

50

CLÉS POUR COMPRENDRE LES **MATHS**

TONY
CRILLY

Traduit de l'anglais par Véronique Bordellès

DUNOD

Table des matières

Introduction 3

01 Zéro 4

02 Les systèmes de nombres 8

03 Les fractions 12

04 Les carrés et les racines carrées 16

05 π 20

06 e 24

07 L'infini 28

08 Les nombres imaginaires 32

09 Les nombres premiers 36

10 Les nombres parfaits 40

11 Les nombres de Fibonacci 44

12 Les rectangles d'or 48

13 Le triangle de Pascal 52

14 L'algèbre 56

15 L'algorithme d'Euclide 60

16 La logique 64

17 Les preuves 68

18 Les ensembles 72

19 Le calcul différentiel 76

20 Les constructions 80

21 Les triangles 84

22 Les courbes 88

23 La topologie 92

24 La dimension 96

25 Les fractales 100

26 Le chaos 104

27 Le postulat des parallèles 108

28 La géométrie discrète 112

29 Les graphes 116

30 Le problème des quatre couleurs 120

31 Les probabilités 124

32 La théorie de Bayes 128

33 Le problème des anniversaires 132

34 Les lois de probabilités 136

35 La courbe de la loi normale 140

36 Données corrélées 144

37 La génétique 148

38 Les groupes 152

39 Les matrices 156

40 Les codes 160

41 Le dénombrement 164

42 Les carrés magiques 168

43 Les carrés latins 172

44 Les mathématiques financières 176

45 Le problème du régime 180

46 Le voyageur de commerce 184

47 La théorie des jeux 188

48 La relativité 192

49 Le grand théorème de Fermat 196

50 L'hypothèse de Riemann 200

Glossaire 204

Index 206

Introduction

Les mathématiques sont un vaste domaine que nul ne peut maîtriser entièrement. Ce que l'on peut faire en revanche, c'est trouver son propre chemin pour les explorer. Les possibilités qui nous sont offertes nous entraîneront alors vers d'autres époques et des cultures différentes, nous faisant ainsi découvrir des idées qui ont plongé les mathématiciens dans la perplexité pendant des siècles.

Les mathématiques sont une discipline à la fois ancienne et moderne et se sont édifiées à partir d'influences culturelles et politiques venues du monde entier. Les Indiens et les Arabes nous ont donné notre système de numération actuel que viennent cependant émailler quelques vestiges du passé. Nous retrouvons encore des traces de la base « 60 » des Babyloniens des 2^e et 3^e millénaires av. J.-C. Ainsi, il y a 60 secondes dans 1 minute et 60 minutes dans 1 heure, un angle droit fait toujours 90° et non pas 100 grades en dépit de la tentative de la France révolutionnaire d'imposer le système décimal.

Les triomphes technologiques de l'époque moderne sont liés aux mathématiques, ce qui fait qu'aujourd'hui, on ne peut certainement plus se vanter d'avoir été un élève médiocre dans cette matière. Bien sûr, les mathématiques de l'école sont différentes car souvent enseignées dans le seul but de préparer à des examens. Le rythme soutenu imposé aux élèves n'est pas non plus propice à son enseignement, car les mathématiques sont une matière pour laquelle on ne gagne pas à être rapide. Il faut du temps pour apprivoiser les idées. Certains des plus grands mathématiciens ont fait preuve d'une lenteur monumentale dans leurs efforts pour comprendre les concepts compliqués qu'ils étudiaient.

Inutile, donc, de se précipiter pour lire ce livre. On peut le feuilleter à loisir. Prenez le temps de découvrir le sens réel de ces idées dont vous avez peut-être déjà entendu parler. Commencez par le chapitre sur le chiffre zéro, ou un autre si vous voulez, et de là, vous pouvez partir à la découverte des terres de la pensée mathématique. Vous pouvez, par exemple, vous informer sur la théorie des jeux, puis lire le chapitre sur les carrés magiques. Ou alors, après avoir vu les rectangles d'or, vous pouvez aller au grand théorème de Fermat, ou n'importe où ailleurs.

Nous vivons une époque passionnante pour les mathématiques. Ces dernières années, quelques-uns des plus grands problèmes ont été résolus. Les développements modernes de l'informatique ont permis d'en résoudre certains, mais se sont avérés impuissants pour en résoudre d'autres. La solution au problème des quatre couleurs a été trouvée grâce à l'ordinateur, mais l'hypothèse de Riemann, sujet du chapitre final de cet ouvrage, n'est toujours pas démontrée, que ce soit avec un ordinateur ou par un autre moyen.

Les mathématiques s'adressent à tous. La popularité du sudoku est la preuve que l'on peut faire des mathématiques (sans le savoir) et en plus y prendre du plaisir. Les mathématiques, comme l'art ou la musique, ont connu des génies dont l'histoire ne résume pas tout. Vous verrez plusieurs éminents personnages faire leur entrée et leur sortie dans certains chapitres puis revenir dans d'autres. Leonhard Euler, dont le tricentenaire a eu lieu en 2007, apparaît régulièrement dans ces pages. On doit cependant les vrais progrès des mathématiques à cette « multitude obscure » dont les travaux se sont accumulés au cours des siècles. Ce choix, certes personnel, de 50 sujets a toutefois été guidé par le désir de respecter un certain équilibre. Vous trouverez des thèmes familiers et d'autres plus poussés, des mathématiques pures et appliquées, abstraites et concrètes, anciennes et modernes. Les mathématiques forment cependant un tout, et la difficulté n'a donc pas été de choisir les sujets mais d'en éliminer certains. Il aurait pu y avoir 500 idées, mais 50 suffisent largement pour vous permettre de faire de bons débuts dans le monde mathématique.

01 Zéro

Tout petits, c'est d'un pas mal assuré que nous faisons notre entrée au pays des nombres. On nous y apprend que le 1 occupe la première position dans « l'alphabet des nombres », et qu'il est suivi de 2, 3, 4, 5... Les nombres ne servent à rien d'autre qu'à compter des choses réelles telles que des pommes, des oranges, des bananes, des poires. Ce n'est que bien plus tard que l'on apprend à compter le nombre de pommes dans une boîte lorsque celle-ci est vide.

Les Grecs de l'Antiquité eux-mêmes, qui ont pourtant permis l'avancée prodigieuse des sciences et des mathématiques, et qui se sont illustrés par leurs prouesses dans le domaine de la technologie, ne disposaient d'aucune méthode efficace pour compter le nombre de pommes dans une boîte vide. Ils n'ont pas réussi à donner un nom au « rien ». Les Romains avaient quant à eux une façon très particulière de combiner I, V, X, L, C, D et M. Mais qu'en était-il du 0 ? Ils ne comptaient pas le « rien ».

Comment le zéro est-il parvenu à se faire accepter ? L'utilisation d'un symbole pour désigner « le néant » remonterait à des milliers d'années. La civilisation Maya qui occupait le Mexique actuel employait le zéro sous différentes formes. Un peu plus tard, l'astronome Claudius Ptolémée, influencé par les Babyloniens, utilisait un symbole proche de notre 0 pour marquer une position dans son système de numération. En tant que marqueur de position, le zéro pouvait servir à différencier des nombres tels que 75 et 705 par exemple, sans avoir besoin de se référer au contexte comme le faisaient les Babyloniens. C'est un peu comme la « virgule » dans le langage écrit : tous deux nous permettent de « lire » la bonne signification. Toutefois, de même que l'utilisation de la virgule est accompagnée d'un ensemble de lois, des règles sont nécessaires pour bien utiliser le zéro.

Le mathématicien indien Brahmagupta au VII^e siècle de notre ère, pour qui le zéro était un « nombre » comme les autres, avait fixé des règles pour l'utiliser. Selon l'une d'elles, « la somme d'un nombre positif et de zéro est positive » et « la somme de zéro plus zéro est égale à zéro ». En considérant zéro comme un nombre et non pas seulement comme un marqueur de position, il était en avance sur son temps. Le système de numération indo-arabe dans lequel le zéro était utilisé comme un nombre fut diffusé en occident par Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci,

chronologie

700 av. J.-C.

Les Babyloniens utilisent le zéro en tant que marqueur de position dans leur système de numération.

628 av. J.-C.

Brahmagupta utilise le zéro et fixe des règles pour l'utiliser avec les autres chiffres.

dans son ouvrage intitulé *Liber Abaci* (*Le Livre des abaques*) qu'il publia en 1202. Élevé en Afrique du Nord et formé à l'école arithmétique indo-arabe, il reconnaissait tout l'intérêt qu'il y avait à utiliser le signe supplémentaire 0 en combinaison avec les symboles indiens 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

L'introduction du zéro dans le système de numération posa un problème que Brahmagupta n'examina que rapidement : comment fallait-il traiter cet « intrus » ? Il esquaissa une solution, mais les expédients qu'il proposait étaient vagues. Comment faire pour réellement intégrer le zéro dans le système arithmétique existant ? Certains ajustements étaient simples. Tant qu'il s'agissait d'additionner et de multiplier, 0 s'intégrait parfaitement, mais les opérations de soustraction et de division s'entendaient mal avec « l'étranger ». Des simplifications étaient nécessaires pour permettre au 0 de s'accorder avec l'arithmétique pratiquée à l'époque.

Comment fonctionne le zéro ? Les additions et les multiplications avec zéro sont simples et ne donnent pas lieu à contestation. Si 0 vient s'ajouter à 10, on obtient 100, mais « ajouter » doit être pris ici dans un sens purement numérique. additionner 0 à un nombre le laisse inchangé alors que multiplier 0 par n'importe quel nombre donne toujours 0. Par exemple, on a $7 + 0 = 7$ et $7 \times 0 = 0$. La soustraction est une opération simple qui peut cependant donner des nombres négatifs, $7 - 0 = 7$, et $0 - 7 = -7$, alors que la division avec 0 est source de difficultés.

Imaginons qu'il nous faille mesurer une longueur donnée avec une règle. Supposons que cette règle est de sept unités de long. Nous voulons savoir combien de règles nous pouvons mettre bout à bout pour effectuer notre mesure. Si notre longueur est de 28 unités effectives, la réponse est 28 divisé par 7 ou, avec les symboles mathématiques, $28 \div 7 = 4$. On préfère noter cette division sous la forme

$$\frac{28}{7} = 4$$

On peut alors effectuer un « produit en croix » et l'on obtient la multiplication $28 = 7 \times 4$. Que faire maintenant de 0 divisé par 7 ? Pour faciliter notre travail, appelons cette réponse a de sorte que

$$\frac{0}{7} = a$$

Avec un produit en croix, cela équivaut à $0 = 7 \times a$. Si c'est le cas, la seule valeur possible pour a est 0, car si la multiplication de deux nombres donne 0, alors l'un des deux doit être égal à 0.

Et ce n'est pas le plus difficile. Le point critique est la division par 0. Si l'on essaie de traiter $7/0$ de la même manière que $0/7$, on obtient l'équation

$$\frac{7}{0} = b$$

830 ap. J.-C.

Mahavira se penche sur les effets de l'introduction du zéro dans le système numérique.

1100

Bhaskara utilise 0 comme symbole en algèbre et entreprend de montrer comment il peut être utilisé.

1202

Fibonacci utilise le symbole supplémentaire 0 qu'il ajoute au système indo-arabe de chiffres de 1 à 9 mais ne lui donne pas le statut de nombre au même titre que les autres.

Avec le produit en croix, $0 \times b = 7$ et on aboutit à cette ineptie que $0 = 7$. Si l'on admet la possibilité pour $7/0$ d'être un nombre, on risque alors une pagaille numérique à grande échelle. La solution est de dire que $7/0$ est indéterminé. La division de 7 (ou de tout autre nombre que 0) par 0 ne débouche sur aucune réponse acceptable et c'est pourquoi cette opération n'est tout simplement pas autorisée. De manière similaire, il n'est pas permis de placer une virgule au « mi, lieu » d'un mot sans glisser dans l'absurde.

Le mathématicien indien Bhaskara au ^{xiii} siècle, à la suite de Brahmagupta, n'écarterait pas la division par 0 et suggérerait qu'un nombre divisé par 0 était infini. Ce raisonnement se tient parce que si l'on divise un nombre par un très petit nombre, le résultat obtenu est très grand. Par exemple, 7 divisé par $1/10$ est égal à 70 et 7 divisé par $1/100$ donne 700. Plus on réduit le nombre du dénominateur, plus le nombre que l'on obtient est grand. Si l'on allait dans la petitesse ultime en prenant 0 lui-même, la réponse serait l'infini. En adoptant cette forme de raisonnement, nous nous trouvons obligés d'expliquer un concept plus bizarre encore, à savoir celui de l'infini. Se débattre avec l'infini n'aide pas ; l'infini (symbolisé aujourd'hui par ∞) ne suit pas les règles habituelles de l'arithmétique et n'est pas un nombre au sens habituel du terme.

Si $7/0$ pose problème, que faire alors de l'encore plus bizarre $0/0$? Si $0/0 = c$, avec le produit en croix on obtient l'équation $0 = 0 \times c$ et donc $0 = 0$. Cela n'apporte pas grand-chose, mais ce n'est pas absurde non plus. En fait, c peut être un nombre quelconque et ainsi, nous ne débouchons pas sur une impossibilité. Nous arrivons à la conclusion que $0/0$ peut prendre n'importe quelle valeur, finie ou infinie ; les spécialistes parlent de « forme indéterminée ».

Pour résumer, l'étude de la division par zéro amène à la conclusion qu'il est préférable d'exclure cette opération de tous les calculs. L'arithmétique se porte tout aussi bien sans elle.

Pourquoi utiliser le zéro ? Il était tout simplement impossible de s'en passer. Les progrès de la science en dépendaient. On parle du degré zéro de longitude, du degré zéro sur l'échelle des températures et, de la même manière, de l'énergie du point zéro et du zéro absolu. Cette notion est entrée dans le langage courant avec des idées telles que le risque zéro et la tolérance zéro.

Une plus grande utilisation pourrait cependant en être faite. Si vous quittez la 5^e avenue à New York et pénétrez dans l'Empire State Building, vous vous retrouvez dans le magnifique hall d'entrée au niveau 1. On utilise la capacité des nombres à s'ordonner, le 1 étant utilisé pour désigner le « premier » étage, le 2 pour désigner le « second » et ainsi de suite jusqu'à 102 pour le « cent deuxième » étage. En Europe, le rez-de-chaussée n'est en fait rien d'autre qu'un étage 0 que l'on a cependant quelques répugnances à appeler ainsi.

Les mathématiques ne pourraient pas fonctionner sans le zéro. C'est même un élément fondamental dans les concepts mathématiques qui régissent notre système

de nombres, l'algèbre et la géométrie. Sur la ligne des nombres, 0 est celui qui sépare les nombres positifs des nombres négatifs, et c'est pourquoi il occupe une position privilégiée. Dans le système décimal, le zéro sert de marqueur de position qui nous permet d'utiliser à la fois des nombres gigantesques et d'autres microscopiques.

Le zéro a mis des centaines d'années avant de se faire accepter et de devenir l'une des inventions les plus importantes de l'homme. Le mathématicien américain G. B. Halsted au XIX^e siècle a détourné une réplique tirée du *Songe d'une nuit d'été* de Shakespeare pour dire que le zéro est le moteur du progrès qui « accorde à un rien dans l'air non seulement une demeure précise et un nom, une image, un symbole, mais également un pouvoir efficace ; il est la propriété du peuple indien qui lui a donné naissance. »

Au début, on a dû trouver le 0 tout à fait curieux, mais les mathématiciens ont la manie de s'enticher de concepts étranges qui s'avèrent utiles bien des années plus tard. C'est le cas aujourd'hui avec la théorie des ensembles où le concept d'un ensemble est défini comme une collection d'éléments. Dans cette théorie, $\emptyset$ désigne l'ensemble qui ne contient aucun élément, ce que l'on désigne par « l'ensemble vide ». C'est un ensemble curieux, certes, mais comme 0, il est indispensable.

Tout sur rien

La somme de zéro et d'un entier strictement positif est strictement positive.

La somme de zéro et d'un entier strictement négatif est strictement négative.

La somme d'un entier strictement positif et d'un entier strictement négatif est égale à leur différence, ou, s'ils sont égaux, à zéro.

Zéro divisé par un entier strictement négatif ou positif est égal à zéro ou s'écrit sous la forme d'une fraction dont le numérateur est égal à zéro et le dénominateur est une quantité finie.

Brahmagupta, 628

idée clé
Rien est quelque chose

02 Les systèmes de nombres

Un système de nombres est un outil qui permet de traiter le concept de « quantité ». Diverses cultures à des moments différents de l'histoire ont adopté des méthodes variées, qui vont de la méthode de base « un, deux, trois, beaucoup » à la notation décimale hautement sophistiquée que nous utilisons aujourd'hui.

Les Sumériens et les Babyloniens, qui occupaient la Syrie, la Jordanie et l'Irak actuels il y a 4 000 ans environ, utilisaient un système de numérotation de position pour leur usage quotidien. Nous l'appelons système de position parce que l'on reconnaît le « nombre » grâce à la position d'un symbole. Ils utilisaient également 60 comme unité de base : c'est ce que nous appelons aujourd'hui un système sexagésimal ou système « en base 60 ». Il reste aujourd'hui des vestiges de la base 60. Il y a 60 secondes dans une minute, 60 minutes dans une heure. En ce qui concerne les angles, leur mesure repose aujourd'hui encore largement sur le système sexagésimal et s'exprime en degrés notés $^{\circ}$. Ainsi, l'angle nul mesure 360° contre 400 grades avec le système décimal qui n'a jamais réussi à s'imposer. Un angle droit vaut donc 100 grades.

Nos très lointains ancêtres utilisaient principalement les nombres à des fins pratiques, et pourtant certains signes prouvent que les mathématiques en tant que telles excitaient la curiosité de ces cultures primitives, et qu'elles ont pris sur le temps réservé à l'exécution des tâches quotidiennes pour les explorer. Au nombre de ces explorations, figurent ce que l'on pourrait appeler « l'algèbre » et les propriétés des figures géométriques.

Le système égyptien du XIII^{e} siècle av. J.-C. utilisait la base 10 associée à un système de signes hiéroglyphiques. Les Égyptiens développèrent notamment un système destiné à traiter les fractions, mais la notation décimale de position actuelle nous est venue des Babyloniens, et ce sont les Indiens qui l'ont plus tard améliorée. Elle présente l'avantage de pouvoir exprimer à la fois de très petits nombres et de très gros. Les chiffres indo-arabes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 utilisés seuls permettent de

chronologie

300000 av. J.-C.

Les peuples européens du paléolithique comptent en faisant des entailles sur des os.

2000 av. J. C.

Les Babyloniens utilisent des symboles pour représenter les nombres.

calculer assez facilement. Pour le comprendre, examinons le système romain. Il était adapté à leurs besoins mais seuls des spécialistes du système étaient capables de s'en servir pour réaliser des calculs.

Le système romain Les symboles de base utilisés par les Romains étaient les « dix » (I, X, C et M), et leur moitié (V, L et D). Ces symboles sont combinés pour en former d'autres. On suppose que les symboles I, II, III et IIII tirent leur origine de l'apparence de nos doigts, V de la forme de notre main, et que, si l'on combine ce dernier symbole avec un V à l'envers de manière à former un X, on retrouve deux mains, ou dix doigts. C viendrait de *centum* et M de *mille*, mots latins signifiant respectivement cent et mille. Les Romains utilisaient aussi S pour « une moitié » ainsi qu'un système de fractions en base 12.

Le système romain utilisait une méthode qui reposait sur la position « avant et après » des symboles de base pour construire les combinaisons nécessaires, mais elle n'aurait, semble-t-il, pas été uniformément adoptée. Les Romains de l'Antiquité préféraient écrire IIII, alors que IV n'a été introduit que bien plus tard. La combinaison IX semble avoir été utilisée, mais pour un Romain,

SIX aurait signifié $8\frac{1}{2}$! Voici les nombres de base du système romain, avec quelques ajouts effectués à l'époque médiévale :

Il n'est pas facile de manier les chiffres romains. Il est par exemple impossible de comprendre MMMCDXLIII si l'on n'introduit pas mentalement des parenthèses, de sorte que (MMM) (CD) (XL) (III) se lit alors 3 000 + 400 + 40 + 4 = 3 444. Mais essayez d'ajouter MMMCDXLIII à CCCXCIII. Un spécialiste romain de ce système aurait usé d'astuces pour s'en sortir, mais pour nous, il est difficile d'obtenir la bonne réponse sans d'abord effectuer le calcul dans le système décimal pour traduire ensuite le résultat en notation romaine :

Addition

$$\begin{array}{rcl} 3\,444 & \rightarrow & \text{MMMCDXLIII} \\ + 394 & \rightarrow & \text{CCCXCIII} \\ = 3\,838 & \rightarrow & \text{MMMDCCCXXXVIII} \end{array}$$

La multiplication de deux nombres est bien plus difficile et pourrait bien être impossible dans ce système de base, même pour les Romains ! Pour résoudre $3\,444 \times 394$, il est nécessaire d'avoir recours aux extensions médiévales.

Le système de nombres romain

Empire Romain

S	une moitié
I	un
V	cinq
X	dix
L	cinquante
C	cent
D	cinq cents
M	mille

Extensions de l'époque médiévale

$\overline{V}$	cinq mille
$\overline{X}$	dix mille
$\overline{L}$	cinquante mille
$\overline{C}$	cent mille
$\overline{D}$	cinq cent mille
$\overline{M}$	un million

600 ap. J.-C.

L'ancêtre de notre numération décimale moderne est utilisée en Inde.

1200

Le système indo-arabe de notation des chiffres commence à se répandre.

1600

Les symboles du système décimal prennent les formes que nous leur connaissons aujourd'hui.

Multiplication

$$\begin{array}{rcl}
 3\,444 & \rightarrow & \text{MMMCDXLIII} \\
 \times 394 & \rightarrow & \text{CCCXCIII} \\
 \hline
 = 1\,356\,936 & \rightarrow & \text{MCCCLV MCMXXXVI}
 \end{array}$$

Les Romains n'avaient pas de symbole spécifique pour le zéro. Si vous aviez demandé à un citoyen végétarien de Rome de recenser le nombre de bouteilles de vin consommées dans sa journée, il aurait peut-être écrit III, mais si vous lui aviez demandé combien de poulets il avait mangé, il n'aurait pas pu écrire 0. Il reste des vestiges du système romain dans la pagination de certains livres (pas dans celui-ci cependant) et sur les frontons de certaines bâtisses. Certaines compositions n'ont jamais été utilisées par les Romains, comme MCM pour 1900 par exemple, mais elles ont été introduites à l'époque moderne pour satisfaire des préférences purement formelles. Les Romains auraient écrit MDCCCC. Le quatorzième Roi Louis de France, maintenant universellement connu sous le nom de Louis XIV, préférait en réalité se faire appeler Louis XIII et avait décidé que le 4 des horloges devait s'écrire sous la forme IIII.



**Pendule
Louis XIII**

Représentation décimale des nombres entiers Dans le langage courant, on ne fait pas la différence entre « les nombres » et les nombres entiers. Le système décimal prend

10 pour base et utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Lorsque l'on écrit le nombre **394**, on peut expliciter sa signification décimale en disant qu'il est composé de 3 centaines, 9 dizaines et 4 unités, ce qui s'écrirait

$$394 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1$$

On peut aussi l'écrire en utilisant des « puissances » de 10 (encore appelées « exposants ») :

$$394 = 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

En effet $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ et nous admettons le cas à part $10^0 = 1$. Cette notation fait apparaître plus clairement la base décimale de notre système de nombres usuel, système grâce auquel l'addition et la multiplication gagnent en transparence.

La virgule décimale Jusque-là, nous avons examiné la représentation des nombres entiers. Le système décimal peut-il traiter des parties de nombre telles que $\frac{572}{1000}$? Cet exemple peut être noté sous la forme développée

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

On peut traiter les « réciproques » de 10, 100, 1 000 comme des puissances négatives de 10, de sorte que

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$