

Jean-Louis Pac

Systèmes dynamiques

Cours et exercices corrigés

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Fernando Cortés – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	--



© Dunod, Paris, 2012, 2016

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074477-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
Chapitre 1. Généralités sur les systèmes différentiels	1
1.1 Introduction	1
1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz	7
1.3 Symétries orbitales	14
Chapitre 2. Flot et conjugaison en temps continu	17
2.1 Flot d'un système dynamique	17
2.2 Conjugaison des systèmes dynamiques	21
2.3 Quelques propriétés générales du flot	30
Chapitre 3. Équilibres	33
3.1 Introduction	33
3.2 Stabilité des équilibres : exemple et définitions	33
3.3 Autres notions	40
Chapitre 4. Stabilité des systèmes linéaires	43
4.1 Réduction des endomorphismes	43
4.2 Flot et stabilité des systèmes linéaires	44
4.3 Stabilité structurelle et conjugaison	52
4.4 Trajectoires génératrices d'un système linéaire	56
Chapitre 5. Propriétés élémentaires en dimensions 1 et 2	65
5.1 Propriétés de base des systèmes de dimension 1	65
5.2 Portraits de phases d'un système linéaire de dimension 2	66
5.3 Courbure d'une trajectoire plane	69
5.4 Critère de Bendixson	71
5.5 Évolution d'un portrait de phases	73
Chapitre 6. Propriétés locales du flot	79
6.1 Introduction	79
6.2 Généralités et exemples	79
6.3 Théorie de Liapounov de la stabilité	83
6.4 Linéarisation autour des équilibres	88
6.5 Linéarisation autour des équilibres hyperboliques	90
Chapitre 7. Structuration du flot	97
7.1 Ensembles-limites	98
7.2 Orbites périodiques	104
7.3 Variétés remarquables	107

Chapitre 8. Flots hors de $\mathbb{R}^n$	113
8.1 Dérivation hors de $\mathbb{R}^n$	113
8.2 Flot sur un cercle	114
8.3 Flot sur la sphère S^2	115
8.4 Flot sur la sphère S^n	117
8.5 Flot sur le tore	119
8.6 Thème d'étude : le pendule	121
Chapitre 9. Bifurcations locales	129
9.1 Introduction	129
9.2 Stabilité structurelle des équilibres	130
9.3 Bifurcations locales en dimension 1	133
9.4 Bifurcations locales en dimension supérieure à 1	137
Chapitre 10. Systèmes à temps discret : équilibres et cycles	141
10.1 Introduction	141
10.2 Notions de base	142
10.3 Équilibres	144
10.4 m -cycles	152
10.5 Exposant de Liapounov	155
10.6 Autres notions	157
Chapitre 11. Introduction au chaos en temps continu	159
11.1 Ensembles-limites en dimension 2	159
11.2 Théorème de Poincaré-Bendixson	168
11.3 Introduction au chaos	170
Chapitre 12. Introduction au chaos en temps discret	179
12.1 Les équilibres de la suite logistique pour $r > 0$	180
12.2 Les cycles de la suite logistique pour $3 < r \leq 4$	184
12.3 Le chaos dans un système à temps discret	191
Chapitre 13. Annexes	197
Annexe 1 : Systèmes et mécanique céleste	197
Annexe 2 : Topologie et autres structures	199
Annexe 3 : Théorème de Cauchy et déterminisme	207
Annexe 4 : Réduction des endomorphismes	210
Annexe 5 : Deux compléments mathématiques	215
Annexe 6 : Fractales	219
Annexe 7 : Schéma numérique	225
Chapitre 14. Corrigés des exercices et problèmes	227
Bibliographie	269
Index	271

AVANT-PROPOS

Le but de ce livre est de fournir les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique, c'est-à-dire d'un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou autre dont on connaît la loi d'évolution.

On s'intéresse principalement aux questions qualitatives : un système évolue-t-il vers un cycle-limite ? vers un équilibre ? vers un autre destin ? Ce livre fournit les outils méthodologiques qui permettent d'aborder ces questions. La recherche de solutions analytiques n'est pas un but en soi, mais celles-ci sont exploitées quand elles sont accessibles : c'est le cas des systèmes linéaires, dont on montre l'importance. On établit ensuite une classification des comportements à long terme d'un système. Ainsi est mis en évidence le cas complexe du chaos, qui donne lieu depuis plusieurs décennies à d'actives recherches.

Le cadre est celui des systèmes autonomes, c'est-à-dire non commandés. Aussi, le champ couvert est-il frontalier mais distinct de celui de la commande des systèmes.

Ce livre traite des systèmes à temps discret et des systèmes à temps continu ; nombre de méthodologies mises en œuvre au bénéfice des premiers sont directement transposables aux seconds.

Le très bon accueil réservé à l'édition initiale m'a conduit à garder la structure générale. Cette deuxième édition :

- accorde une plus large place aux systèmes à temps discret ;
- voit l'approfondissement de certains thèmes, dont la suite logistique qui constitue une introduction de choix au chaos en temps discret ;
- comporte un plus grand nombre d'exercices et problèmes : le choix d'une correction détaillée de chacun d'entre eux est maintenu.

J'invite le lecteur qui aurait des questions ou remarques liées au sujet de ce livre à m'en faire part par mail à l'adresse : jeanlouispac@yahoo.fr

Jean-Louis Pac

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1

1.1 INTRODUCTION

Un **système dynamique** est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'**état** (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 ;
- de sa loi d'évolution.

Un système peut être :

- **à temps continu** : ce livre accorde une part importante à ce cas, qui est le plus fréquent ;
- **à temps discret** : les systèmes à temps discret font l'objet des chapitres 10 et 12. Il faut noter que toute simulation numérique d'un système à temps continu implique une discrétisation du temps.

Il peut également être :

- **autonome**, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) ;
- **non autonome** ; sa loi d'évolution dépend alors du temps.
- **Un premier exemple : l'oscillateur harmonique** est un exemple de système autonome à temps continu.

Le déplacement horizontal ξ d'une masse fixée à l'extrémité d'un ressort est régi par l'équation différentielle : $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0$, où ω dépend des paramètres du problème. Cet exemple simple est instructif car il permet déjà de cerner ce qu'on va appeler **état** et qu'on notera x .

Nous allons mettre en effet la loi d'évolution du système sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Cette forme est suffisamment générale pour englober un grand nombre de systèmes que l'ingénieur, le physicien ou l'économiste aura à étudier.

Chapitre 1 • Généralités sur les systèmes différentiels

L'équation de l'oscillateur harmonique est d'ordre 2 ; elle n'est donc pas sous la forme souhaitée. On l'amène à cette forme en remplaçant $\xi \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{R}^2$, ce qui la réduit de l'ordre 2 à l'**ordre 1**. La transformation est la suivante : on pose

$$x(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix}$$

où $\dot{\xi}$ désigne la dérivée de ξ par rapport au temps.

On obtient ainsi effectivement l'équation de l'oscillateur sous la forme de l'équation différentielle vectorielle **d'ordre 1** :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

On a diminué l'ordre au prix de l'augmentation de la dimension ($x \in \mathbb{R}^2$, alors que ξ appartenait à $\mathbb{R}$).

Plus généralement, on passera de (dimension 1, ordre n) à (dimension n , ordre 1) en écrivant l'équation différentielle :

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} = g\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}}\right)$$

sous la forme d'une équation différentielle vectorielle $\dot{x} = f(x)$, où x est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ d\xi/dt \\ \vdots \\ d^{n-2}\xi/dt^{n-2} \\ d^{n-1}\xi/dt^{n-1} \end{pmatrix}$$

En effet, on a :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

À l'image des exemples précédents, l'**espace des états** est dans de nombreux cas un **domaine** Ω de l'espace $\mathbb{R}^n$. On l'appelle aussi **espace des phases**, terminologie introduite par Poincaré. Nous rappelons qu'un domaine est un ouvert connexe, c'est-à-dire composé « d'un seul morceau ». La pertinence de cette hypothèse est justifiée par le

fait que si Ω comportait plusieurs composantes connexes (plusieurs « morceaux »), le système se décomposerait en autant de sous-systèmes n'interagissant pas, donc analysables individuellement.

Mais $\mathbb{R}^n$ peut ne pas suffire pour modéliser certains systèmes pourtant très simples (à l'image du pendule) qui par exemple mettent en jeu des angles, donc des éléments de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Cette situation est illustrée par l'exemple ci-après.

• Un deuxième exemple de système autonome : le pendule simple à tige rigide

L'état d'un tel pendule est composé de sa position angulaire et de sa vitesse angulaire. Son espace d'état est donc :

- $\mathbb{R}^2$ si on traduit la position angulaire par un réel. Ce choix, qui revient à « compter les tours », s'imposerait dans le cas du repérage angulaire d'un pendule de torsion.
- le produit d'un cercle par la droite réelle, donc un cylindre, si on traduit la position angulaire par un réel à $2k\pi$ près.

Dans le cas d'une dimension n quelconque, on parle de **variété**, entité géométrique localement assimilable à une portion de $\mathbb{R}^n$ comme le précise l'annexe 2, paragraphe « variétés ». Tout système mécanique dont un élément est mobile autour d'un axe ou d'un point répond à la même logique ; la robotique peut fournir des exemples complexes.

• Systèmes non-autonomes

On peut encore utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non-autonome en système autonome. En effet, la non-autonomie se traduit par une équation de la forme $\dot{x} = f(x, t)$. Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, ce qui réhabilite la forme $\dot{x} = f(x)$, avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple

Soit le système non-autonome (donc de loi non-stationnaire) $\ddot{\xi} = a\dot{\xi} + b\xi + \varphi(t)$.

Avec $x = \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on a : $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x_3) \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc transformé le système initial non-autonome d'ordre 2 en un système autonome d'ordre 3 sur $\mathbb{R}^3$, de la forme $\dot{x} = f(x)$.

Généralisons encore : ce qui a été fait pour les équations différentielles s'applique aux **systèmes différentiels**, autonomes ou non. On se reportera à l'exercice 1.1.

Intermède historique : Poincaré, un grand précurseur

Henri Poincaré (mathématicien, physicien et philosophe français, 1854-1912), un des plus grands scientifiques de tous les temps, a éclairé de son génie la fin du XIX^e siècle. Comme pour d'autres grands mathématiciens, la mécanique céleste a été l'une des motivations de ses travaux et l'a conduit à modéliser les systèmes différentiels autour de la notion d'« espace des phases », que nous appelons aujourd'hui espace des états... et que nous retrouvons tout au long de ces pages. L'usage a gardé partiellement cette dénomination initiale dans l'expression de « portrait de phases ».

Poincaré a fait un certain nombre de découvertes fondamentales, certaines très en avance sur son temps. Leur ampleur et leur variété justifieront un nouvel intermède historique dans ce document. À suivre donc...

Exercice 1.1 Mise de systèmes différentiels sous la forme $\dot{x} = f(x)$

1. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu \end{cases}$$
 sous la forme d'un système linéaire $\dot{x} = A \cdot x$, où x est un vecteur de dimension n convenable et A une matrice carrée $n \times n$.
2. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv + \alpha(t) \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu + \beta(t) \end{cases}$$
 (non autonome) sous la forme d'un système autonome $\dot{x} = f(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.
3. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \dot{u} = uv - \sin u \cos v = h(u, v) \\ \ddot{v} = u\dot{v} + 2uv + u^3\dot{v} + e^v = k(u, v, \dot{v}) \end{cases}$$
 sous la forme d'un système $\dot{x} = g(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.

Hypothèses pour la suite : nous allons étudier le système différentiel S suivant :

$$\boxed{\dot{x} = f(x)} \quad (S)$$

dans lequel f est une fonction de classe C^1 définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous relâcherons assez souvent cette hypothèse en supposant f seulement localement lipschitzienne, pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 1.2.1.

L'application $x \in \Omega \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ représente un **champ de vecteurs** (c'est le « champ des vitesses » du vecteur d'état x), expression qu'on pourra substituer au mot système. On adoptera quelques variantes dans le vocabulaire en nommant l'équation ci-dessus, indifféremment :

- **équation d'évolution du système** (sous-entendu : équation vectorielle régissant l'évolution d'un système physique, mécanique, économique, etc.) ;
- **équation du système** ;
- **système** (sous-entendu : système d'équations différentielles scalaires).

On appelle :

- **trajectoire** une solution du système différentiel ;
- **orbite** du système dynamique la courbe de $\mathbb{R}^n$ image de l'ensemble des temps par une trajectoire.

De façon imagée : alors que la trajectoire est une courbe graduée en t , l'orbite est une courbe non graduée.

On utilise souvent une notion intermédiaire en pourvoyant une orbite de flèche(s) indiquant le sens croissant du temps. Un ensemble d'orbites fléchées est appelé **portrait de phases** : voir la figure 1.1.

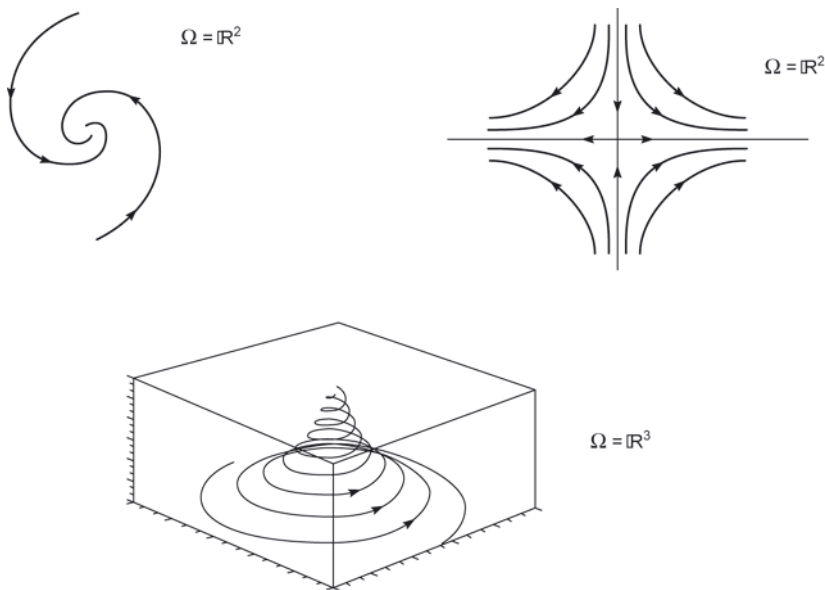


Figure 1.1- Trois portraits de phases.

La pratique montre une certaine souplesse dans la terminologie : dans de nombreux documents, orbite et trajectoire sont synonymes. Dans tous les cas, il convient de bien noter le sens des termes.

Exercice 1.2 Des portraits de phases

Tracer les portraits de phases des systèmes suivants, dont l'état est défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1. **Croissance d'une population** : en environnement infini, une population x croît selon $\dot{x} = \alpha x$ où $\alpha > 0$ (croissance malthusienne).

Si l'environnement est fini (aire, ressources, ...), la population x ne peut pas dépasser une certaine valeur. Moyennant un choix convenable des unités, elle satisfait l'équation **logistique** proposée par l'économiste François Verhulst : $\dot{x} = x(1 - x)$, avec $\Omega =]0, 1[$. On tracera le portrait de phases de l'équation logistique sans la résoudre analytiquement, avec $\Omega = \mathbb{R}$ (noter que seul $\Omega = \mathbb{R}_+$ a une interprétation démographique).

2. **Un système unidimensionnel** :

$$\dot{x} = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}.$$

3. **Deux systèmes bidimensionnels** [avec $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$] :

$$(a) \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} z, \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}^2$$

$$(b) \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z, \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}^2$$

4. **Un système 2-D** : $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1 - \rho) \\ 1 \end{pmatrix}$
(représentation dans $\mathbb{R}^2$, en coordonnées polaires).

Exercice 1.3 Toute orbite est connexe

Soit S un système dynamique $\dot{x} = f(x)$, avec f localement lipschitzienne sur Ω , domaine de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute orbite est connexe.

Exercice 1.4 Un système unidimensionnel a-t-il des orbites périodiques ?

On rappelle que les deux seules variétés connexes de dimension 1 sont $\mathbb{R}$ et le cercle (ou tore T^1).

Soit S un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ sur Ω , variété de dimension 1. On suppose f continue.

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}$, montrer que S ne possède aucune solution périodique non triviale (c'est-à-dire non constante).
2. Pour $\Omega = T^1$, montrer que S peut posséder une solution périodique non triviale.

1.2 THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

1.2.1 Le théorème

Le théorème de Cauchy (ou de Cauchy-Lipschitz) indique que pour toute solution initiale $x_0 \in \Omega$ le système différentiel $\dot{x} = f(x)$ a une *solution unique*.

Il fait l'objet de l'annexe 3 et s'exprime ainsi :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit (E) l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, où f est une fonction localement lipschitzienne sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une solution maximale unique de (E) satisfaisant $x(0) = x_0$.

- Notons que l'hypothèse (que nous ferons souvent) que f est de classe C^1 est plus exigeante que celle du théorème de Cauchy, car :
 f de classe $C^1 \implies f$ localement lipschitzienne (voir l'exercice 1.5).
- Qu'est-ce qu'une solution maximale ? Pour chaque condition initiale x_0 , on peut choisir un intervalle de temps ouvert $J(x_0)$ **maximal** au sens de l'inclusion, donc hors duquel la solution $x(t)$ sort de Ω ou n'est pas définie. On peut appeler $J(x_0)$ **plage temporelle** de x_0 . La solution $x(t)$ correspondante est elle-même dite maximale. Dans de nombreux cas, $J = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$.
- On dit que deux trajectoires x_1 et x_2 **se coupent** s'il existe un temps τ tel que $x_1(\tau) = x_2(\tau)$. Mais dans ce cas-là, le caractère autonome du système permet dans le théorème de Cauchy de remplacer $x(0) = 0$ par $x(\tau) = 0$, ce qui montre que deux trajectoires qui se coupent sont identiques. L'exercice 1.6 montre que ce résultat est faux si f n'est pas localement lipschitzienne.
- Pour les systèmes linéaires, f étant alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a $\Omega = \mathbb{R}^n$. Les solutions étant des exponentielles matricielles (chapitres suivants), on a : $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $J(x_0) = \mathbb{R}$. Pour des systèmes non-linéaires, des contre-exemples simples (on en donne un ci-après) montrent que $J(x_0)$ peut être distinct de $\mathbb{R}$.
- On peut exprimer le théorème de Cauchy d'une façon différente en disant qu'à un présent donné correspondent un passé unique et un avenir unique, ce qui définit le **déterminisme**. On se reportera à l'annexe 3.

Intermède historique : Cauchy, un mathématicien prolifique

Augustin Cauchy, mathématicien français (1789-1857), a apporté une contribution fondamentale à tous les secteurs des mathématiques de son temps. Nous lui devons la

première définition rigoureuse de la continuité (quel que soit ε , il existe η tel que...), de l'intégrale définie : les sommes dites de Riemann auraient pu porter son nom. La théorie des fonctions holomorphes lui doit ses fondements. Quant aux systèmes différentiels, l'importante notion de déterminisme est étroitement associée au théorème de Cauchy – Lipschitz, dont la formulation initiale date de 1820. Toujours dans le domaine des systèmes dynamiques, Cauchy a apporté sa contribution à la théorie des perturbations, donc à l'analyse d'un problème phare pour les mathématiciens et astronomes depuis le XVIII^e siècle : la stabilité du système solaire.

Un exemple de $J(x_0)$ borné : le système non-linéaire suivant : $\dot{x} = 1 + x^2$ fournit un exemple très simple (la dimension de l'espace d'états est $n = 1$) d'intervalle $J(x_0)$ borné. On a en effet :

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt ; \int_{x_0}^x \frac{dx}{1+x^2} = t - t_0 \text{ et, si } t_0 = 0 :$$

$\arctan x - \arctan x_0 = t$. D'où : $x = \tan(t + \arctan x_0)$. Il apparaît ainsi que :

$$J(x_0) =] -\pi/2 - \arctan x_0, \pi/2 - \arctan x_0[.$$

Par exemple, $J(0) =] -\pi/2, \pi/2[$ et $J(-1) =] -\pi/4, 3\pi/4[$ (ce qui correspond à $\arctan x_0 = -\pi/4$). Le caractère borné de J provient ici de la nature de la fonction $x(t)$: il s'agit d'une fonction tangente, prenant toute valeur réelle lorsque la variable décrit un intervalle ouvert de longueur π . A la borne supérieure de J , le module de x tend vers l'infini : on dit que la solution explose, ou qu'elle connaît une **mort explosive**.

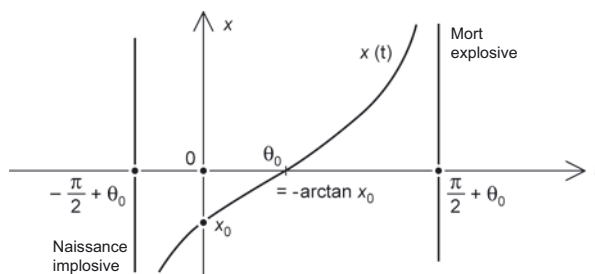


Figure 1.2 – Un système monodimensionnel explosif.

On peut aussi qualifier le comportement du système lorsque $t \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)^+$ de **naissance implosive**.

On peut généraliser l'emploi des deux adjectifs par les définitions suivantes, dans lesquelles $a \in \overline{\Omega}$, les temps t_i initial et t_f final, étant **finis** :

- il y a naissance implosive si $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|x(t)\| = +\infty$;