PT/PT*

Colles de mathématiques

Philippe Agnès
Rémi Coutens

NOUVEAUX PROGRAMMES !

310 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

PT/PT*

Colles de **mathématiques**

PT/PT*

Colles de **mathématiques**

NOUVEAUX PROGRAMMES

Philippe Agnès

Rémi Coutens

Sous la direction de François Pantigny

ellipses

Collection Colles de Prépas
dirigée par François Pantigny

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur
www.editions-ellipses.fr

Nous remercions M. Pantigny pour ses conseils, ses illustrations et sa relecture.

Je dédie ce livre à Cécile, Vincent, Charlotte et Maud.

Philippe Agnès

Je dédie ce livre à mes enfants qui font ma joie et ma fierté. Merci à Louis et Marie de m'avoir inspiré l'exercice 14 du chapitre 10.

Rémi Coutens

ISBN 9782340-066540
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À la mémoire de Bernard Belouze
notre enseignant au lycée du Parc à Lyon.

Avant-propos

En seconde année les interrogations orales n'engendrent plus d'appréhension. On sait que cette spécificité du système des classes préparatoires aux grandes écoles participe grandement aux progrès des étudiants. Cependant, cette seconde année est courte et à l'assimilation régulière du cours s'ajoute l'aspect de l'entraînement à l'oral. Néanmoins, de même qu'on ne se prépare pas à un marathon en faisant des marathons, un bon exercice pour l'oral d'un concours n'est pas forcément un bon exercice pour une « colle » au cours de l'année. C'est pourquoi même si certains sujets proviennent de l'écrit [*] ou de l'oral [**], ils ont parfois été modifiés afin de recentrer leurs questions sur un chapitre précis d'interrogation.

Dans l'objectif d'une préparation efficace, les exercices de ce livre sont classés en trois catégories :

- Les « exercices axés sur le calcul ». Souvent application quasiment directe du cours, ils ont pour objectif, via la pratique calculatoire, de vérifier la connaissance et la compréhension des notions du cours.
- Les « exercices axés sur le raisonnement ». Ces exercices demandant plus de recul, leur objectif est de renforcer l'assimilation des concepts.
- Les « exercices avec questions ouvertes ». Ces exercices amènent l'étudiant à avoir sa propre réflexion, à construire sa démonstration ou son contre-exemple selon les cas.

Plutôt que l'originalité ou la difficulté, nous avons privilégié des exercices qui nous ont paru formateurs. Néanmoins certains exercices, signalés par une ou deux étoiles, sont d'un niveau plus élevé.

Les corrections des exercices figurent après la liste des énoncés. Chaque exercice est entièrement corrigé parfois de plusieurs manières lorsque cela nous a semblé utile.

En début de chaque chapitre se trouve une figure, généralement réalisée par M. Pantigny, qui illustre soit une notion, soit un exercice. Nous encourageons le lecteur à faire le plus souvent possible ses propres représentations.

Nous remercions les étudiants qui nous ont transmis leurs retours d'oraux dont certains figurent dans cet ouvrage.

En espérant que ce livre contribue efficacement à leur préparation aux concours, nous adressons nos vœux de réussite aux lecteurs de ce livre.

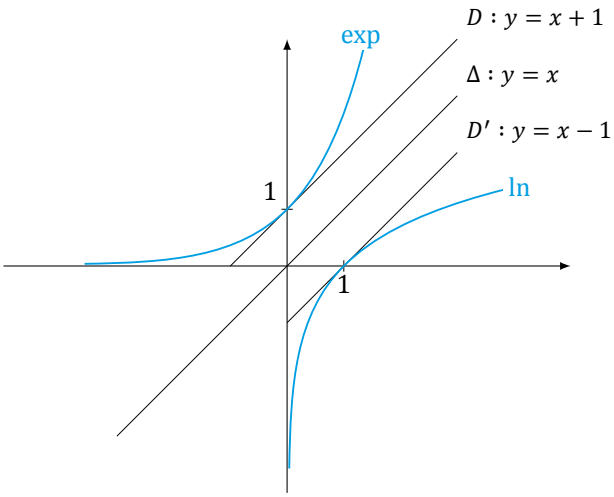
[*] On indique alors *D'après Banque PT* après le sujet de l'exercice.

[**] On indique alors *D'après Oral 1* pour l'oral Mathématiques 1, *D'après Oral 2* pour l'oral Mathématiques et Algorithmique.

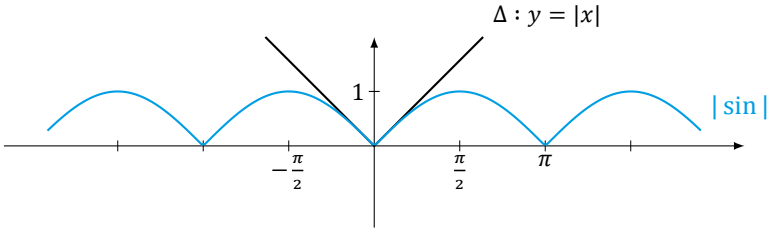
Sommaire

1	Fonctions d'une variable	3
2	Espaces vectoriels	21
3	Matrices	47
4	Réduction des endomorphismes	73
5	Séries numériques	109
6	Séries entières	131
7	Intégration	155
8	Équations différentielles	179
9	Intégrales à paramètres	203
10	Probabilités	231
11	Variables aléatoires	251
12	Courbes planes	279
13	Espaces préhilbertiens	309
14	Étude métrique des courbes	337
15	Isométries	363
16	Matrices symétriques, coniques	389
17	Calcul différentiel	437
18	Courbes et surfaces de l'espace	467

1 Fonctions d'une variable



Deux inégalités à connaître : $e^x \geqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$ (ou encore $\ln(1 + t) \leqslant t$).



Autre inégalité utile $\left|\sin(x)\right| \leqslant |x|$.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Étude de fonction*

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose :

$$\psi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1) Montrer que ψ est constante sur $]0, +\infty[$ et préciser $\psi(x)$ pour $x > 0$.
2) Que devient ce résultat pour $x < 0$?

D'après Banque PT

Exercice 2 *Calcul trigonométrique*

Soit t un réel appartenant à $[0, \pi/2]$.

1) Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $\cos(t/2)$.
2) Comparer $\frac{1}{1+\tan^2(t/2)}$ et $\cos^2(t/2)$.
3) On pose $u = \tan(t/2)$. Exprimer $\cos(t)$ en fonction de u.
4) Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan(t/2)$.

D'après Banque PT

Exercice 3 *Étude d'une fonction*

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

1) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (notée encore f).
2) Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente en son point d'abscisse 0 et préciser une équation cartésienne de cette tangente.
4) Tracer l'allure de cette courbe.

D'après Oral 2

Exercice 4 *Utilisation de développements limités*

Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $M(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$.

1) Justifier que M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $M'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de M.
3) En déduire les vecteurs dérivés $M'(0)$, $M''(0)$ et $M^{(3)}(0)$.

Exercice 5 *Dérivées successives*

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
2) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
3) Déterminer deux réels α et β (que l'on exprimera en fonction de λ_1 et λ_2) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}, \qquad \frac{1}{x^2 - x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}.$$

4) Soit λ un réel. Préciser la dérivée n-ième de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$.
5) En déduire la dérivée n-ième de la fonction g.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6 *Dérivées successives*

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
   On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
3) Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée n-ième du produit de deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$.
4) Dans cette question, on suppose $n \geqslant 2$.
   En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n - 1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

5) On pose, pour tout entier naturel p, $u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.
   a) Calculer directement u_0 et u_1.
   b) Pour tout $p \geqslant 2$, montrer que $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.
   c) En utilisant la formule de Taylor-Young et la question précédente, exprimer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.
   d) Pour tout entier naturel p, exprimer u_p en fonction de p, de λ_1 et de λ_2.

D'après Banque PT

Exercice 7 *Classique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra montrer par récurrence que pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x)$ existe et est de la forme $P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$, où P_n est un polynôme.

D'après Oral 1

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{k\pi}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right).$$

1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, on ait $\left|\sin(x) - x\right| \leqslant x^3$.
2) Justifier l'existence et préciser la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3) Montrer que la suite de terme général $|u_n - v_n|$ converge.
4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

D'après Oral 2

Exercice 9 *Suites d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \int_1^{\mathrm{e}} \big(\ln(x)\big)^n \, \mathrm{d}x$.

1) Calculer u_1.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente.
3) Montrer que :
$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \qquad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$
En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
4) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres entiers telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = a_n + b_n\mathrm{e}.$$

D'après Oral 2

Exercice 10 *Suite récurrente et étude de séries*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver sa limite.
2) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$.
3) Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sont de même nature.
4) En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

D'après Oral 2

Exercice 11 *Suite implicite*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n - \cos(x)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n admet un unique zéro sur $[0, 1]$ noté a_n.
2) Étudier les variations de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Étudier la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite.
4) Déterminer un équivalent de $1 - a_n$ lorsque n tend vers l'infini.

D'après Oral 2

Exercice 12 ⋆⋆ *Suite récurrente*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1) Si $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$, a-t-on toujours $e^{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{y_n}$?
Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, alors :

$$e^{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{y_n} \iff \lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs positives.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
On pose $v_n = 2^{-n} \ln(u_n)$.
4) Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant} (v_{n+1} - v_n)$. En déduire la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5) Donner un équivalent de u_n en fonction de la limite ℓ de v_n.

D'après Oral 1

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

Soit P un polynôme non nul. L'équation $P(x) = e^x$ peut-elle admettre exactement $\deg(P)$ solutions ? Un nombre infini de solutions ?

D'après Oral 2

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Par addition et composition, la fonction ψ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Pour $x \in]0,+\infty[$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

La dérivée est nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc ψ est constante sur $]0,+\infty[$.

Remarque

Il est important que $]0,+\infty[$ soit un intervalle pour ce point. D'ailleurs, la dérivée de ψ est nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et la fin de l'exercice montre que ψ n'est pas constante sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Or, $\psi(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2) La fonction arctan étant impaire, ψ l'est aussi, donc on obtient :

$$\forall x < 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2

1) On a, d'après les formules de duplication :

$$\cos(t) = \cos\big(2(t/2)\big) = 2\cos^2(t/2) - 1.$$

2) Par définition, tan = sin/cos donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\tan^2(t/2)} &= \frac{1}{1+\frac{\sin^2(t/2)}{\cos^2(t/2)}} \\ &= \frac{\cos^2(t/2)}{\cos^2(t/2)+\sin^2(t/2)} \\ &= \cos^2(t/2).\end{aligned}$$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

3) Avec $u = \tan(t/2)$, on a en combinant les 2 résultats précédents :

$$\cos(t) = 2\frac{1}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

4) Remarquons que pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $2+\cos(t) > 0$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{2+\cos(t)}$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$. En particulier, l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ existe.

En utilisant le changement $u = \tan(t/2)$, on a $u \in [0,1]$ (car $\tan(0) = 0$ et $\tan(\pi/4) = 1$).

Avec le résultat du 2), $2+\cos(t) = 2 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{3+u^2}{1+u^2}$.

Comme $t/2 \in]-\pi/2,\pi/2[$, $u = \tan(t/2)$ entraîne $t/2 = \arctan(u)$. D'où $\mathrm{d}t = 2\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

Après simplification, on obtient $I = \int_0^1 \frac{2}{3+u^2}\,\mathrm{d}u$.

Remarque
En pratique, on peut éviter le recours à arctan :
De $u = \tan(t/2)$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2(t/2)\right)\mathrm{d}t$. Comme $1 + \tan^2(t/2) = 1 + u^2$, on en déduit $\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

On pose ensuite $u = \sqrt{3}x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{3+3x^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(x)\right]_0^{1/\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(1/\sqrt{3}). \quad \arctan(0) = 0 \end{aligned}$$

Enfin, $\pi/6 \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(\pi/6) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$.

Finalement, $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 3

1) Comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$, d'où l'on déduit $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + o(t)$.
Par conséquent, $1 - \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{=} t + o(t)$. Donc $1 - \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t$, puis $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$.
Ce résultat signifie que $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$.
En posant $f(0) = 1$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2) Comme quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et on a :

$$f'(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}t - (1-\mathrm{e}^{-t})}{t^2} = \frac{(t+1)\mathrm{e}^{-t} - 1}{t^2}.$$

- Première méthode (en utilisant $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$)
Pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) > 0 &\iff (t+1)\mathrm{e}^{-t} - 1 > 0 \\ &\iff (t+1)\mathrm{e}^{-t} > 1 \\ &\iff (t+1) > \mathrm{e}^t. \end{aligned} \quad \text{on multiplie par } \mathrm{e}^t > 0$$

Or, $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$, donc $f'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \neq 0$.

- Deuxième méthode (par étude de fonction)
Le signe de $f'(t)$ est celui de $\varphi(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-t} - 1$.

CORRECTIONS

Comme $\varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t} - (t+1)\mathrm{e}^{-t} + 0 = -t\mathrm{e}^{-t}$, on a le tableau de variations suivant pour φ :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et de dérivée négative sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.

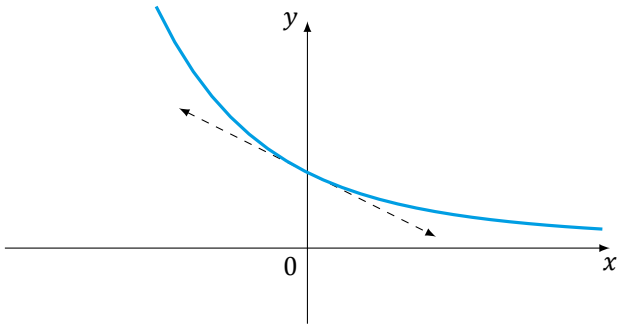
3) Il s'agit de montrer que f est dérivable en 0. Le plus rapide est de reprendre le calcul de la question 1) en utilisant un terme de plus dans le développement limité de l'exponentielle. En utilisant $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + t^2/2 + o\left(t^2\right)$, on a :

$$f(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = \frac{t - t^2/2 + o\left(t\right)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t/2 + o\left(t\right).$$

L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en 0 prouve la dérivabilité de f en 0 et on a $f'(0) = -1/2$.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -\frac{1}{2}x + 1$.

4) Ci-dessous l'allure de la courbe représensative de f.



Exercice 4

1) Les deux fonctions $\cos^3$ et $\sin^3$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (comme produit), la fonction M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On obtient en dérivant chacune des composantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t)\cos^2(t) \\ 3\cos(t)\sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

2) On connaît le développement limité de cos à l'ordre 3 en 0. En outre, on sait que l'on obtient un développement limité d'un produit à l'ordre 3 en 0 en ne conservant que les termes d'ordre inférieurs à 3.

Ainsi, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\cos(t) &\underset{t\to 0}{=} 1-\tfrac{1}{2}t^2+o\left(t^3\right)\\
\cos^2(t) &\underset{t\to 0}{=} \left(1-\tfrac{1}{2}t^2+o\left(t^3\right)\right)\left(1-\tfrac{1}{2}t^2+o\left(t^3\right)\right) \qquad \cos^2=\cos\times\cos\\
&\underset{t\to 0}{=} 1-\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{2}t^2+o\left(t^3\right) \qquad t^4=o\left(t^3\right),\ t^2o\left(t^3\right)=o\left(t^3\right)\\
&\underset{t\to 0}{=} 1-t^2+o\left(t^3\right)\\
\cos^3(t) &\underset{t\to 0}{=} \left(1-t^2+o\left(t^3\right)\right)\left(1-\tfrac{1}{2}t^2+o\left(t^3\right)\right) \qquad \cos^3=\cos^2\times\cos\\
\cos^3(t) &\underset{t\to 0}{=} 1-\tfrac{3}{2}t^2+o\left(t^3\right).
\end{aligned}$$

On pourrait faire de même à partir de $\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t-\frac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)$, mais il est plus rapide de remarquer que $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ entraîne $\sin^3(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^3$, puis $\sin^3(t) \underset{t\to 0}{=} t^3+o\left(t^3\right)$.
Par conséquent :

$$M(t) \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}t^2+o\left(t^3\right) \\ t^3+o\left(t^3\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+o\left(t^3\right).$$

3) La fonction M étant 3 fois dérivable en 0, le développement limité est également obtenu par la formule de Taylor-Young :

$$M(t) \underset{t\to 0}{=} M(0)+tM'(0)+\frac{1}{2}t^2M''(0)+\frac{1}{6}t^3M'''(0)+o\left(t^3\right).$$

Par unicité du développement limité, on obtient :

$$M'(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, M''(0)=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M'''(0)=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}.$$

Remarque
Certes, la question 2) permet d'obtenir $M'(0)$ en particulier. Mais, en général, calculer les dérivées successives pour obtenir un développement limité n'est pas une bonne méthode.

Exercice 5

1) Le discriminant du trinôme du second degré X^2-X-1 vaut $1+4=5$. Donc l'équation $x^2-x-1=0$ a deux racines réelles $\lambda_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) La fonction polynomiale $x\mapsto x^2-x-1$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\setminus\{\lambda_1,\lambda_2\}$, la fonction $g : x\mapsto \frac{1}{x^2-x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\lambda_1,\lambda_2\}$.

3) La fonction $g : x\mapsto \frac{1}{x^2-x-1}$ est une fraction rationnelle de degré négatif avec 2 pôles simples λ_1 et λ_2. On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\lambda_1,\lambda_2\}, \qquad \frac{1}{x^2-x-1}=\frac{1}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}=\frac{\alpha}{x-\lambda_1}+\frac{\beta}{x-\lambda_2}$$

avec $\alpha = \left(\frac{1}{x-\lambda_2}\right)_{x=\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}$ et $\beta = \left(\frac{1}{x-\lambda_1}\right)_{x=\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}$.

Remarque

Comme $\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{5}$, on a $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\alpha = -\beta$.

4) Si $h : x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$, on sait (ou on retrouve facilement) :

$$h'(x) = -\frac{1}{(x-\lambda)^2}, \quad h''(x) = \frac{2}{(x-\lambda)^3}, \quad h'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x-\lambda)^4}$$

et plus généralement, $h^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-\lambda)^{n+1}}$.

5) Par addition, on déduit des questions précédentes :

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= (-1)^n \alpha \tfrac{n!}{(x-\lambda_1)^{n+1}} + \beta(-1)^n \tfrac{n!}{(x-\lambda_2)^{n+1}} \\ &= (-1)^n \tfrac{n!}{\sqrt{5}} \left(-\tfrac{1}{(x-\lambda_1)^{n+1}} + \tfrac{1}{(x-\lambda_2)^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

$\beta = -\alpha = 1/\sqrt{5}$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6

1) Le discriminant du trinôme du second degré $X^2 + X - 1$ vaut $1 + 4 = 5$. Donc l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a deux racines réelles $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2) La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + x - 1$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

3) D'après la formule de Leibniz, la dérivée n-ième du produit de deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$ est donnée par :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

4) En posant $u : x \mapsto x^2 + x - 1$, on a $u' : x \mapsto 2x$, $u'' : x \mapsto 2$, puis, $u^{(k)} = 0$ à partir du rang 3.

En notant $\varphi : x \mapsto (x^2 + x - 1)f(x)$, on a d'après la formule de Leibniz , pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} u(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) f^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2 + x - 1) f^{(n)}(x) + n(2x+1) f^{(n-1)}(x) + 2\tfrac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x). \end{aligned}$$

si $k \geqslant 3$, $u^{(k)} = 0$

$(\star)$

$(\star)$ On utilise $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Par ailleurs, φ étant constante, sa dérivée n-ième est nulle.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$(x^2+x-1)f^{(n)}(x) + n(2x+1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0 \qquad (\Delta)$$

5) a) Comme $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$, on a $f' : x \mapsto -\frac{2x+1}{(x^2+x-1)^2}$. En particulier, $f(0) = -1$ et $f'(0) = -1$. D'où :

$$u_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = f(0) = -1 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = f'(0) = -1.$$

b) D'après (Δ), on a $-f^{(p)}(0) + pf^{(p-1)}(0) + p(p-1)f^{(p-2)}(0) = 0$. D'où :

$$-p!u_p + p \cdot (p-1)!u_{p-1} + p(p-1) \cdot (p-2)!u_{p-2} = 0.$$

Comme $p \cdot (p-1)! = p!$ et $p(p-1) \cdot (p-2)! = p!$, on obtient $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.

c) D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 4, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{4} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + o\left(x^4\right) = \sum_{p=0}^{4} u_p x^p + o\left(x^4\right).$$

Connaissant $u_0 = -1$ et $u_1 = -1$, on obtient $u_2 = u_1 + u_0 = -1 - 1 = -2$, puis $u_3 = u_2 + u_1 = -2 - 1 = -3$ et $u_4 = u_3 + u_2 = -3 - 2 = -5$. D'où :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 - x - 2x^2 - 3x^3 - 5x^4 + o\left(x^4\right).$$

d) On reconnaît une suite linéaire récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$. Il y a deux solutions qui sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\lambda_1$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\lambda_2$.
Donc il existe des réels α et β tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_p = \alpha(-\lambda_1)^p + \beta(-\lambda_2)^p.$$

Puisque $u_0 = -1$ et $u_1 = -1$, on a le système $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ -\lambda_1\alpha - \lambda_2\beta = -1 \end{cases}$.

En formant $\lambda_1 L_1 + L_2$, on obtient $(\lambda_1 - \lambda_2)\beta = -\lambda_1 - 1$. Comme $\lambda_1 - \lambda_2 = -\sqrt{5}$ et $-\lambda_1 - 1 = \lambda_2$, on en déduit $\beta = -\lambda_2/\sqrt{5}$. Puis $\alpha = -1 - \beta = (-\sqrt{5} + \lambda_2)/\sqrt{5} = \lambda_1/\sqrt{5}$.
Finalement :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_p = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}(-\lambda_1)^p - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}(-\lambda_2)^p.$$

Remarque

L'énoncé de la banque PT proposait également de retrouver la dérivée n-ième de f, en utilisant une décomposition de la fraction comme à l'exercice 5.

Exercice 7

1) • Par composition de fonctions dérivables, f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
• Comme $1/x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et $\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, par composition de limites. Or, $f(0)=0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2}$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}\mathrm{e}^{-t}=0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)=0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)\in\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la limite de la dérivée.

2) Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ « il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x)=P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour tout $x\neq 0$ ».

- Initialisation
  En posant $P_0=1$, on a bien $f^{(0)}(x)=f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}=P_0(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour tout $x\neq 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité
  Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  On a alors $f^{(n)}(x)=P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$ où P_n est un polynôme. Cette expression étant dérivable, on obtient :
  $$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{2}{x^3}P_n(1/x)-\frac{1}{x^2}P_n'(1/x)\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}.$$
  On pose alors $P_{n+1}=2X^3P_n-X^2P_n'$. On constate que P_{n+1} est bien un polynôme et que pour tout $x\neq 0$, on a $f^{(n+1)}(x)=P_{n+1}(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$.
  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit P un polynôme. Pour $x\neq 0$, $P(1/x)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $1/x^k$ où $k\in\mathbb{N}$. Comme $t^{k/2}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $P(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ en utilisant $t=1/x^2$.

Par conséquent, toutes les $f^{(n)}$ ont une limite réelle (à savoir 0) en 0.

En appliquant Itérativement le théorème de la limite de la dérivée, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

1) On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$. On en déduit $\left(\sin(x)-x\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}x^3$, puis $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

En utilisant la définition de la limite avec $\epsilon=5/6$ (on a bien $\epsilon>0$), on sait qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$:

$$-1\leqslant\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\leqslant\frac{\sin(x)-x}{x^3}\leqslant\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1.$$

On en déduit qu'alors $\left|\sin(x) - x\right| / \left|x^3\right| \leqslant 1$.
Pour $x \in]0, \alpha]$, on a en outre $\left|x^3\right| = x^3$. En multipliant le résultat précédent par $x^3 > 0$, on obtient $\left|\sin(x) - x\right| \leqslant x^3$.
Cette inégalité étant par ailleurs valable en 0, on a :

$$\forall x \in [0, \alpha], \quad \left|\sin(x) - x\right| \leqslant x^3.$$

2) En remarquant que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, on fait apparaître une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto x\sin(x)$ pour la subdivision régulière de $[0, \pi]$ de pas $\frac{\pi}{n}$. Comme f est continue sur $[0, \pi]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
L'intégrale se calcule par une intégration par parties.
Considérons pour tout $x \in [0, 1]$, $\begin{cases} u(x) &= x \\ u'(x) &= 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) &= \sin(x) \\ v(x) &= -\cos(x) \end{cases}$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= +\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi + \left[\sin(x)\right]_0^\pi. \end{aligned}$$

intégration par parties

$\cos(\pi) = -1$

Comme $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$, l'intégrale vaut π et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) Par linéarité de la somme, $u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{k\pi}{n^2} - \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)\right)$.
D'où :

$$\begin{aligned} \left|u_n - v_n\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \left|\frac{k\pi}{n^2} - \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3 \\ &\leqslant \pi^3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3} \\ &\leqslant \pi^3 \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

inégalité triangulaire

$|ab| = |a|\,|b|$

d'après 1) et $|\sin| \leqslant 1$

$\frac{k}{n} \leqslant 1$ car $k \in [\![1, n]\!]$

somme de n termes égaux

Comme $1/n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la suite de terme général $|u_n - v_n|$ converge vers 0 par encadrement.

4) On en déduit que $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 0 = 1$.

Remarque

À la question 3), on aurait pu utiliser $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

CORRECTIONS

Exercice 9

1) Si on ne connaît pas une primitive de ln, on effectue une intégration par parties :

$$u_1 = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \big[x\ln(x)\big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

2) Pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$, d'où $0 \leqslant \big(\ln(x)\big)^{n+1} \leqslant \big(\ln(x)\big)^n$.
Les bornes étant dans le sens croissant, on obtient en intégrant $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, elle est donc convergente.

3) On introduit la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}} - \ln(x)$, qui correspond à la différence des 2 membres.
Comme $\varphi'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{x} = \frac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}x}$, φ' est négative sur $[1,\mathrm{e}]$. D'où φ est minimale en e.
Or, $\varphi(\mathrm{e}) = 1 - 1 = 0$, donc φ est positive sur $[1,\mathrm{e}]$.
Pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x/\mathrm{e}$, d'où $0 \leqslant \big(\ln(x)\big)^n \leqslant (x/\mathrm{e})^n$.
On obtient, en intégrant, $0 \leqslant u_n \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^n}{\mathrm{e}^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{\mathrm{e}^n}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)\mathrm{e}^n} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$.
On en déduit que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle, par encadrement.

4) On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « il existe a_n et b_n entiers tels que $u_n = a_n + b_n\mathrm{e}$ ».

- Initialisation
  On a vu $u_1 = 1$. En posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, on a bien a_1 et b_1 entiers et $u_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$.
  Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Hérédité
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  On a alors a_n et b_n entiers tels que $u_n = a_n + b_n\mathrm{e}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \big(\ln(x)\big)^{n+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \big[x\big(\ln(x)\big)^{n+1}\big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (n+1)\frac{x}{x}\big(\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x && \text{intégration par parties} \\
&= \mathrm{e} - 0 - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} \big(\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - (n+1)u_n && \text{on reconnaît } u_n = \int_1^{\mathrm{e}} \big(\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - (n+1)a_n - (n+1)b_n\mathrm{e}. && \text{d'après } \mathcal{P}_n
\end{aligned}$$

  On pose alors $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ et $b_{n+1} = 1 - (n+1)b_n$.
  On constate que a_{n+1} et b_{n+1} sont des entiers et que $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\mathrm{e}$.
  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Par conséquent, il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres entiers telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = a_n + b_n\mathrm{e}.$$

Exercice 10

1) Comme $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < 1$, donc $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ a le signe de u_n.
Comme $u_0 > 0$, on obtient par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Étant décroissante et minorée par 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ positif.
Par unicité de la limite, on obtient $\ell = \ell - \ell^2$, d'où l'on déduit $\ell = 0$.

2) On a $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la série télescopique $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ est convergente.
Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ est convergente.

3) On a $u_{n+1}/u_n = 1 - u_n$. Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, on a $\ln(1 - u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n$.
Comme $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n$, on sait que l'absolue convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ équivaut à celle de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. Comme les termes généraux sont de signe constant, l'absolue convergence équivaut à la convergence.
Donc les séries $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont de même nature.

4) On a $\ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Comme la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (sa limite est $-\infty$), la série télescopique $\sum_{n\geqslant 0}\big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big)$ est divergente.
D'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est également divergente.

Exercice 11

1) Si $n = 0$, on a $f_0 : x \mapsto 1 - \cos(x)$. Sur $[0, 1]$, l'unique zéro de f est $a_0 = 0$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n' : x \mapsto nx^{n-1} + \sin(x)$. Comme $[0, 1] \subset [0, \pi]$, sin est positive sur $[0, 1]$. Donc f_n' est positive sur $[0, 1]$ et nulle en 0 uniquement. Par conséquent, f_n est une bijection strictement croissante de $[0, 1]$ sur son image $\big[f_n(0), f_n(1)\big] = [-1, 1 - \cos(1)]$.
Comme $1 - \cos(1) > 0$, $0 \in [-1, 1 - \cos(1)]$. Ainsi, f_n admet un unique zéro sur $[0, 1]$.

2) On va utiliser le signe de $f_n(a_{n+1})$ pour comparer a_{n+1} et a_n.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n+1}) &= a_{n+1}^n - \cos(a_{n+1}) \\ &\geqslant a_{n+1}^{n+1} - \cos(a_{n+1}) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

($t \in [0, 1] \Longrightarrow t^{n+1} \leqslant t^n$; $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$)

D'après les variations de f_n, $a_n \leqslant a_{n+1}$.
On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) Étant croissante et majorée par 1, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $\ell \leqslant 1$.

- Première méthode (par l'absurde)
On suppose que $\ell < 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on déduit de $0 \leqslant a_n \leqslant \ell$ que $0 \leqslant a_n^n \leqslant \ell^n$.
Comme $\ell \in]-1, 1[$, $\ell^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par conséquent, $a_n^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par encadrement.

Par ailleurs, $a_n^n = \cos(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(\ell)$, par continuité de cos.
Ainsi, on a $\cos(\ell) = 0$. Or, $\ell \in [0,1]$, donc $\cos(\ell) \neq 0$. C'est impossible.
On a montré par l'absurde que $\ell = 1$.

- Deuxième méthode (à l'aide de ln)

De $a_n^n = \cos(a_n)$, on obtient $n\ln(a_n) = \ln\big(\cos(a_n)\big)$, car les 2 membres sont strictement positifs.
On a $\ln\big(\cos(a_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\big(\cos(\ell)\big) \in \mathbb{R}$, car $\cos(\ell) > 0$.
Donc $\ln(a_n) = \ln\big(\cos(a_n)\big)/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par continuité de exp, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1$.

4) En reprenant la question précédente, on a $\ln(a_n) = \ln\big(\cos(a_n)\big)/n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\big(\cos(1)\big)/n$.
Or, $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)$, donc $\ln(a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} (a_n - 1)$.
Compte tenu de ces 2 résultats, on a :

$$(1-a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\ln(\cos(1))}{n}.$$

Exercice 12

1) En choisissant par exemple $x_n = n+2$ et $y_n = n$, on a $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$.
Mais $\mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{n+1} = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^n = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{y_n}$, ce qui n'est pas équivalent à e^{y_n}.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles , alors on a :

$$\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{y_n} \iff \mathrm{e}^{x_n}/\mathrm{e}^{y_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 1 \iff \mathrm{e}^{x_n - y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \iff \lim_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0.$$

2) Comme $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Donc $u_n \geqslant u_0 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs positives.

3) On raisonne par l'absurde. On suppose que la suite converge et on note ℓ sa limite.
Par unicité de la limite, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$, d'où l'on déduit $\ell = 0$. Or, $\ell \geqslant u_n \geqslant u_0 > 0$.
C'est impossible.
On a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

4) On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{-n-1}\ln(u_{n+1}) - 2^{-n}\ln(u_n) \\ &= 2^{-n-1}\ln(u_n^2 + u_n) - 2^{-n-1}\ln(u_n^2) \\ &= 2^{-n-1}\ln\left(\tfrac{u_n^2+u_n}{u_n^2}\right) \\ &= 2^{-n-1}\ln\left(1+\tfrac{1}{u_n}\right). \end{aligned}$$

$\ln(x^2) = 2\ln(x)$
$\ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a)$

On en déduit que $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 2^{-n-1}\ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$, car $u_n \geqslant u_0$.
La série géométrique de raison $1/2$ étant convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1}-v_n)$ est convergente par comparaison.
La convergence de la série télescopique assure la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) On a facilement $\ln(u_n) = 2^n v_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n \ell$.

On va utiliser $\ell - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$. Comme à la question précédente, on a pour $k \geqslant n$, $v_{k+1} - v_k = 2^{-k-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right) \leqslant 2^{-k-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$, car $u_k \geqslant u_n$.
En sommant toutes les inégalités, on obtient :

$$0 \leqslant \ell - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \leqslant 2^{-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}.$$

Or, $\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n} \frac{1}{1-2^{-1}} = 2^{-n} \cdot 2$. Compte tenu de tout cela :

$$0 \leqslant 2^n \ell - 2^n v_n \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente, elle tend vers $+\infty$. Par composition de limites, $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par conséquent, $2^n \ell - 2^n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par encadrement.
D'après la question 1), on a donc $e^{2^n v_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$ et finalement, $u_n = e^{2^n v_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

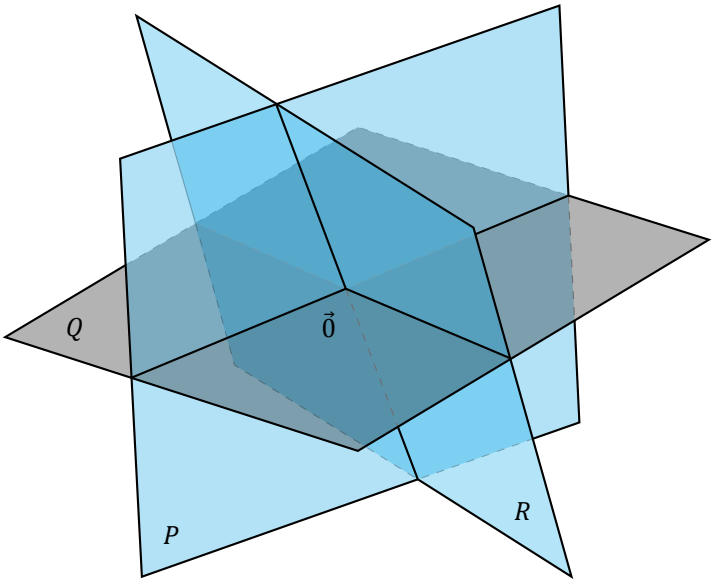
Oui, l'équation $P(x) = e^x$ peut admettre exactement $\deg(P)$ solutions. C'est le cas de l'équation $1 + x = e^x$, dont l'unique solution est 0. Et $1 + X$ est de degré 1.
En revanche, on va montrer qu'il n'existe pas de polynôme pour lequel $P(x) = e^x$ admet une infinité de solutions.
On suppose qu'il existe un polynôme P vérifiant « $P(x) = e^x$ pour une infinité de valeurs du réel x », propriété que l'on note $\mathcal{P}(P)$. Le polynôme nul n'étant pas solution, on note A l'ensemble suivant :

$$A = \{\deg(P), P \text{ tel que } \mathcal{P}(P) \text{ est vraie}\}.$$

Par hypothèse, A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément d_0.
Notons P_0 un polynôme de degré d_0 tel que $\mathcal{P}(P_0)$ est vraie.
Parmi l'infinité de zéros de la fonction $f : x \mapsto e^x - P(x)$, on choisit une suite strictement croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f est continue sur $[u_{n-1}, u_n]$, dérivable sur $]u_{n-1}, u_n[$ et $f(u_{n-1}) = f(u_n)$.
D'après le théorème de Rolle, il existe un $x_n \in]u_{n-1}, u_n[$ tel que $f'(x_n) = 0$.
On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante de zéros de f', car on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < u_n < x_{n+1}$.
Or, $f' : x \mapsto e^x - P'(x)$, donc on aurait un polynôme P' de degré strictement inférieur à d_0 et tel que $\mathcal{P}(P')$ est vraie. C'est impossible puisque $d_0 = \min(A)$.

On a montré que pour aucun polynôme l'équation $P(x) = e^x$ n'a une infinité de solutions.

Espaces vectoriels 2



Si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n - p$.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$*

On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On note $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et G l'ensemble des solutions de $\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ x + 2y - z + 2t = 0 \end{cases}$.

1) Déterminer une base ainsi que la dimension de F.
2) Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base et la dimension.

Exercice 2 *Sous-espace vectoriel de matrices*

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Calculer la dimension de E.
3) L'espace E est-il stable par produit ?

D'après Mines-Télécom

Exercice 3 *Noyau et image dans $\mathbb{R}^3$*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer son noyau et son image.

Exercice 4

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+2y, x-y, x+y)$.

1) Montrer que f est linéaire.
2) Sans calcul, examiner la surjectivité de f.
3) Déterminer une équation de $\text{Im}(f)$.
4) L'application f est-elle injective ?
5) Déterminer, sans les résoudre, le nombre de solutions des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

D'après Mines-Télécom

Exercice 5 *Projecteur dans $\mathbb{R}^3$*

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x - 2y + z = 0$ et u le vecteur de coordonnées $(1, 2, 1)$.

1) Écrire la matrice de la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite engendrée par u.
2) Soit $\mathcal{D}$ la droite affine définie par les équations $x + y + 2z = 1$ et $2x + y = 1$. Déterminer l'image de $\mathcal{D}$ par cette projection.

D'après Oral 2

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6 *Sous-espaces de fonctions*

On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0, \pi], \mathbb{R})$ et les sous-ensembles suivants :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\} \text{ et } G = \{f \in E \mid f \text{ est deux fois dérivable et } f'' + f = 0\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

D'après Mines-Télécom

Exercice 7 *Polynômes de Lagrange*

1) Soient x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts.

   Trouver les polynômes g tels que g soit de degré au plus 2, $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 0$ et $g(x_3) = 1$.
2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels distincts.
   Trouver les n polynômes $f_1, f_2, \dots, f_n$ de degré $n - 1$ et vérifiant pour tous i et $j \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x_j) = 0$, si $j \neq i$ et $f_i(x_i) = 1$.
3) Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4) Reconnaître le polynôme $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.
5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, exprimer P en fonction des polynômes $f_1, f_2, \dots, f_n$.

D'après Oral 2

Exercice 8 *Utilisation d'un polynôme annulateur*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$ tel que $u \circ u + u - 6\mathrm{Id}_E = 0$.

1) Montrer que u est un automorphisme. Exprimer u^{-1} en fonction de u et Id_E.
2) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$.
3) Dans cette question, on suppose en outre que $u \neq 2\mathrm{Id}_E$ et $u \neq -3\mathrm{Id}_E$.
   On note $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{2023})$. Déterminer la dimension de F.

D'après Oral 1

Exercice 9 *Classique, important*

Soit la matrice carrée d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

1) Préciser $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$,puis $f^2(e_1), f^2(e_2), \dots, f^2(e_n)$ et en déduire la matrice A^2.
2) Calculer de même A^{n-1} et A^n.
3) Réciproquement, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et φ un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de ϕ est A.

Exercice 10 *Un grand classique*

Soient E un espace de dimension d et u un endomorphisme de E.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ u) \subset \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u \circ u)$.
   Plus généralement, montrer que $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(u^n)$ et $\mathrm{Ker}(u^n) \subset \mathrm{Ker}(u^{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{Im}(u^{n+1}) = \mathrm{Im}(u^n)$.
   Dans la suite, n désigne cet entier naturel.
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^{n+1}) = \mathrm{Ker}(u^n)$.
   c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

D'après Oral 1 et 2

Exercice 11 *Hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$*

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère F l'ensemble des polynômes P de E tels que $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $G = \mathrm{Vect}(1 + X + X^2)$.

1) Justifier que F est un hyperplan de E.
2) Montrer que $E = F \oplus G$.
3) Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G.
   Pour Q dans E, déterminer $p(Q)$ en fonction de $\int_0^1 Q(t)dt$ et de Q.

D'après Oral 2

Exercice 12 *Projecteurs*

Soient p et q deux projecteurs de E.

1) Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) $p \circ q = q \circ p = 0$ (l'endomorphisme nul),
   (ii) $p + q$ est un projecteur.
2) Lorsque $p + q$ est un projecteur, montrer que :

$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 13

On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_3 + bJ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Calculer J^2 et J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice J est-elle inversible ?
2) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base et sa dimension. L'ensemble E est-il stable par produit ?
3) Trouver les matrices de E qui admettent un inverse dans E et préciser celui-ci.
4) Résoudre $X^2 = X$ dans E.

D'après Oral 2

Exercice 14 ⋆⋆ *Formes linéaires*

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et a, b, c trois réels distincts. On considère les fonctions définies pour $P \in E$ par $\phi_a(P) = P(a)$, $\phi_b(P) = P(b)$, $\phi_c(P) = P(c)$ et $\psi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.
On ne demande pas de vérifier que ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c et ψ sont linéaires.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}(\phi_a) \cap \mathrm{Ker}(\phi_b) \cap \mathrm{Ker}(\phi_c)$.
2) Montrer que (ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c) est une famille libre de $L(E, \mathbb{R})$.
3) On suppose que $a = -1$ et $b = 1$. Déterminer c pour que $(\phi_{-1}, \phi_1, \phi_c, \psi)$ soit une famille liée et écrire alors ψ en fonction de ϕ_{-1}, ϕ_1 et ϕ_c.

D'après Oral 2

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15 ⋆⋆ *Image et noyau égaux*

1) a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Que peut-on dire concernant l'image et le noyau de u ?
   b) Étudier la réciproque de la question précédente.
2) Généraliser la question précédente aux endomorphismes de $\mathbb{R}^{2p}$.

D'après Oral 2

Exercice 16 ⋆⋆ *Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soient $n \geqslant 2$ et F un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que F est stable par multiplication.
On souhaite montrer que $I_n \in F$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que $I_n \notin F$.

1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2) Soit p le projecteur sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à F.
   Montrer que, pour toutes matrices M et M', on a $p(MM') = p(M)p(M')$.
3) Montrer que F ne contient pas de matrices inversibles.
4) Montrer que F contient toutes les matrices nilpotentes.
5) Conclure.
   Indication : On pourra commencer par le cas $n = 2$, puis généraliser.

D'après Oral 2

Exercice 17 ⋆ *Matrices inversibles et polynôme annulateur*

Montrer que pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'équivalence :

$$M \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \exists P \in \mathbb{R}[X], P(0) \neq 0 \text{ et } P(M) = 0.$$

On rappelle que si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $P(M)$ est la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k M^k = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_d M^d$.

D'après Oral 1

Exercice 18 *Automorphisme d'un espace de polynômes*

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et Q un polynôme réel de degré $d \leqslant n$.
Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f_Q(P) = (QP)^{(n)}$.

1) Montrer que f_Q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.

D'après Oral 1

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Par définition, (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de F, donc $\dim(F) \leqslant 3$.
   En outre, e_2 n'est pas colinéaire à e_1, donc (e_1, e_2) est libre et $\dim(F) \geqslant 2$.
   Il reste à savoir si e_3 est, ou non, combinaison linéaire de e_1 et e_2. Pour a et b réels, on a :

$$ae_1 + be_2 = e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ -a + b = -3 \\ 2a + b = 0 \\ a + 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 0 = 0 \\ 3b = -6 \\ 4b = -8 \end{cases}$$

Le système ayant une solution, à savoir $(a, b) = (1, -2)$, le vecteur e_3 est combinaison linéaire de e_1 et e_2.

Par conséquent, (e_1, e_2) est une base de F, qui est de dimension 2.

Remarque

On aurait également pu étudier la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3), c'est-à-dire étudier l'existence de triplets (a, b, c) tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$.

2) L'ensemble G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Remarque

On aurait également pu dire que G est l'intersection de 2 hyperplans de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ x + 2y - z + 2t = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ 3y - 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - \frac{4}{3}t \\ y = z - \frac{1}{3}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}t\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Cette résolution montre que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment une base de G, par conséquent G est de dimension 2.

Exercice 2

1) Le plus rapide est de remarquer qu'en séparant les paramètres, on a :

$$\begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela montre que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I_3, B, C), où on a posé :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étant un sous-espace vectoriel, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (muni des lois induites).

2) La famille (I_3, B, C) étant une famille génératrice de E, on va étudier sa liberté.
Soient a, b et c des réels tels que $aI_3 + bB + cC = 0$.
On a alors $\begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} = 0$, d'où l'on déduit facilement $b = 0$, $c = 0$, puis $a = 0$.
Cela prouve que (I_3, B, C) est une famille libre.
La famille (I_3, B, C) étant libre et génératrice de E, c'est une base de E qui est donc de dimension 3.

3) Calculons, par exemple, $B \times B$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour étudier l'appartenance de B^2 à E, on étudie le système suivant :

$$aI_n + bB + cC = C^2 \iff \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La deuxième ligne donne à la fois $b = 0$ et $b = 1$, donc le système n'a pas de solution.
Par conséquent, $B^2 \notin E$ et E n'est pas stable pour le produit.

Exercice 3

- Noyau de f

Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $MX = 0$.

$$MX = 0 \iff \begin{cases} 3x + 6z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ 3y + 3z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Donc le noyau de f est la droite dirigée par le vecteur $(-2, -1, 1)$.

- Image de f

D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Le noyau étant de dimension 1, le rang de f est donc 2. Par conséquent, $\mathrm{Im}(f)$ est un plan. Les colonnes C_1 et C_2 de M n'étant pas colinéaires, la famille (C_1, C_2) est une base de ce plan.

Exercice 4

Conformément à l'usage, on écrira les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en colonnes, ainsi $f(x, y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$.

1) La linéarité de f provient de celle des 3 applications $(x, y) \mapsto x + 2y$, $(x, y) \mapsto x - y$ et $(x, y) \mapsto x + y$. On peut détailler la démonstration comme ci-dessous.

Soient (x,y) et (x',y') deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, α et α' deux réels.
Par définition, on a $\alpha(x,y)+\alpha'(x',y')=(\alpha x+\alpha' x',\alpha y+\alpha' y')$ donc :

$$\begin{aligned}
f(\alpha u+\alpha' u') &= f\big(\alpha(x,y)+\alpha'(x',y')\big)\\
&= f(\alpha x+\alpha' x',\alpha y+\alpha' y')\\
&= \begin{pmatrix} \alpha x+\alpha' x'+2(\alpha y+\alpha' y') \\ \alpha x+\alpha' x'-\alpha y-\alpha' y' \\ \alpha x+\alpha' x'+\alpha y+\alpha' y' \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \alpha(x+2y)+\alpha'(x'+2y') \\ \alpha(x-y)+\alpha'(x'-y') \\ \alpha(x+y)+\alpha'(x'+y') \end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}+\alpha'\begin{pmatrix} x'+2y' \\ x'-y' \\ x'+y' \end{pmatrix}\\
&= \alpha f(x,y)+\alpha' f(x',y').
\end{aligned}$$

2) Puisque $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ et $\dim\mathbb{R}^2=2$, on a $\operatorname{rg}(2)\leqslant 2$ d'après le théorème du rang.
La dimension de l'image de f étant au plus 2, f n'est pas surjective.

3) Soit $u=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Par définition, $u\in\operatorname{Im}(f)$ si, et seulement si, il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y)=(a,b,c)$. On étudie alors le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y=a \\ x-y=b \\ x+y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c-2c-2b=2a \\ x=(b+c)/2 \\ y=(-b+c)/2 \end{cases}.$$

Le système a une solution en (x,y) si, et seulement si, $2a+b-3c=0$.

4) D'après le théorème du rang, $\dim\operatorname{Ker}(f)+\dim\operatorname{Im}(f)=\dim\mathbb{R}^2=2$. D'après la question précédente, le rang de f est 2. Donc $\dim\operatorname{Ker}(f)=0$, ce qui prouve que f est injective.

Remarque
On peut aussi montrer directement que $f(x,y)=0$ si, et seulement si, $(x,y)=(0,0)$.

5) a) Le vecteur $u=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ appartient à $u\in\operatorname{Im}(f)$, car $2\cdot 4+1-3\cdot 3=0$.
Par conséquent, le système $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$ a une solution.
Comme f est injective, cette solution est unique.
Explicitement, on trouve $(x,y)=(2,1)$.

b) Pour le vecteur $v=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$, on a $2\cdot 4+3-3\cdot 1=8\neq 0$. Donc $v\notin\operatorname{Im}(f)$.

CORRECTIONS

Par conséquent, le système $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Exercice 5

On note classiquement (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) • Image du vecteur i

Le projeté de i est le vecteur $u \in \mathcal{P}$ tel que $i - u$ soit colinéaire à u. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$i - \alpha u \in \mathcal{P} \iff \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff 1 - \alpha - 2(-2\alpha) + (-\alpha) = 0 \iff \alpha = -1/2.$$

Le projeté de i est le vecteur $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

• Image du vecteur j

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a de même :

$$j - \alpha u \in \mathcal{P} \iff \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1-2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff -\alpha - 2(1-2\alpha) + (-\alpha) = 0 \iff \alpha = 1.$$

Le projeté de j est le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Image du vecteur k

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a de même :

$$k - \alpha u \in \mathcal{P} \iff \begin{pmatrix} -\alpha \\ -2\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff -\alpha - 2(-2\alpha) + (1-\alpha) = 0 \iff \alpha = -1/2.$$

Le projeté de k est le vecteur $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice M de cette projection dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

2) On a facilement : $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 1 - 2x \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\mathcal{D}$ passe par le point $A(0,1,0)$ et est dirigée par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme le plan $\mathcal{P}$ contient l'origine O, O est invariant et l'image A' du point A s'obtient à l'aide de l'image du vecteur $\overrightarrow{OA} = j$. Par conséquent, le point A' a pour coordonnées $(-1,-1,-1)$.

On peut calculer l'image v' du vecteur v à l'aide de la matrice M :

$$v' = Mv \iff v' = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 7 \\ 13/2 \end{pmatrix}.$$

L'image de $\mathcal{D}$ par cette projection est la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A'(-1,-1,-1)$ et dirigée par $2v' = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Remarque

Puisque le plan $\mathcal{P}$ passe par l'origine, on peut utiliser la matrice directement sur la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$. On a ainsi :

$$M \begin{pmatrix} 2t \\ 1-4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+15t/2 \\ -1+14t/2 \\ -1+13t/2 \end{pmatrix},$$

ce qui est la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$.

CORRECTIONS

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6

- *F est un sous-espace de E*

Par définition, F est une partie de E. Et F contient la fonction nulle.

Soient f et $g \in E$, α et β deux réels. On note h la fonction $\alpha f + \beta g$. On a :

$$\begin{aligned} h(0) &= \alpha f(0) + \beta g(0) \\ &= \alpha f(\pi/2) + \beta g(\pi/2) \\ &= h(\pi/2). \end{aligned}$$

($f \in E, g \in E$; $h = \alpha f + \beta g$)

On vérifie de même $h(\pi/2) = h(\pi)$. Cela montre que $h \in F$.

On a montré que F est stable par combinaison linéaire.

Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de E.

- *G est un sous-espace de E*

On peut montrer de la même façon que G est un sous-espace vectoriel de E, mais il est plus rapide d'indiquer que l'on sait que $G = \text{Vect}(\cos, \sin)$, donc que G est en particulier un sous-espace vectoriel de E.

- La somme $F + G$ est directe

  Soit $f \in F \cap G$. Comme $f \in G$, il existe a et b réels tels que $f = a\cos + b\sin$. On a alors $f(0) = a$, $f(\pi/2) = b$ et $f(\pi) = -a$. Puisque $f \in E$, on a $f(0) = f(\pi)$, donc $a = 0$. Puis, $f(0) = f(\pi/2)$ entraîne $b = 0$. D'où $f = 0$.

  On a montré que $F \cap G \subset \{0\}$, donc que la somme $F + G$ est directe.

- F et G sont supplémentaires

  Comme $F + G \subset E$, il reste à montrer l'inclusion réciproque.

  Soit $f \in E$.

  ⋆ Analyse

  On suppose qu'il existe a et b réels et $g \in F$ tels que $f = g + a\cos + b\sin$.

  En évaluant en 0, $\pi/2$ et π, on a $\begin{cases} f(0) &= g(0) + a \\ f(\pi/2) &= g(0) + b \\ f(\pi) &= g(0) - a \end{cases}$.

  Donc $a = \frac{f(0)-f(\pi)}{2}$ et $b - a = f(0) - f(\pi/2)$. D'où $b = -\frac{1}{2}f(0) + f(\pi/2) - \frac{1}{2}f(\pi)$.

  ⋆ Synthèse

  On pose $a = \frac{f(0)-f(\pi)}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}f(0) + f(\pi/2) - \frac{1}{2}f(\pi)$, puis $g = f - a\cos - b\sin$.

  On a $g \in E$, car c'est une combinaison linéaire d'éléments de E.

  On calcule $g(0) = f(0) - a = \frac{f(0)+f(\pi)}{2}$, $g(\pi/2) = f(\pi/2) - b = \frac{f(0)+f(\pi)}{2}$ et enfin $g(\pi) = f(\pi) + a = \frac{f(0)+f(\pi)}{2}$. Donc $g \in G$.

  La fonction $h = a\cos + b\sin$ appartient à F et $f = h + g$.

  On a montré ainsi $E \subset F + G$.

Finalement, on a prouvé $F \oplus G = E$.

Remarque

On peut se dispenser de prouver $F \cap G \subset \{0\}$, car l'analyse de la décomposition $f = h + g$ prouve son unicité.

Exercice 7 *Polynômes de Lagrange*

1) Si g est de degré au plus 2 et admet x_1 et x_2 comme racines (distinctes), alors il existe un réel a tel que $g = a(X - x_1)(X - x_2)$. La condition supplémentaire $g(x_3) = 1$ impose $a = \frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$. Ce a existe bien, car $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \neq 0$.

   Il existe un unique polynôme g tel que g soit de degré 2 au plus et $g(x_1) = g(x_2) = 0$ et $g(x_3) = 1$. Ce polynôme est $\frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}(X - x_1)(X - x_2)$.

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme précédemment, f_i étant de degré $n - 1$ et admettant $n - 1$ racines distinctes (les x_j pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$), il existe un réel a tel que $f_i = a \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - x_j)$.

   Puis $f_i(x_i) = 1$ impose $a = 1/\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$.

   Comme les réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts, on a bien $x_i - x_j \neq 0$ quand $j \neq i$.

En conclusion :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad f_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X - x_j).$$

3) La famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille de n polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels tels que $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n = 0$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. En évaluant le polynôme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j f_j$ en x_i, on obtient une somme dont tous les termes sont nuls, sauf celui correspondant à $j = i$ où $f_i(x_i) = 1$. On obtient alors $a_i = 0$.

Cela montre que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre.

Étant libre et maximale, la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4) De même, en évaluant le polynôme $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ en x_i, on obtient $f(x_i) = 1$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Le polynôme $f - 1$ est de degré $n-1$ et admet n racines distinctes, donc c'est le polynôme nul.

Cela prouve que $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ est le polynôme constant égal à 1.

5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait qu'il existe $a_1, a_2, \dots, a_n$ réels tels que $P = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n$, car $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En évaluant le polynôme en x_i, on obtient $P(x_i) = a_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

En conclusion :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad P = P(x_1) f_1 + P(x_2) f_2 + \cdots + P(x_n) f_n.$$

Exercice 8

Avertissement : On peut être tenté d'utiliser les outils du cours sur la réduction des endomorphismes, mais l'espace E n'étant pas de dimension finie, il faut faire les démonstrations sans utiliser ces outils.

1) De $u^2 + u - 6\mathrm{Id}_E = 0$, on déduit $\frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}u = \mathrm{Id}_E$ puis :

$$u \circ \left(\frac{1}{6}u + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{6}u + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E\right) \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Cela prouve que u est un automorphisme et que $u^{-1} = \frac{1}{6}u + \frac{1}{6}\mathrm{Id}_E$.

2) • La somme $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$ est directe

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)$. Comme $x \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$, $(u - 2\mathrm{Id}_E)(x) = 0$, donc $u(x) = 2x$.

De même, $x \in \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$ entraîne $u(x) = -3x$. D'où $2x = -3x$, puis $x = 0$.

On a montré que $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E) \subset \{0\}$, c'est-à-dire que la somme $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$ est directe.

- $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires

  Comme $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E) \subset E$, il reste à montrer l'inclusion réciproque.
  Soit $x \in E$.
  - Analyse

    On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$.
    Par linéarité de u, on obtient $u(x) = u(y) + u(z) = 2y - 3z$.
    On en déduit $z = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}u(x)$ et $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}u(x)$.
  - Synthèse

    On pose $z = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}u(x)$ et $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}u(x)$. On a alors $y + z = x$.

    Par linéarité de u, on a $u(z) = \frac{2}{5}u(x) - \frac{1}{5}u^2(x)$. Comme $u^2 = 6\mathrm{Id}_E - u$, on obtient $u(z) = \frac{3}{5}u(x) - \frac{6}{5}x = -3z$. Donc $z \in \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$.

    De même, $u(y) = \frac{3}{5}u(x) + \frac{1}{5}u^2(x) = \frac{2}{5}u(x) + \frac{6}{5}x = 2y$, d'où $y \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

    Ainsi, on a $y \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$, $z \in \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$ et $x = y + z$.

  On a montré ainsi $E \subset \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$.

Finalement, on a prouvé $E = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$.

3) On va montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u)$ et que la famille (Id_E, u) est libre.

- La famille (Id_E, u) est libre

  On raisonne par l'absurde. On suppose que la famille (Id_E, u) est liée. Comme $\mathrm{Id}_E \neq 0$, il existe un scalaire α tel que $u = \alpha\mathrm{Id}_E$. On a alors $u^2 = \alpha^2\mathrm{Id}_E$ et $u^2 + u - 6\mathrm{Id}_E = 0$ devient $(\alpha^2 + \alpha - 6)\mathrm{Id}_E = 0$. On aurait alors $\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$, ce qui est exclu par l'énoncé.

  Donc la famille (Id_E, u) est libre.
- La famille (Id_E, u) est génératrice de F

  On montre par récurrence que toute puissance de u est combinaison linéaire de Id_E et de u.
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u^n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u)$ ».
  - Initialisation

    Comme $u^0 = \mathrm{Id}_E$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  - Hérédité

    Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
    Il existe deux réels a_n et b_n tels que $u^n = a_n\mathrm{Id}_E + b_n u$. On a alors :

    $$\begin{aligned} u^{n+1} &= u \circ u^n \\ &= u \circ (a_n\mathrm{Id}_E + b_n u) && \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= a_n u + b_n u^2 && \text{par distributivité de } \circ \text{ sur } + \\ &= (a_n - b_n)u + 6b_n\mathrm{Id}_E. && u^2 = -u + 6\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

    On constate que u^{n+1} est bien une combinaison linéaire de Id_E et u.

    Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

  Par conséquent, $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{2023}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u)$.

Comme la réciproque est évidente, $F = \text{Vect}(\text{Id}_E, u)$.

Par conséquent, F est de dimension 2, car (Id_E, u) est une base de F.

Exercice 9

1) La lecture de la matrice A donne $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, \dots, f(e_n) = e_{n-1}$.
Donc $f^2(e_1) = 0, \quad f^2(e_2) = f(e_1) = 0, \quad \dots, \quad f^2(e_n) = f(e_{n-1}) = e_{n-2}$ et donc :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2) On pourrait démontrer (par récurrence) que l'on obtiendra plus généralement :

$$f^k(e_j) = e_{j-k} \text{ si } j - k \geqslant 1 \quad \text{et} \quad f^k(e_j) = 0 \text{ sinon.}$$

En particulier, $f^{n-1}(e_1) = 0, \quad \dots, \quad f^{n-1}(e_{n-1}) = 0, \quad f^{n-1}(e_n) = e_1$ donc :

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour f^n, tous les vecteurs de cette base ont une image nulle : $A^n = 0$.
On a montré que A est nilpotente d'indice n.

3) L'endomorphisme ϕ^{n-1} n'étant pas nul, il existe un x tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0_E$.
On choisit e_n l'un de ces vecteurs. On a donc $\varphi^{n-1}(e_n) \neq 0_E$.
Puis, on pose :

$$e_{n-1} = \phi(e_n), \quad e_{n-2} = \phi(e_{n-1}), \quad \dots, \quad e_1 = \phi(e_2).$$

Remarquons qu'on a aussi :

$$e_{n-1} = \phi(e_n), \quad e_{n-2} = \phi^2(e_n), \quad \dots, \quad e_1 = \phi^{n-1}(e_n).$$

On montre que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E :

- elle possède n éléments et E est de dimension n ;
- on démontre qu'elle est libre :

  Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_E$.
  En prenant l'image par ϕ, on aura par linéarité $0_E + \alpha_2 e_1 + \cdots + \alpha_n e_{n-1} = 0_E$, car $\phi(e_1) = \phi^n(e_n) = 0_E$.

Puis, $\alpha_3 e_1 + \cdots + \alpha_n e_{n-2} = 0_E$ etc. jusqu'à $\alpha_{n-1} e_1 + \alpha_n e_2 = 0_E$ et enfin $\alpha_n e_1 = 0_E$.
Comme $e_1 = \phi^{n-1}(e_n) \neq 0_E$, on en déduit $\alpha_n = 0$.
Ensuite, en remontant, on a successivement $\alpha_{n-1} = 0, \dots, \alpha_1 = 0$.
Tous les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont nuls. On a montré que la famille est libre.

Donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E. Et dans cette base, la matrice de ϕ est A car :

$$\phi(e_1) = 0, \quad \phi(e_2) = e_1, \quad \dots, \quad \phi(e_n) = e_{n-1}.$$

Exercice 10

1) • $\mathrm{Im}(u \circ u) \subset \mathrm{Im}(u)$
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$. Donc $y = u\big(u(x)\big)$. En particulier, $y \in \mathrm{Im}(u)$.

• $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u \circ u)$
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a $u(x) = 0_E$. Donc $u^2(x) = u(0_E) = 0_E$, car u est linéaire. D'où $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$.

• Cas général pour $n \in \mathbb{N}$
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{n+1})$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^{n+1}(x)$. Donc $y = u^n\big(u(x)\big)$. En particulier, $y \in \mathrm{Im}(u^n)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^n)$. On a $u^{n+1}(x) = u\big(u^n(x)\big) = u(0_E) = 0_E$, car u est linéaire. Donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{n+1})$.
On a ainsi montré $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(u^n)$ et $\mathrm{Ker}(u^n) \subset \mathrm{Ker}(u^{n+1})$.

2) a) Notons $A = \big\{k \in \mathbb{N} \,\big|\, \mathrm{Im}(u^{k+1}) = \mathrm{Im}(u^k)\big\}$.
On montre que A est non vide en raisonnant par l'absurde.
On suppose que $A = \emptyset$. On a alors $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \neq \mathrm{Im}(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc l'inclusion $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$ est stricte. Donc $\dim \mathrm{Im}(u^{k+1}) < \dim \mathrm{Im}(u^k)$.
Comme la dimension d'un sous-espace est un nombre entier naturel, l'inégalité stricte précédente donne $\dim \mathrm{Im}(u^{k+1}) \leqslant \dim \mathrm{Im}(u^k) - 1$.
On déduit que $\dim \mathrm{Im}(u^k) \leqslant \dim \mathrm{Im}(u^0) - k$. Comme $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E) = E$, on a $\dim \mathrm{Im}(u^k) \leqslant d - k$. Pour $k = d + 1$, on obtient $\dim \mathrm{Im}(u^{d+1}) \leqslant -1$, ce qui est impossible.
On a montré que $A \neq \emptyset$.
Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément que l'on note n.

b) Compte tenu de $\mathrm{Ker}(u^n) \subset \mathrm{Ker}(u^{n+1})$, il suffit de montrer que ces sous-espaces ont la même dimension.
D'après le théorème du rang appliqué à u^{n+1}, on a :

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(u^{n+1}) &= \dim E - \dim \mathrm{Im}(u^{n+1}) \\ &= \dim E - \dim \mathrm{Im}(u^n) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(u^n). \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(u^{n+1}) = \mathrm{Im}(u^n)$
théorème du rang

De ces deux résultats, on déduit $\mathrm{Ker}(u^{n+1}) = \mathrm{Ker}(u^n)$.

c) Comme $\dim \mathrm{Ker}(u^n) + \dim \mathrm{Im}(u^n) = \dim E$, il suffit de montrer que la somme est directe.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^n) \cap \mathrm{Im}(u^n)$. On a $u^n(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^n(y)$. On a alors $u^{2n}(y) = u^n\big(u^n(y)\big) = 0_E$.
Donc $u^{n-1}(y) \in \mathrm{Ker}(u^{n+1})$, car $u^{n+1}\big(u^{n-1}(y)\big) = 0_E$. Comme $\mathrm{Ker}(u^{n+1}) = \mathrm{Ker}(u^n)$, on a $u^{n-1}(y) \in \mathrm{Ker}(u^n)$. Par conséquent, $u^{n-1}(y) \in \mathrm{Ker}(u^n)$.
On montre de même $u^{n-2}(y) \in \mathrm{Ker}(u^n)$.
De proche en proche, on arrive à $u^0(y) \in \mathrm{Ker}(u^n)$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{Ker}(u^n)$.
Comme $x = u^n(y)$, on a $x = 0_E$.
Donc la somme des sous-espaces $\mathrm{Ker}(u^n)$ et $\mathrm{Im}(u^n)$ est directe.
Finalment, $E = \mathrm{Ker}(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

Exercice 11

1) L'application $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ est linéaire. Donc F est un sous-espace de E, car F est le noyau de φ.
D'après le théorème du rang, $\dim F = \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \mathrm{rg}(\varphi) = 3 - \mathrm{rg}(\varphi)$.
Or, l'image de φ est un sous-espace de $\mathbb{R}$, non réduit à 0, car il contient $1 = \varphi(1)$ par exemple.
On en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$, puis $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ et $\dim F = 2$.
Par conséquent, F est un hyperplan de E.

Remarque
On pouvait aussi calculer $\varphi(P)$ pour $P = aX^2 + bX + c$, ce qui donne $\varphi(P) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c$.
Ainsi, F est l'hyperplan d'équation $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0$ dans la base canonique.

2) Comme $\dim E = 3 = 2 + 1 = \dim F + \dim G$, il suffit de montrer que la somme est directe.

Soit $P \in F \cap G$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha(1 + X + X^2)$. On a alors :

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^1 (t^2 + t + 1)\,\mathrm{d}t = \alpha\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = \alpha\frac{11}{6}.$$

Or $P \in F$, donc $\varphi(P) = 0$. On en déduit $\alpha = 0$, puis $P = 0_E$.
Ainsi, la somme $F + G$ est directe et compte tenu des dimensions, $E = F \oplus G$.

3) Soit $Q \in E$. Notons $P = p(Q)$. Par définition, $P \in F$ et $P - Q \in G$. Il existe donc un réel α tel que $P = Q + \alpha(1 + X + X^2)$. On a alors par linéarité :

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t + \alpha \int_0^1 (t^2 + t + 1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\frac{11}{6}.$$

Comme $P \in F$, son intégrale est nulle, d'où $\alpha = -\frac{6}{11}\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Le projeté de Q sur F, parallèlement à G, est donc $Q - \frac{6}{11}\left(\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t\right)(X^2 + X + 1)$.

CORRECTIONS

Exercice 12

Puisque p et q sont des projecteurs, on a $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

1) Puisque p et q sont des endomorphismes de E, $p + q$ en est aussi un.

($\Rightarrow$) On suppose que (i) est vraie, c'est-à-dire $p \circ q = q \circ p = 0$. On a alors :

$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \circ q = p + q.$$

L'endomorphisme $p + q$ est donc un projecteur de E.

($\Leftarrow$) On suppose que (ii) est vraie, c'est-à-dire que $(p + q)^2 = p + q$.
Par ailleurs, on a $(p + q)^2 = (p + q) \circ (p + q) = p^2 + q^2 + p \circ q + q \circ p$.
On déduit de ces deux égalités $p \circ q = -q \circ p$.
En composant par p à gauche, on a $p \circ q = -p \circ q \circ p$, car $p^2 = p$.
En composant maintenant par p à droite, on a $p \circ q \circ p = -p \circ q \circ p$, d'où $p \circ q \circ p = 0$.
Finalement, $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.

2) • $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

($\supset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. On a $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(p + q)$.

($\subset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p + q)$. On a $(p + q)(x) = 0$, donc $p(x) = -q(x)$.
En prenant l'image par p, on obtient $p(x) = 0$, car $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$.
Donc $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

• $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$

($\subset$) L'inclusion $\mathrm{Im}(p + q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ est une généralité, car pour tout $x \in E$, $(p + q)(x) = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

($\supset$) Soit $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Il existe $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $x = p(x_1) + q(x_2)$.
En prenant l'image par p, on obtient $p(x) = p(x_1) + 0$, car $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$.
De même, en prenant l'image par q, on obtient $q(x) = q(x_2)$.
Donc $x = p(x) + q(x) = (p + q)(x)$, d'où $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 13

1) Le calcul matriciel donne $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J.$

On en déduit que $J^n = J$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
La matrice J n'est pas inversible, car sinon, $J^2 = J$ entraînerait $J = I_3$, ce qui est faux.

2) Comme $E = \text{Vect}(I_3, J)$, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, car c'est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
En outre, comme J n'est pas colinéaire à I_3, (I_3, J) est une base de E, car c'est une famille libre et génératrice de E.
Par conséquent, la dimension de E est 2.
Soient M et $M' \in E$. Il existe des réels a, b, a' et b' tels que $M = aI_3 + bJ$ et $M' = a'I_3 + b'J$.
On a alors :

$$\begin{aligned} MM' &= (aI_3 + bJ)(a'I_3 + b'J) \\ &= aa'I_3^2 + ab'I_3J + ba'JI_3 + bb'J^2 \\ &= aa'I_3 + (ab' + ba' + bb')J. \end{aligned}$$

par distributivité de la multiplication
$I_3^2 = I_3$, $I_3J = JI_3 = J$ et $J^2 = J$

Cela montre que $MM' \in E$.
Par conséquent, E est stable par produit.

3) Soit $M = aI_3 + bJ \in E$.
- Conditions nécessaires
  Si M admet un inverse dans E, il existe a' et $b' \in \mathbb{R}$ tels que $M(a'I_3 + b'J) = I_3$.
  La famille (I_3, J) étant libre, le calcul précédent entraîne $aa' = 1$ et $(a + b)b' = -ba'$.
  Donc $a \neq 0$. On a aussi $a + b \neq 0$, car sinon, $ba' = 0$ entraînerait $b = 0$, puis $a = 0$.
- Conditions suffisantes
  Si $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$, on pose $a' = 1/a$, $b' = -ba'/(a + b)$ et $M' = a'I_3 + b'J$.
  On a alors $MM' = I_3$, donc M est inversible et son inverse M' appartient à E.
  Explicitement, on a dans ce cas $M^{-1} = \frac{1}{a}I_3 - \frac{b}{a(a+b)}J$.

4) De même, en posant $X = aI_3 + bJ$, on a :

$$X^2 = X \iff a^2I_3 + (2ab + b^2)J = aI_3 + bJ \iff (a^2 = a \text{ et } 2ab + b^2 = b).$$

- Cas $a = 0$
  La deuxième condition devient $b^2 = b$. Il y a deux solutions 0 et 1.
- Cas $a = 1$
  La deuxième condition devient $b^2 = -b$. Il y a deux solutions 0 et -1.

L'équation $X^2 = X$ admet 4 solutions dans E, qui sont $0, J, I_3$ et $I_3 - J$.

Exercice 14

1) Pour $P \in E$, on a $P \in \text{Ker}(\phi_a) \iff P(a) = 0 \iff (X - a)$ divise P.
Comme a, b et c sont distincts, on a :

$$P \in \text{Ker}(\phi_a) \cap \text{Ker}(\phi_b) \cap \text{Ker}(\phi_c) \iff (X - a)(X - b)(X - c) \text{ divise } P.$$

Or, si $P \in E$, alors $\deg(P) \leqslant 3$. On en déduit que $\text{Ker}(\phi_a) \cap \text{Ker}(\phi_b) \cap \text{Ker}(\phi_c)$ est la droite vectorielle dirigée par $(X - a)(X - b)(X - c)$.

2) Soient α, β et γ tels que $\alpha\phi_a + \beta\phi_b + \gamma\phi_c = 0$. On a alors pour tout $P \in E$:

$$\alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c) = 0 \qquad (\star)$$

CORRECTIONS

- Première méthode (utilisation de polynômes bien choisis)
  En utilisant $(\star)$ pour le polynôme $(X-b)(X-c)$, on obtient $\alpha(a-b)(a-c)=0$, puis $\alpha=0$, car $(a-b)(a-c)\neq 0$.
  De même, on montre que $\beta=0$ et $\gamma=0$, en utilisant $(X-a)(X-c)$ et $(X-a)(X-b)$.
- Deuxième méthode (utilisation de polynômes de la base canonique)
  En utilisant $(\star)$ pour les polynômes 1, X et X^2, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0 \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est très classique (matrice de Vandermonde). On peut par exemple calculer son déterminant :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &\underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \text{développement selon } L_1 \\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \quad x^2-a^2=(x-a)(x+a) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \quad c+a-(b+a)=c-b \end{aligned}$$

Ce déterminant étant non nul, le sytème a pour unique solution $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$.

On a montré que (ϕ_a,ϕ_b,ϕ_c) est une famille libre de $L(E,\mathbb{R})$.

3) La famille $(\phi_{-1},\phi_1,\phi_c)$ étant libre, $(\phi_{-1},\phi_1,\phi_c,\psi)$ est une famille liée si, et seulement si, ψ est combinaison linéaire de ϕ_{-1}, ϕ_1 et ϕ_c .
On étudie pour cela $\alpha\phi_{-1}+\beta\phi_1+\gamma\phi_c=\psi$, soit pour tout $P\in E$:

$$\alpha P(-1)+\beta P(1)+\gamma P(c)=\int_{-1}^{1}P(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\star\star)$$

En utilisant les 4 polynômes de la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$, on obtient le système de 4 équations et 3 inconnues :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta + c\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + c^2\gamma = 2/3 \\ -\alpha + \beta + c^3\gamma = 0 \end{cases}$$

car $\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}t=2$, $\int_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t=0$, $\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t=2/3$ et $\int_{-1}^{1}t^3\,\mathrm{d}t=0$.
En formant L_4-L_2, on obtient $\gamma(c^3-c)=0$.
Et en formant L_3-L_1, on obtient $\gamma(c^2-1)=2/3-2=-4/3\neq 0$.

Cela prouve que la condition $c = 0$ est nécessaire pour que la famille soit liée.
Réciproquement, si $c = 0$, on résout facilement le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 2/3 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1/3 \\ \beta = 1/3 \\ \gamma = 4/3 \end{cases}$$

Avec ces valeurs, $(\star\star)$ est vraie pour les polynômes de la base $(1, X, X^2, X^3)$. Par linéarité, cela prouve :

$$\frac{1}{3}\phi_{-1} + \frac{1}{3}\phi_1 + \frac{4}{3}\phi_0 = \psi.$$

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15

1) a) En notant $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ si u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a $u(e'_1) = 0$ et $u(e'_2) = e'_1$.
On en déduit que u est de rang 1, que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e'_1)$. Par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $2 - 1 = 1$ et puisqu'il contient e'_1, on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e'_1)$.
Par conséquent, l'image et le noyau de u sont confondus.

b) Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. En particulier, ils ont la même dimension.
D'après le théorème du rang, $2\,\mathrm{rg}(u) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Donc $\mathrm{Im}(u)$ est une droite. On choisit e'_1 un vecteur qui dirige cette droite.
Comme $e'_1 \in \mathrm{Im}(u)$, on choisit un vecteur e'_2 tel que $u(e'_2) = e'_1$.
Comme $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(e'_1) = 0$. Cela montre que e'_1 dirige $\mathrm{Ker}(u)$. Comme $u(e'_2) \neq 0$, e'_2 n'est pas colinéaire à e'_1.
La famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$ (car c'est une famille libre et maximale) et dans cette base, u est représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, car $u(e'_1) = 0$ et $u(e'_2) = e'_1$.

2) Pour un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2p}$, on va montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_{2p-1}, e_{2p})$ dans laquelle la matrice de u est $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

(ii) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

$\Rightarrow$ On suppose (i) vraie. L'examen des colonnes de la matrice donne :

$$u(e_1) = 0, u(e_2) = 0, \dots, u(e_p) = 0, u(e_{p+1}) = e_1, u(e_{p+2}) = e_2, \dots, u(e_{2p}) = e_p.$$