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble E .

Réciproquement, une partition d'un ensemble E définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E : on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y appartiennent à la même partie de la partition de E .

1.4.4 Relations d'ordre

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si on a les trois propriétés suivantes :

- 1) **réflexivité** : pour tout x de E , on a $x\mathcal{R}x$;
- 2) **antisymétrie** : pour tous x, y de E , si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$;
- 3) **transitivité** : pour tous x, y, z de E , si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Un exemple de relation d'ordre est la relation d'inclusion sur l'**ensemble des parties** d'un ensemble E : si A et B sont des parties de E , on a $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$.

Si A est une partie de E , la restriction de la relation $\mathcal{R}$ aux éléments de A définit une relation d'ordre sur A appelée **ordre induit** par $\mathcal{R}$ sur A .

La relation est dite d'**ordre total** si deux éléments distincts sont toujours comparables, c'est-à-dire si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$ pour tous x, y de E .

La relation d'ordre sur l'ensemble des parties d'un ensemble ayant au moins deux éléments n'est pas une relation d'ordre total.

L'exemple classique de relation d'ordre total est la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Dans une partie totalement ordonnée :

- 1) le plus petit et le plus grand élément d'une famille de deux éléments existent toujours ; si $x \leq y$, on pose $\inf(x, y) = x$ et $\sup(x, y) = y$; $\inf$ est une abréviation de *infimum* et $\sup$ une abréviation de *supremum* ;
- 2) le plus petit et le plus grand élément d'une famille de n éléments $(x_1, \dots, x_n)$ existent toujours et se définissent par récurrence par les relations $\inf(x_1, \dots, x_{n+1}) = \inf(\inf(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$ et $\sup(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sup(\sup(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$: on calcule l'inf ou le sup des n premiers éléments et on le compare au $n + 1$ -ième. On peut aussi dans ce cas parler de minimum et de maximum (voir 3.2.2).

1.5 ÉCRITURE DES FORMULES

La recherche de la rigueur en analyse a poussé les mathématiciens du XIX^e siècle à élaborer une écriture de plus en plus formalisée des mathématiques, impossible à expliquer en quelques mots³.

Bien sûr, ce n'est pas sous cette forme qu'on peut penser dans sa tête les problèmes de mathématiques : il faut prendre du recul, entrelacer des notions complexes et faire jouer ses neurones pour les comprendre. Mais on peut avoir besoin de revenir au langage formalisé, par exemple pour écrire correctement la négation (le contraire) d'une propriété⁴. Voici un bagage minimum.

Une formule mathématique s'écrit avec des symboles logiques, les symboles de la théorie dans laquelle on travaille et des lettres désignant les variables.

Voici un exemple de formule vraie de la théorie des nombres réels :

$$(\forall x \in \mathbb{R})((x \geq 0) \Rightarrow \exists y(y^2 = x));$$

elle signifie que, pour tout x réel, si $x \geq 0$, il existe un réel y de carré x .

1.5.1 Calculs avec les formules

Dans cette section, j'utilise des crochets pour isoler les formules de ce qui est du langage courant.

Les formules mathématiques se construisent avec :

- ou, et, non, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, qui sont des **connecteurs logiques** ;
- $\exists, \forall$, qui sont des **quantificateurs**.

On écrit souvent $[P(x)]$ si la formule $[P]$ dépend de x .

À partir de la formule $[P]$ et de la formule $[Q]$, par exemple $|x - a| < \delta$, $f(x) \geq A$, on peut construire d'autres formules :

- $[P \text{ ou } Q]$;
- $[P \text{ et } Q]$;
- $[P \Rightarrow Q]$ (qui se lit **P implique Q**) ;
- $[P \Leftrightarrow Q]$ (qui se lit **P équivaut à Q** ou **P est équivalente à Q**) ;

3. Nous sommes tellement habitués à notre logique que nous ne pensons pas qu'il puisse en exister d'autres. Cependant, la logique dite intuitionniste de Luitzen Egbertus Jan Brouwer propose une autre approche des démonstrations mathématiques où le principe du tiers exclu est rejeté et où les objets manipulés doivent être explicitement construits ; on parle de mathématiques constructives. Des textes d'Henri Lombardi, disponibles sur son site ou dans la revue *Repères-IREM*, peuvent en donner une idée.

4. La vérification de démonstrations mathématiques sur ordinateurs a fait récemment d'énormes progrès. On a pu obtenir la certification des preuves de théorèmes comme celles du théorème des quatre couleurs en 2004 et, fin 2012, d'un résultat sur les groupes datant de 1963 et ayant nécessité plus de 200 pages de démonstrations : un travail de 12 personnes pendant six ans, des calculs énormes, un exploit ! Pour la conjecture de Kepler sur les empilements de sphères, voir [ESC3].

- $[\text{non } P]$ (la **négation** de P) ;
- $[(\forall x)(P(x))]$ (qui se lit : pour tout x , on a $P(x)$) ;
- $[(\exists x)(P(x))]$ (qui se lit : il existe un x tel que $P(x)$; plusieurs x distincts peuvent vérifier $P(x)$ quand la formule est vraie).

Certaines formules sont équivalentes, comme les suivantes :

- $[\text{non}(\text{non } P)]$ est équivalente à $[P]$;
- $[P \text{ et } Q]$ est équivalente à $[\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))]$;
- $[P \Rightarrow Q]$ est équivalente à $[Q \text{ ou } (\text{non } P)]$;
- $[P \Rightarrow Q]$ est aussi équivalente à $[\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P]$ appelée **contraposée** de $[P \Rightarrow Q]$.
- $[P \Leftrightarrow Q]$ est équivalente à $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$;
- $[(\exists x)(P(x))]$ est équivalente à $[\text{non } ((\forall x)(\text{non } P(x)))]$.
- $[(\forall x)(P(x))]$ est équivalente à $[\text{non } ((\exists x)(\text{non } P(x)))]$.

Avec ces règles, on voit, par exemple, que :

- la négation de $[P \Rightarrow Q]$ est $[(\text{non } Q) \text{ et } P]$;
- la négation de $[(\forall x)(P(x))]$ est $[(\exists x)(\text{non } (P(x)))]$;
- la négation de $[(\exists x)(P(x))]$ est $[(\forall x)(\text{non } (P(x)))]$.

On peut dire ces deux dernières propriétés en langage courant :

- nier qu'une propriété soit vraie pour tout x équivaut à dire qu'il existe un x (un seul suffit) pour lequel la propriété n'est pas vraie ;
- nier qu'il existe un x vérifiant une propriété équivaut à dire qu'elle est fausse pour tout x .

On utilise les abréviations :

- $[(\forall x \in A)(P(x))]$ pour $[(\forall x)((x \in A) \Rightarrow P(x))]$;
- $[(\exists x \in A)(P(x))]$ pour $[(\exists x)((x \in A) \text{ et } P(x))]$.

Leurs négations sont respectivement :

- $[(\exists x \in A)(\text{non } P(x))]$;
- $[(\forall x \in A)(\text{non } P(x))]$.

1.5.2 Sous-ensembles définis par des formules

Dans un ensemble E , une formule $[P(x)]$ permet de définir l'ensemble A des éléments x de E ayant la propriété $[P]$.

Si A est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[P]$ et B l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[Q]$:

- $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[P \text{ ou } Q]$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E vérifiant l'une ou l'autre de ces deux proprié-

tés, éventuellement les deux (ce n'est pas le « *ou* » souvent exclusif du langage courant) ;

- $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[P \text{ et } Q]$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E vérifiant à la fois $[P]$ et $[Q]$;
- $E \setminus A$ (le complémentaire de A dans E) est l'ensemble des éléments de E ne vérifiant pas la propriété $[P]$ (c'est-à-dire vérifiant la propriété $[\text{non } P]$).

Ce petit résumé de logique nous servira pour écrire correctement la négation d'une propriété un peu compliquée. Par exemple, dire qu'un réel m majore un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (voir 3.2) s'écrit :

$$[(\forall x \in A)(x \leq m)]$$

et dire que m ne majore pas A peut s'écrire :

$$[\text{non } ((\forall x \in A)(x \leq m))] \quad \text{ou} \quad [(\exists x \in A)(x > m)].$$

1.5.3 Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une formule $[P(n)]$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, autrement dit que l'ensemble A des entiers pour lesquels $[P(n)]$ est vraie est égal à $\mathbb{N}$, le raisonnement par récurrence est essentiel.

Un raisonnement par récurrence type comporte trois étapes :

- 1) la vérification de la base de la récurrence, c'est-à-dire que 0 vérifie la propriété $[P]$;
- 2) la vérification que, pour tout entier n , si $[P(n)]$ est vraie alors $[P(n+1)]$ est vraie ;
- 3) la conclusion : si les points 1 et 2 sont vrais, alors $[P(n)]$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

De petites variantes de ce raisonnement se rencontrent souvent, citons en deux :

- la base de la récurrence n'est pas pour 0, mais pour un entier N , autrement dit $[P(N)]$ est vraie ; le point 2 doit alors être modifié en vérifiant que, pour tout $n \geq N$, si $[P(n)]$ est vraie alors $[P(n+1)]$ est vraie ; la conclusion est que $[P]$ est vraie pour tout entier $n \geq N$;
- la base de la récurrence n'est pas 0, mais les deux entiers 0 et 1, autrement dit $[P(0)]$ et $[P(1)]$ sont vraies ; le point 2 doit alors être modifié en vérifiant que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $[P(n)]$ et $[P(n+1)]$ sont vraies alors $[P(n+2)]$ est vraie.

J'ai souvent vu les étudiant(e)s de première année écrire des absurdités en faisant un raisonnement par récurrence, signe qu'ils-elles n'en ont pas compris le principe ; alors, attention ! Les trois étapes précédentes sont incontournables.

1.6 INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Quand on a fixé un repère cartésien dans le plan, la distance euclidienne de deux points $A = (a, b)$ et $A' = (a', b')$ est $AA' = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}$. On la note AA' ou $d(A, A')$, où le d est lu *distance*.

Dans un triangle $AA'A''$ (voir figure 1.2) on a les inégalités suivantes.

- 1) **Première inégalité triangulaire** : la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés

$$d(A, A'') \leq d(A, A') + d(A', A'') ;$$

- 2) **Seconde inégalité triangulaire** : la valeur absolue de la différence des longueurs de deux côtés est inférieure à la longueur du troisième côté :

$$|d(A, A') - d(A, A'')| \leq d(A', A'').$$

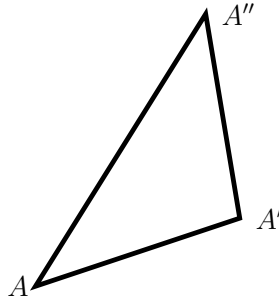


Figure 1.2 Inégalité triangulaire.

Exercices

1.1 Identités algébriques

- 1) Donner des factorisations de $a^n - b^n$ et de $a^n - 1$ vraies pour tout $n \geq 2$.
- 2) Donner des factorisations de $a^n + b^n$ et de $a^n + 1$ dans le cas n impair.

1.2 Identités algébriques

Pour tout entier $m \geq 0$, on pose $x^{[m]} = \frac{x^m}{m!}$. Vérifier que la formule du binôme s'écrit $(a + b)^{[n]} = \sum_{p+q=n} a^{[p]} b^{[q]}$ et se généralise en $(a_1 + \dots + a_r)^{[n]} = \sum_{p_1 + \dots + p_r = n} a_1^{[p_1]} \dots a_r^{[p_r]}$.

1.3 Identités algébriques

Soient a, b, c trois nombres réels. Pour d entier, $d \geq 1$, on pose $p_d = a^d + b^d + c^d$. On suppose $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Montrer que deux des trois nombres a, b, c sont nuls. On pourra calculer $p_1 \times (p_2 - ab - bc - ca)$ et $p_1^2 - p_2$.

1.4 Calculs de sommes

Montrer que $\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $\sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.5 Inégalité de Tchebytcheff sur les moyennes arithmétiques

Soient $n \geq 2$ un entier, $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \geq \dots \geq b_n$ des réels. Montrer l'inégalité sur les moyennes arithmétiques, dite de Tchebytcheff :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} a_i\right) \times \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} b_j\right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i\right)$$

(on pourra commencer par développer le membre de gauche et réunir les termes en chacun des a_i).

1.6 Quelques représentations graphiques

Cet exercice n'est pas corrigé. Il faudrait aussi revoir, si vous ne les connaissez pas bien, les représentations graphiques du sinus, du cosinus et de la tangente, avec les pentes des tangentes en 0, les maxima et minima.

Représenter graphiquement, sans faire d'étude complète avec tableau de variation, juste en plaçant les axes de symétrie ou asymptotes éventuels, les fonctions définies par les formules suivantes :

$$x \mapsto 3x - 2, \quad x \mapsto -2x + 5, \quad x \mapsto 2x^2 - 5x + 3, \quad x \mapsto -x^2 + 4x, \quad x \mapsto \frac{3x + 1}{2x + 6},$$

$$x \mapsto \frac{-x + 1}{x - 3}.$$

1.7 Trigonométrie

Résoudre les équations $\sin x = 1/2$, $\cos x = \sqrt{2}/2$, $\tan x = \sqrt{3}$.

1.8 Calcul de produit

Soit $x \in]0, \pi/2]$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$C_n(x) = 2^{n+1} \cos x \cos(x/2) \dots \cos(x/2^n) = 2^{n+1} \prod_{0 \leq k \leq n} \cos(x/2^k).$$

Simplifier l'expression de $C_n(x)$; on pourra montrer que

$$C_n(x) \sin(x/2^n) = C_{n-1}(x) \sin(x/2^{n-1}).$$

1.9 Encadrement de π , méthode d'Archimède

Dans un cercle de rayon 1, on inscrit un polygone régulier P_n de 3×2^n côtés, $n \geq 1$. On note p_n son périmètre ; on pose $s_n = \sin(\pi/(3 \times 2^n))$.

Montrer que $p_n = 3 \times 2^{n+1} s_n$ et que $s_{n+1}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - s_n^2}}{2}$. Calculer p_n et s_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Comparer p_n et 2π .

1.10 Trigonométrie

C'est Euler qui a proposé de définir les lignes trigonométriques dans un cercle de rayon 1. Avant lui, on les définissait dans des cercles de rayon R . Pour construire les tables de valeurs des fonctions sinus ou tangente, importantes pour la navigation, on prenait $R = 10^6$ ou $R = 10^7$, ce qui revenait à en donner 6 ou 7 chiffres exacts ; par exemple, le cosinus de 30 degrés était 8 660 254 (c'est-à-dire $10^7 \times (\sqrt{3}/2)$). Écrire les formules d'addition pour les fonctions définies par $\text{Sin}(x) = R \sin x$, $\text{Tan}(x) = R \tan x$.

1.11 Une apparition étonnante et superbe !

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de $x \mapsto x^2$ dans un repère (O, x, y) . Pour tous entiers $m, n \geq 2$, on note A_n le point (n, n^2) et B_m le point $(-m, m^2)$.

1) Soient, $m, n \geq 2$; calculer l'ordonnée de l'intersection de la droite $(A_n B_m)$ avec l'axe des y .

2) Les ordonnées calculées au 1) forment un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$. Comment caractériser les éléments de E et ceux de son complémentaire ?

1.12 Logique

Soient E un ensemble, $[P(x)]$ et $[Q(x)]$ deux propriétés, A (resp. : B) l'ensemble des x de E vérifiant $[P(x)]$ (resp. : $[Q(x)]$). Dans chacun des cas suivants, quel est l'ensemble des x de E vérifiant la propriété :

1) $[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$?

2) $[P(x) \Rightarrow Q(x)]$?

3) $[P(x) \Rightarrow \text{non}(Q(x))]$?

1.13 Logique

Vérifier les formules données en 1.5.1 pour les négations de $(\forall x \in A)(P(x))$, $(\exists x \in A)(P(x))$.

Solutions

1.1 1)

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = (a - b)(\sum_{0 \leq k \leq n-1} a^{n-1-k}b^k)$.
Avec $b = 1$, on a $a^n - 1 = (a - 1)(\sum_{0 \leq k \leq n-1} a^k)$.

2) Si n est impair et $n \geq 3$, on a $a^n + b^n = (a + b)(\sum_{0 \leq k \leq n-1} (-1)^k a^{n-1-k}b^k)$ et $a^n + 1 = (a + 1)(\sum_{0 \leq k \leq n-1} (-1)^k a^k)$.

Par exemple, $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$

et $a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$.

Si n est pair, on n'a pas de formules analogues.

1.2 La vérification consiste à diviser la formule du binôme par $n!$, la généralisation à raisonner par récurrence sur r .

1.3 On vérifie par le calcul l'identité :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

On a aussi : $p_1^2 = p_2 + 2(ab + bc + ca)$. Les hypothèses donnent $ab + bc + ca = 0$, puis $abc = 0$. Si $a = 0$, $ab + bc + ca = 0$ donne $bc = 0$, puis le résultat.

1.4 Raisonner par récurrence sur n . Vérifier d'abord que les formules sont vraies pour $n = 1$ (les deux membres des égalités sont égaux à 1). Puis supposer les égalités vraies pour un entier n et montrer qu'elles sont encore vraies pour l'entier $n + 1$. Ne pas oublier de conclure.

Par exemple, pour la deuxième, on suppose la formule vraie pour un entier n :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (\text{c'est l'hypothèse de récurrence}).$$

On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

On part de $\sum_{1 \leq k \leq n+1} k^3 = \sum_{1 \leq k \leq n} k^3 + (n+1)^3$, qui est égal, d'après l'hypothèse

de récurrence à $\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$. En mettant $(n+1)^2$ en facteur, on trouve

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2, \text{ ce qui est bien le membre de droite de la formule pour } n+1.$$

On conclut que la formule est vraie pour tout n .

1.5 Le cas $n = 2$ est facile, mais c'est le cas $n = 3$ qui peut donner une idée de la démarche à suivre. Pour $n \geq 2$, on multiplie par n^2 et on développe le membre de gauche en regroupant ce qui concerne chaque a_i : $a_i b_1 + a_i b_2 + \dots + a_i b_i + \dots + a_i b_n$; en retranchant $na_i b_i$, on obtient :

$$a_i(b_1 - b_i) + \dots + a_i(b_{i-1} - b_i) + a_i(b_{i+1} - b_i) + \dots + a_i(b_n - b_i).$$

L'inégalité de Tchebycheff revient à montrer que la somme de ces lignes est positive. On s'en assure en remarquant qu'en regroupant les termes du tableau formé par les lignes précédentes deux par deux : $a_i(b_j - b_i)$ et $a_j(b_i - b_j)$, on obtient des sommes $(a_i - a_j)(b_j - b_i)$, toutes positives.

1.7 Raisonnons à partir de la figure 1.3.

Si $OH = a \in [-1, 1]$, on voit qu'il existe deux angles (en général), α et $\pi - \alpha$, définis modulo 2π , de sinus a . Si $a = 1/2$, on a $\alpha = \pi/6$, par exemple ; on en déduit l'ensemble des solutions de $\sin x = 1/2$: ce sont les angles $\pi/6 + 2k\pi$ et $5\pi/6 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $OK = a \in [-1, 1]$, on voit qu'il existe deux angles (en général), α et $-\alpha$, définis modulo 2π , de cosinus a . Si $a = \sqrt{2}/2$, on a $\alpha = \pi/4$, par exemple ; on en déduit l'ensemble des solutions de $\cos x = \sqrt{2}/2$: ce sont les angles $\pm\pi/4 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $AT = a \in \mathbb{R}$, on voit qu'il existe deux angles, α et $\alpha + \pi$, définis modulo 2π , de tangente a ; l'ensemble des solutions est l'ensemble des angles égaux à α modulo π . Si $a = \sqrt{3}$, on a $\alpha = \pi/3$, par exemple ; on en déduit l'ensemble des solutions de $\tan x = \sqrt{3}$: ce sont les angles $\pi/3 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

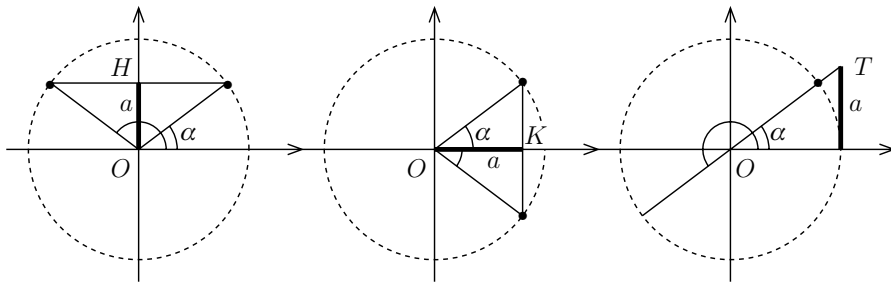


Figure 1.3 Figures pour la résolution des équations $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$.

1.8 On a $C_n(x) \sin(x/2^n) = 2C_{n-1}(x) \cos(x/2^n) \sin(x/2^n) = C_{n-1}(x) \sin(x/2^{n-1})$. D'où, par récurrence, $C_n(x) \sin(x/2^n) = C_0(x) \sin x$. Comme $C_0(x) \sin x = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$ et comme $\sin(x/2^n) \neq 0$ (puisque $x \in]0, \pi/2[$), on a $C_n(x) = \frac{\sin 2x}{\sin(x/2^n)}$.

1.9 Comme la longueur d'un côté comme A_1A_2 (voir la figure 1.4 où la mesure de l'angle ne correspond pas à un cas précis) est $2s_n$, on a $p_n = 3 \times 2^{n+1}s_n$.

Pour $a \in [0, \pi/4]$, on a $\cos 2a \geq 0$. Comme $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$, on obtient

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2a}}{2}, \text{ d'où } s_{n+1}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - s_n^2}}{2}.$$

Les calculs deviennent vite un peu délicats.

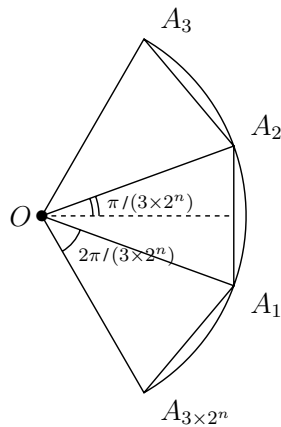


Figure 1.4 Côté d'un polygone régulier à 3×2^n côtés.

n	3×2^n	$\pi/(3 \times 2^n)$	s_n^2	p_n
1	6	$\pi/6$	$\frac{1}{4}$	6
2	12	$\pi/12$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$	6,2117
3	24	$\pi/24$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}$	6,2653
4	48	$\pi/48$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}$	6,2787
5	96	$\pi/96$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}}$	6,2821

On se rapproche (lentement) de la longueur de la circonférence :

$$2\pi = 6,283185 \dots$$

Dans le *Traité de la mesure du cercle*, Archimède accomplit deux prouesses successives. La première est de montrer que c'est la même constante qui donne le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre et le rapport de la surface d'un cercle au carré de son rayon (le nombre π). La seconde est de calculer un excellent et célèbre encadrement de π : $3 + 10/71 < \pi < 22/7$, en couplant la méthode précédente avec des calculs analogues des périmètres de polygones réguliers de 3×2^n côtés circonscrits au cercle. L'histoire du calcul de π depuis cet exploit est riche et reflète des avancées des mathématiques.

1.10 En posant $\text{Cos}(x) = R \cos x$, on déduit de

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \text{ et } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} :$$

$$\text{Sin}(a+b) = \frac{\text{Sin}(a)\text{Cos}(b) + \text{Sin}(b)\text{Cos}(a)}{R},$$

$$\text{Tan}(a+b) = R^2 \frac{\text{Tan}(a) + \text{Tan}(b)}{R^2 - \text{Tan}(a)\text{Tan}(b)}.$$

1.11 1) La droite $(A_n B_m)$ a pour équation $y = (n-m)x + mn$. Elle coupe l'axe des y au point d'ordonnée mn .

2) L'ensemble E contient tous les nombres entiers qui sont produits de deux nombres entiers > 1 , nombres qu'on appelle composés. Son complémentaire dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ est donc l'ensemble des nombres premiers.

Cette façon de retrouver l'ensemble des nombres premiers est récente et inattendue ; elle est due à Youri Matiyasevitch et Sergei Stechkin.

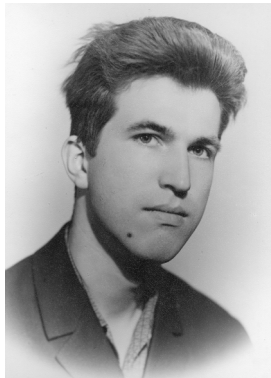


Figure 1.5 Youri Matiyasevitch ©Youri Matiyasevitch, 1969

1.12 1) L'union de $A \cap B$ et de $(E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ (dans le premier ensemble, les deux propositions sont vraies, dans le second, elles sont fausses).

2) Le complémentaire de l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à B .

3) Le complémentaire de $A \cap B$.

1.13 Comme $[(\forall x \in A)(P(x))]$ est l'abréviation de $[\forall x((x \in A) \Rightarrow (P(x)))]$, sa négation est $[\exists x((x \in A) \text{ et non } P(x))]$, soit $[(\exists x \in A)(\text{non } P(x))]$.

De même, $[(\exists x \in A)(P(x))]$ est l'abréviation de $[\exists x((x \in A) \text{ et } P(x))]$ et sa négation est $[(\forall x)(x \notin A \text{ ou } (\text{non } P(x)))]$, soit $[(\forall x)(x \in A \Rightarrow (\text{non } P(x)))]$ ou encore $[(\forall x \in A)(\text{non } P(x))]$.

DES FONCTIONS

ENTRE ENSEMBLES

2

2.1 HISTOIRE DE LA NOTION DE FONCTION

Même si elle nous paraît aujourd'hui naturelle, la notion de fonction que nous utilisons a mis du temps à se dégager et son histoire est longue et impossible à résumer en quelques lignes¹.

On peut penser que les Babyloniens (vers -1900 à -1600) ont déjà une idée de fonction quand ils dressent des tables de carrés, de cubes, etc. sur leurs tablettes d'argile. Les tables de lignes trigonométriques calculées depuis plus de 2 000 ans sont aussi des tableaux de valeurs de fonctions.

D'autre part, tous ceux qui étudient des problèmes de mouvement étudient en fin de compte des fonctions du temps ; c'est en décrivant des mouvements (définissant pour nous une équation différentielle, voir chapitre 9) que John Neper construit ses logarithmes.

Les lettres introduites en algèbre par François Viète en 1591 permettent, en écrivant des équations, de bien faire apparaître la dépendance des valeurs d'une quantité des valeurs d'une autre. Pierre de Fermat et René Descartes exploitent l'un et l'autre, dans les années 1630, cette nouvelle possibilité dans des problèmes de géométrie, repérant les points de leurs figures par des coordonnées, l'ordonnée (un mot de Pascal, 1658) dépendant de l'abscisse (*ligne coupée*, 1693). Descartes peut ainsi classer les courbes en géométriques (définies par une équation $P(x, y) = 0$, avec P polynôme, alors que les Grecs ne considéraient quasiment que les coniques), et mécaniques (par exemple, $y = e^x$). L'étude d'une courbe particulière comme la cycloïde et la détermination de ses tangentes est une question centrale pendant quelques années.

Autour des années 1665–1675, l'histoire de la mise au point du calcul différentiel et intégral a deux origines. Isaac Newton crée le langage des fluentes et des fluxions (le mot est de 1671) qui correspondent à peu près à des primitives et des dérivées et où le temps joue le rôle de variable : « Le temps absolu, vrai et mathématique (...) coule uniformément... » De son côté, Gottfried von Leibniz

1. Voir, par exemple, l'article d'Adolf Youschkevitch : « The Concept of a Function up to the Middle of the 19th Century », *Archives for History of Exact Sciences*, vol. 16, 1976/77, pp. 37-85 ; Plane Henri : « Fonction : petit historique autour de la notion et du mot », *Plot*, 11, 2005.

met en place les bases des calculs modernes. De nouvelles expressions mathématiques sont introduites : des sommes ou des produits infinis.

Le mot « fonction » vient de Leibniz en 1694 qui le crée à partir du latin *fungor* : remplir une charge, faire fonction de.



Figure 2.1 Gottfried von Leibniz © Hachette Livre

Le mot est tout de suite repris par Jean Bernoulli qui en donne la définition suivante (en 1718) :

« On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».

Il note X ou φx une fonction de x . Il s'agit ici de fonctions numériques, définies sur les réels ou les complexes et à valeurs réelles ou complexes. On a l'impression de ne plus être très loin de notre définition, mais cette définition vague est restrictive, car elle suppose implicitement qu'on n'utilise pour définir la fonction que ce qu'on connaît à l'époque : des sommes finies ou infinies, des produits, etc.

Euler propose en 1734 la notation $f(x)$. Il est le premier à placer le concept de fonction comme base de l'analyse dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* de 1748. Il est plus général que Jean Bernoulli et parle alors d'« expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constants » et il représente géométriquement la variable sur un axe. Il propose aussi que les fonctions aient plusieurs valeurs pour un même x de l'ensemble de départ ; par exemple, pour la fonction racine carrée, il écrit $\sqrt{4} = \pm 2$. Ce point de vue conduit à des difficultés, car il faut souvent savoir de quelle racine exactement on parle : si on rencontre deux racines de 4 dans un calcul, comment savoir quelle valeur prendre pour chacune d'entre elles ? Ce serait sans doute absurde de les prendre de signes contraires et que leur somme soit 0. C'est pourquoi on impose aujourd'hui la condition d'unicité de valeur d'une fonction en un point ; ainsi, la racine carrée d'un nombre réel positif est positive.

La résolution de l'équation des cordes vibrantes par d'Alembert en 1747 apporte un point de vue nouveau. Une fonction ne possède plus nécessairement des propriétés comme la continuité, la dérivabilité. Mais on reste encore attaché à l'idée qu'une fonction doit être définie par quelque chose comme une formule. Il faut encore quelques dizaines d'années pour arriver à la forme moderne de la notion de fonction numérique, donnée par Fourier en 1822 ou Dirichlet en 1837 (voir 17.6).

La notion de **variable** est alors essentielle : une fonction est définie par les valeurs qu'elle associe à une quantité variable x (une quantité qui reçoit « successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres », dit Cauchy) qui apparaît dans la notation $f(x)$; on distingue alors les quantités variables et les quantités constantes.

Il faut encore longtemps pour que la forme abstraite de fonction, fonction d'un ensemble E vers un ensemble F , soit formulée ; elle date de Maurice Fréchet en 1909. C'est elle qui est adoptée aujourd'hui, pour sa généralité qui s'adapte à beaucoup de situations. La notion de variable en est totalement absente.

2.2 FONCTIONS D'UN ENSEMBLE DANS UN AUTRE

2.2.1 Définition actuelle de la notion de fonction

Une **fonction** d'un ensemble E dans un ensemble F est la donnée d'un sous-ensemble $G \subset E \times F$ appelé **graphe** de la fonction tel que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$. On dit que y est l'image de x par f .

Le mot d'**application** est synonyme de fonction, mais, suivant le contexte, on préfère utiliser l'un plutôt que l'autre.

Ainsi, une fonction est définie par son graphe ; mais on pense habituellement à une fonction comme à l'association à chaque x de E de l'unique y tel que (x, y) soit un point de G et on écrit : la fonction $f : E \rightarrow F$ définie par $f(x) = \dots$. On utilise aussi la notation : $x \mapsto f(x)$ (quand E et F sont précisés par ailleurs). Dans la seconde notation, on remarquera qu'on ajoute une petite barre verticale devant la flèche et que la lettre utilisée est sans importance. Mais c'est la même lettre aux deux endroits où elle apparaît : $x \mapsto x^2 - 3x$ et $u \mapsto u^2 - 3u$ décrivent la même fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** ou **source** de la fonction et l'ensemble F **ensemble d'arrivée** ou **but** de la fonction ; il faut toujours que ces ensembles soient bien précisés quand on parle d'une fonction. On dit aussi que f est fonction d'une variable parcourant E . L'idée générale de fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F est illustrée par le dessin suivant (voir figure 2.2).

Si E et F sont deux ensembles, on notera $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F .