

**Hervé Queffélec,
Claude Zuily**

Analyse pour l'agrégation

Cours et exercices corrigés

5^e édition

DUNOD

© Dunod, 2020
ISBN 978-2-10-081708-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	XV
Chapitre I – Notion de plus petite et de plus grande limite	1
I. <i>Introduction</i>	1
II. <i>Théorèmes et définitions</i>	1
1. Limite supérieure et limite inférieure	1
2. Passage à la $\overline{\lim}$ ou $\underline{\lim}$ dans une inégalité	3
III. <i>Applications</i>	5
1. Suites sous-additives	5
2. Un théorème taubérien	6
IV. <i>Enoncés des exercices</i>	8
V. <i>Indications</i>	9
VI. <i>Solutions des exercices</i>	9
Chapitre II – Compléments sur les séries et les séries de fonctions	15
I. <i>Formule d'Abel et applications</i>	15
1. Formule d'Abel. Exemples	15
2. Prolongement de la fonction ζ au demi plan $\operatorname{Re} s > 0$ privé de $\{1\}$	20
3. La fonction θ	20
4. Application aux nombres premiers	21
II. <i>Les séries de Dirichlet</i>	23
1. Abcisses de convergence et de convergence absolue	23
2. Holomorphie	25
3. Produit de Dirichlet	27
III. <i>Retour sur la fonction ζ</i>	28
1. Prolongement holomorphe de la fonction ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$	28
2. Commentaires	31
IV. <i>Enoncés des exercices</i>	31
V. <i>Solutions des exercices</i>	34
Chapitre III – Séries entières, propriétés de la somme	40
I. <i>Rappels, définitions, notations</i>	40
1. Rayon de convergence	40
2. Théorème d'Abel non tangentiel	41
II. <i>Propriétés de la somme d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence</i>	44
III. <i>Convergence uniforme dans tout le disque de convergence</i>	46
1. Conditions nécessaires de convergence uniforme	46
2. Séries entières uniformément non normalement convergentes	47
IV. <i>Comportement de la somme au voisinage d'un point du cercle de convergence</i>	50
1. Points réguliers et points singuliers	50
2. Critères de régularité	52
3. Séries entières à coefficients positifs	53

4. Séries entières à coefficients lacunaires.....	54
V. <i>Enoncés des exercices</i>	56
VI. <i>Indications</i>	58
VII. <i>Solutions des exercices</i>	60
Chapitre IV – Séries de Fourier, applications	68
I. <i>Introduction, définitions, premières propriétés</i>	68
1. Fonctions périodiques et formules de Fourier	71
2. Définitions	72
3. Premières propriétés	74
a) Les espaces U, A, L^1, L^p	74
b) Premières règles de calcul	75
c) Propriétés de $f \mapsto \gamma(f)$	76
II. <i>Les principaux “noyaux” trigonométriques</i>	79
1. Deux définitions	79
2. Le noyau de Dirichlet	79
3. Le noyau de Fejér	80
4. Le noyau de Gibbs	82
5. Le noyau de Jackson	83
6. Le noyau de Poisson	84
III. <i>Les principaux théorèmes de convergence, premières applications</i>	86
1. Les premières difficultés et la solution de Fejér	86
2. Premières applications du théorème de Fejér	89
3. Le théorème de Dirichlet	93
IV. <i>Exemples de développements en série de Fourier</i>	94
1. Remarques préliminaires	94
2. Exemples de développements en série de Fourier	95
V. <i>Comparaison entre le comportement d’une fonction et celui de ses coefficients de Fourier</i>	101
1. Définitions préliminaires	101
2. Théorème de comparaison	102
VI. <i>Applications diverses des séries de Fourier</i>	106
1. Inégalité de Bernstein	106
2. Inégalité isopérimétrique	107
3. Application à la résolution d’équations aux dérivées partielles	109
4. Fonctions continues partout sans dérivée	114
a) Une classe de séries lacunaires sans dérivée.....	114
b) Modules de continuité.....	119
c) Fonctions partout sans dérivée arbitrairement proches de $C^{0,1}$	121
VII. <i>Enoncés des exercices</i>	123
VIII. <i>Indications</i>	128
IX. <i>Solutions des exercices</i>	130
Chapitre V – Compacité	142
I. <i>Rappels sur les espaces métriques, définitions et notations</i>	142

1. Métriques comparables, métriques complètes	142
2. Précompacité	143
II. Critère fondamentaux de compacité, convergence des suites, dimension métrique	145
1. Le critère fondamental de compacité	145
2. Suites convergentes, dimension métrique	146
a) Rappel.....	146
b) Dimension métrique	147
3. Etude détaillée de quelques exemples	147
4. Le théorème de Tychonoff et ses applications	152
a) Le théorème de Tychonoff	152
b) Le théorème de Banach-Alaoglu	152
c) Un théorème de point fixe.....	153
III. Le théorème d'Ascoli et quelques applications	155
1. Le théorème d'Ascoli	155
2. Le théorème des familles normales.....	157
a) L'espace métrique $H(\Omega)$	157
b) Le théorème.....	160
c) Une application du théorème des familles normales	161
IV. Compacité dans un espace de Banach E	165
1. Enveloppe convexe d'une partie compacte.....	165
2. Description des compacts d'un espace de Banach.....	167
3. Bases pseudo-orthonormées.....	168
V. Applications linéaires compactes	170
1. L'idéal bilatère $K(E)$	170
2. Un critère de compacité	171
3. Exemples d'applications linéaires compactes.....	172
4. Adjoint d'une application linéaire compacte	174
5. Couples (E, F) tels que $\mathcal{L}(E, F) = K(E, F)$	175
VI. Etude individuelle d'un opérateur compact	176
1. Rappels de théorie spectrale.....	176
2. Un lemme fondamental	177
3. Applications injectives d'image fermée	178
4. Ascente et descente d'un opérateur.....	178
5. Perturbations compactes de l'identité.....	179
6. Spectre ponctuel d'un opérateur compact	181
7. Etude spectrale d'un opérateur compact	182
8. Une application des opérateurs compacts à l'Analyse	184
VII. Enoncés des exercices	184
VIII. Indications	189
IX. Solutions des exercices	192
Chapitre VI – Espaces vectoriels normés	203
I. Introduction	203
II. Théorèmes généraux	205

VIII

1. Le théorème de Banach-Steinhaus	205
2. Le théorème de l'application ouverte	206
3. Le théorème du graphe fermé	209
4. Les théorèmes de Hahn-Banach	209
a) La forme analytique	209
b) La forme géométrique	211
III. <i>Exemples d'espaces de Banach et de leurs duals</i>	212
1. Supplémentaire d'un sous-espace fermé	212
a) Sous-espaces de ℓ^∞	212
b) Sous-espaces de C	215
2. Suites faiblement convergentes	217
3. Rappels sur les espaces ℓ^p	219
IV. <i>Espaces de Hilbert</i>	220
1. Propriétés générales	220
2. Une application	221
V. <i>Topologies faible et préfaible</i>	223
1. Le théorème général de Banach-Alaoglu	223
2. Une application de la topologie faible	223
VI. <i>Énoncés des exercices</i>	227
VII. <i>Indications</i>	232
VIII. <i>Solutions des exercices</i>	234
Chapitre VII – Espaces vectoriels normés de dimension finie	246
I. <i>Introduction et définitions</i>	246
II. <i>Normes sur K^n</i>	246
1. Parties compactes de K^n	246
2. Normes équivalentes	248
3. Compacité de la boule unité	249
4. Description géométrique des normes	250
III. <i>Normes sur E</i>	251
IV. <i>Exemples</i>	252
1. Inégalité de Khintchine	252
2. Polynômes trigonométriques	254
3. Opérateurs	255
V. <i>Applications</i>	256
1. Théorème de Riesz	256
2. Continuité automatique	257
VI. <i>Énoncés des exercices</i>	258
VII. <i>Indications</i>	259
VIII. <i>Solutions des exercices</i>	260
Chapitre VIII – Espaces fonctionnels	264
I. <i>Les espaces $C^k(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$</i>	264
1. Espaces $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$	264

a) Définitions.....	264
b) Formule de Leibniz.....	265
c) Formule de Faa-di-Bruno	265
d) Topologie. Métrisabilité. Complétude	265
e) Non normabilité.....	268
2. L'espace $C^\infty(\Omega)$	269
a) Topologie. Métrisabilité. Complétude	269
b) Propriété de Montel	269
c) Non normabilité.....	271
3. L'espace $C_b^k(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$	271
4. Autour de la continuité et de la dérivabilité	272
a) Points de continuité d'une fonction	272
b) Application	272
c) Points de continuité de la limite simple d'une suite de fonctions.....	274
d) Construction d'une fonction continue nulle part dérivable.....	275
e) Densité dans C^0 des fonctions continues nulle part dérivables.....	276
II. Les espaces $C^k(F)$, $k \in \mathbb{N}$ F fermé de $\mathbb{R}^n$	278
1. Définition. Normabilité. Complétude	278
2. Propriétés des espaces $C^k(F)$	280
III. Les espaces de Hölder	282
1. Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$	282
a) Définitions et exemples.....	282
b) Propriétés des espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$	284
2. Applications	286
a) Régularité de la fonction nulle part dérivable de I.4.d)	286
b) Régularité des fonction convexes	288
3. Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$	289
a) Propriétés.....	289
4. Résolution d'équations différentielles dans les espaces de Hölder	292
IV. Fonctions réel-analytiques	296
1. Généralités et exemples	296
2. Opérations sur les fonctions réel-analytiques	298
3. Lien avec les séries entières	300
4. Exemples	301
a) Lemme de Bernstein	301
b) Lemme de Borel	302
5. Principe du prolongement analytique.....	303
6. Lien avec les fonctions holomorphes.....	304
7. Commentaires.....	304
V. Enoncés des exercices	304
VI. Solutions des exercices	308
Chapitre IX – Etude des fonctions définies par des intégrales	312
I. Etude de la régularité	312

1. Rappels	312
a) Continuité	312
b) Dérivabilité.....	313
c) Holomorphie	314
d) Cas des intégrales semi-convergentes	314
e) Démonstrations des théorèmes	316
II. <i>Exemples et premières applications</i>	318
1. La fonction Gamma	318
a) Prolongement de la fonction Γ au plan complexe	319
2. Exemples	321
III. <i>Le produit de convolution</i>	324
1. Définitions et premières propriétés.....	324
2. Applications de la convolution	327
a) Construction de fonctions plateaux	327
b) Théorèmes de densité	329
IV. <i>La transformée de Fourier</i>	333
V. <i>Etude de la fonction d’Airy</i>	338
VI. <i>Etude asymptotique</i>	344
1. La méthode de Laplace	344
a) Application : formule de Stirling	346
2. La méthode de la phase stationnaire.....	347
a) Application : étude asymptotique de la fonction d’Airy	352
VII. <i>Enoncés des exercices</i>	355
VIII. <i>Solutions des exercices</i>	356
Chapitre X – Equations différentielles	359
I. <i>Généralités</i>	359
1. Définitions	359
2. Le lemme de Gronwall	360
II. <i>Théorie locale</i>	361
1. Existence et unicité.....	361
a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz précisé	361
b) Le théorème de Arzela-Péano	364
2. Dépendance par rapport aux paramètres et aux données initiales.....	368
a) Continuité	368
b) Dérivabilité.....	370
c) Différentiabilité d’ordre supérieur	373
d) Application : redressement des champs de vecteurs	374
e) Commentaires	375
III. <i>Théorie globale</i>	376
1. Existence et unicité de la solution maximale.....	376
2. Critère de prolongement.....	377
3. Exemples et applications	379
IV. <i>Introduction à l’étude qualitative des systèmes différentiels autonomes</i>	386

1. Introduction	386
2. Définitions et notations	387
3. Etude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$	388
4. Etude des systèmes non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre	392
a) Stabilité des solutions	393
b) Le théorème de linéarisation	395
5. Méthode d'étude géométrique des systèmes 2×2	396
a) Protocole d'étude	396
b) Affinement du protocole	399
V. Application : un théorème de Hadamard	404
VI. Equations différentielles $y'' + py' + qy = r$	409
1. Introduction, définition, rappels	409
2. Zéros des solutions	410
3. Développement en série entière des solutions	414
4. Stabilité. Equation de Hill-Mathieu	416
VII. Enoncés des exercices	429
VIII. Solutions des exercices	443
Chapitre XI – Principes du maximum et applications	469
0. Introduction	469
I. Les principes du maximum	469
1. Le principe du maximum faible	470
2. Le principe du maximum fort	471
3. Extensions	475
II. Applications	476
1. Application aux fonctions holomorphes	476
2. Application au problème de Dirichlet	477
3. Le théorème des trois cercles de Hadamard	478
4. Le théorème des trois droites	480
5. Le théorème de Riesz-Thorin	481
6. Applications du théorème de Riesz-Thorin	486
a) Transformée de Fourier	486
b) Convolution	487
Chapitre XII – Le théorème des nombres premiers	489
1. La fonction dzéta de Riemann	489
2. Les fonctions φ et Φ	492
3. Preuves du théorème des nombres premiers et du corollaire	496
4. Preuve du lemme 2.5	497
Chapitre XIII – Théorèmes limites en Probabilité. Applications à l'Analyse ..	501
I. Rappels et compléments	501
1. Le modèle de Kolmogorov	501
a) Définitions	501
b) Théorème d'unicité; semi-continuité	502

c) Espace produit et fubinisation	503
d) Variable aléatoire et loi image.....	504
e) Probabilité conditionnelle	505
f) Espérance, variance, fonction caractéristique	505
g) Inégalités de Markov et de Tchebycheff.....	508
2. Le concept d'indépendance	508
a) Définitions.....	508
b) Critères d'indépendance	510
c) Modèles pour l'indépendance et structure produit	511
d) Le lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un	512
3. Lois classiques.....	513
a) L'air du catalogue	513
b) Lois gaussiennes	514
4. Inégalités fondamentales.....	517
a) Inégalité de Paley-Zygmund	517
b) Inégalités de Khintchine pour les Rademacher.....	518
c) Inégalités de Khintchine pour variables centrées bornées.....	519
d) Théorème de majoration	519
e) Théorème de minoration	520
II. <i>Convergences et outils associés</i>	521
1. Convergence en probabilité	521
a) Définitions et propriétés	521
b) Loi faible des grands nombres.....	523
c) Polynômes de Bernstein.....	524
2. Convergence presque sûre	525
a) Définition et propriétés	525
b) Inégalités maximales.....	527
c) Théorèmes de Kolmogorov	529
d) Loi forte des grands nombres.....	532
e) Loi du logarithme itéré.....	535
3. Convergence en loi	542
a) Définitions équivalentes	542
b) Théorème de P. Lévy.....	544
c) Comparaison des modes de convergence	546
d) Théorème de la limite centrale.....	548
III. <i>Applications des Probabilités à l'Analyse</i>	550
1. Séries entières avec une coupure.....	550
2. Suites équidistribuées sur un compact	552
3. Sommes tronquées de l'exponentielle.....	554
4. Sous-espaces hilbertiens de ℓ_∞^n	554
5. Conjecture de Bloch-Nevanlinna	556
6. Nombres normaux	559
7. Séries trigonométriques lacunaires	560

IV. <i>Enoncés des exercices</i>	562
V. <i>Solutions des exercices</i>	571
Chapter XIV – Compléments sur les fonctions holomorphes	580
I. <i>Introduction</i>	580
II. <i>Le lemme de Schwarz</i>	580
1. Le lemme de Schwarz usuel	580
2. Le lemme de Schwarz-Pick	581
a) La distance pseudo-hyperbolique	582
b) Utilisation de la distance pseudo-hyperbolique	584
III. <i>Le lemme de Julia</i>	585
IV. <i>Trois théorèmes importants</i>	587
1. Le théorème d'Hurwitz	587
2. Le théorème des familles normales	589
3. Le théorème de Rouché	590
V. <i>Homographies</i>	591
1. Étude générale	591
2. Un exemple	594
VI. <i>Enoncés des Exercices</i>	596
VII. <i>Solutions des exercices</i>	598
Chapter XV – Dynamique discrète	601
I. <i>Introduction</i>	601
1. Analogie avec les équations différentielles	601
2. Nature des points fixes	603
II. <i>Théorèmes de conjugaison</i>	605
1. Problème général	605
2. Cas attractif strict	605
3. Cas super-attractif	607
4. Cas indifférent	607
III. <i>Théorème de Denjoy-Wolff</i>	609
1. Position du problème et énoncé	609
2. Le cas des automorphismes	610
3. Le cas des non-automorphismes	612
a) Le petit théorème de Denjoy-Wolff	612
b) Le grand théorème de Denjoy-Wolff	613
IV. <i>Le théorème de Julia-Carathéodory</i>	614
V. <i>Un exemple détaillé</i>	616
VI. <i>Enoncés des Exercices</i>	617
VII. <i>Solutions des exercices</i>	620
Chapter XVI – La méthode des caractéristiques	624
I. <i>Introduction</i>	624
II. <i>Le théorème</i>	625
III. <i>Quelques rappels de Calcul Différentiel</i>	625

XIV

1. Le théorème des fonctions implicites	625
2. Hypersurfaces	625
3. Champ de vecteurs et courbes intégrales.....	626
IV. <i>La méthode des caractéristiques</i>	628
V. <i>Un exemple classique</i>	631
1. Étude locale du lieu d'explosion	633
Chapter XVII – Le système de ondes de surface	637
1. <i>Introduction</i>	637
1. Problème posé par l'Académie des Sciences en 1813.	637
2. Les ondes de surface.	637
3. Quelques types de vagues	638
II. <i>La modélisation</i>	638
1. Les équations.....	639
1.1. L'équation du mouvement	639
2. L'incompressibilité.	640
3. L'irrotationalité.....	643
3.1. Une conséquence de l'irrotationalité.	644
4. Les conditions au bord.....	645
5. Le système en (η, v)	647
6. Conservation de l'énergie.	647
7. Cas des fluides irrotationnels. Le système en (η, ϕ)	649
III. <i>Approximation linéaire</i>	651
1. Le mouvement des particules de fluide	655
Bibliographie	657
Index	659

Avant-propos

Le livre

La préparation à l'Agrégation constitue généralement, pour le futur candidat, une période de bilan et de synthèse des connaissances de base qu'il a acquises au cours de ses précédentes années d'étude. Elle est aussi l'occasion d'enrichir et de dépasser ces connaissances. L'objectif de ce livre d'Analyse, qui est le fruit de l'expérience des auteurs dans ce domaine et ce type d'enseignement, comme préparateurs ou comme membres du jury du concours, est de tenter de l'y aider. Trois principes nous ont guidés dans la rédaction de cet ouvrage.

En premier lieu, insister sur des points classiques qui nous ont paru être, en général, mal connus ou mal compris des étudiants : notion de limite supérieure, précompacité, théorèmes de convergence des intégrales, théorie globale des systèmes différentiels non linéaires, etc...

Ensuite, donner le maximum d'exemples et d'applications moins habituels : fonction ζ de Riemann, fonction d'Airy, équations de Hille-Mathieu, sommes de Gauss, séries de Fourier lacunaires, méthodes probabilistes, etc...

Enfin, fournir des compléments ouvrant la voie à des théories plus avancées tout en n'utilisant que des outils classiques : principe du maximum, interpolation, géométrie des espaces de Banach, théorie de Riesz des opérateurs compacts, méthode des caractéristiques, etc...D'autre part, afin de favoriser l'assimilation, ce livre contient aussi plus de cent trente exercices ou longs problèmes (très souvent inédits) entièrement corrigés.

Cette nouvelle édition se compose de dix-sept chapitres, à l'intérieur desquels on s'est cependant permis d'utiliser des outils provenant d'autres chapitres ou d'autres théories. Les énoncés des exercices sont suivis des indications puis des solutions et occupent la fin de chacun d'entre eux.

Bien que volumineux, ce livre ne prétend nullement à l'exhaustivité, et son contenu a fait l'objet de choix de la part des auteurs. Il n'a donc pas pour objectif de se substituer entièrement aux traités classiques d'Analyse. En revanche sur les sujets choisis, tant par le fond que par la forme, cet ouvrage apporte un nombre important d'informations nouvelles.

Tout en étant écrit pour les agrégatifs (internes ou externes), ce livre peut être utilisé avec profit par un public plus large : élèves des classes préparatoires et des grandes écoles, étudiants en Licence et Mastère, enfin jeunes chercheurs, auxquels il pourra apporter, en particulier, illustrations et motivations pour des théories plus avancées.

La saisie et la mise en page des premières éditions de ce texte ont été l'oeuvre de Mme A. Bardot, décédée depuis. Nous prenons l'occasion pour

rendre hommage à sa gentillesse, sa disponibilité, sa grande compétence et sa maîtrise de TEX, qui nous ont été indispensables pendant l'élaboration des premières éditions, avant que nous n'apprenions nous-mêmes la frappe mathématique.

La quatrième édition de 2013 comportait déjà trois chapitres supplémentaires, chapitre XIV (rappels et compléments sur les fonctions holomorphes), chapitre XV (initiation à la dynamique holomorphe, notion de conjugaison, théorème de Denjoy-Wolff), chapitre XVI (en utilisant des notions élémentaires de géométrie différentielle, on prouve l'existence et l'unicité de certaines équations aux dérivées partielles d'un type particulier par la méthode des caractéristiques).

Nous avons mis à profit cette cinquième édition 2020 pour éliminer quelques (ultimes?) coquilles résiduelles, pour étoffer la présentation du chapitre IV (notamment motiver l'introduction des différents noyaux trigonométriques), et donner au chapitre XIII une version plus générale de la loi du logarithme itéré. Nous avons également ajouté aux seize chapitres existants un dix-septième chapitre "Le système des ondes de surface" dans lequel, à partir des lois classiques de la physique, on décrit mathématiquement le comportement de différents types de vagues à la surface d'un océan (marées, vagues de vent, tsunamis..).

Nous espérons ainsi, en nous inspirant des nouveaux programmes de l'agrégation (dans lesquels les probabilités, la transformée de Fourier, la dynamique discrète, les distributions et donc les équations aux dérivées partielles jouent un rôle renforcé) rendre l'emploi de ce livre plus accessible et plus profitable, pour un large public d'étudiants.

Les auteurs, Juin 2020

Les auteurs

- Hervé Queffélec est Professeur émérite à l'Université de Lille. Il est l'auteur de plusieurs livres d'enseignement comme "Analyse complexe" (avec M. Queffélec, Calvage et Mounet 2019), "Topologie" (Dunod, sixième édition, à paraître en 2020), ou "Twelve landmarks of Twentieth Century Analysis" (avec D. Choimet, Cambridge 2015). Il est également l'auteur de trois livres de recherche ("Dirichlet series and diophantine approximation", avec M. Queffélec, Hindustan Book Agency, à paraître en 2020), "Banach spaces for analysts" (Volumes 1 et 2, Cambridge 2018, avec D. Li). Ses thèmes de recherche sont l'analyse harmonique commutative, la théorie des opérateurs sur des espaces de Banach de fonctions analytiques, la théorie analytique des séries de Dirichlet et la théorie analytique des nombres.
- Claude Zuily est Professeur émérite à l'Université de Paris Saclay. Il est l'auteur de livres d'enseignement comme "Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles" (Dunod 2002), "Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles" (Hermann 1978, Cassini 2010)

et de livres de recherche comme “Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem” (Birkhäuser 1983), “Tools and problems in partial differential equations” (avec Thomas Alazard, Springer 2020). Ses thèmes de recherche portent sur les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

CHAPITRE I

Notion de plus petite et de plus grande limite

I. — Introduction

Ce fut une mini-révolution quand K. Weierstrass, pour étudier les notions de convergence en Analyse, introduisit le langage :

(I.1) *quel que soit epsilon positif, il existe éta positif tel que ...*

Ce langage a contre lui sa relative lourdeur, mais pour lui sa très grande rigueur ; il a parfois donné lieu à des abus : on part de $\varepsilon/1000$, de façon arbitraire, et après des calculs longs et obscurs, on arrive pile à : inférieur ou égal à ε . L'introduction des notions de $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ représente un peu la version “épurée” de (I.1), tout en mettant en évidence l'importance des **inégalités *a priori*** en Analyse : il y a un grand coup de barbe pour définir ces notions, puis un théorème fondamental de passage à la $\underline{\lim}$ ou à la $\overline{\lim}$ dans une inégalité (qui mérite le nom de théorème plus par son utilité que par sa preuve) et ensuite on récupère la rigueur de (I.1) avec la lourdeur en moins. Enfin, les notions de $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ interviennent automatiquement dans certains énoncés fondamentaux (formule de Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière, lemme de Fatou, lemme de Borel-Cantelli en Calcul des Probabilités, etc.).

II. — Théorèmes et définitions

1. Limite supérieure et limite inférieure

Soit $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ la droite numérique achevée ; c'est un espace compact dont la topologie peut être définie par la distance :

$d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ avec les conventions $\operatorname{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels : $u_n \in \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. On va voir qu'on peut **toujours** associer à cette suite deux uniques éléments ℓ, L de $\overline{\mathbb{R}}$:

ℓ s'appelle la plus petite limite (ou limite inférieure) de (u_n) et se note $\underline{\lim} u_n$ ou $\liminf u_n$. L s'appelle la plus grande limite (ou limite supérieure) de (u_n) et se note $\overline{\lim} u_n$ ou $\limsup u_n$.

Théorème II.1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Alors il existe un unique L de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que, λ désignant un élément de $\mathbb{R}$:

$$(II.1) \quad \begin{cases} a) & (\forall \lambda > L) \ (\exists n_0) \ (\forall n \geq n_0) : u_n \leq \lambda \\ b) & (\forall \lambda < L) \ (\forall n_0) \ (\exists n \geq n_0) : u_n \geq \lambda. \end{cases}$$

De même, il existe un unique ℓ de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que, λ désignant un élément de $\mathbb{R}$:

$$(II.2) \quad \begin{cases} a) & (\forall \lambda < \ell) \ (\exists n_0) \ (\forall n \geq n_0) : u_n \geq \lambda \\ b) & (\forall \lambda > \ell) \ (\forall n_0) \ (\exists n \geq n_0) : u_n \leq \lambda. \end{cases}$$

$$(II.3) \quad \text{On a toujours } \ell \leq L.$$

$$(II.4) \quad (u_n) \text{ converge vers } u \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \ell = L = u.$$

PREUVE. (II.1) : si une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est non majorée, on convient que sa borne supérieure $\sup A$ est $+\infty$; si elle est non minorée, on convient que sa borne inférieure $\inf A$ est $-\infty$; avec ces conventions, posons :

$$(II.5) \quad L := \inf_{n \geq 0} \left(\sup_{k \geq n} u_k \right) =: \inf_{n \geq 0} v_n.$$

a) Soit $\lambda > L$ (un tel λ n'existe pas si $L = +\infty$ et il n'y a alors rien à vérifier!); par définition d'une borne inférieure, $\exists n_0$ tel que $v_{n_0} \leq \lambda$, d'où $u_n \leq v_{n_0} \leq \lambda$ si $n \geq n_0$.

b) Soit $\lambda < L$ (un tel λ n'existe pas si $L = -\infty$ et il n'y a alors rien à vérifier!) et soit $n_0 \geq 0$; $v_{n_0} \geq L > \lambda$, donc il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n \geq \lambda$. Cela montre l'existence d'un L vérifiant (II.1); réciproquement, soit $L' \in \mathbb{R}$ vérifiant (II.1).

Si $L' < L$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L' < \lambda < L$; d'après (II.1) a) pour L' , il existe $n_0 \geq 0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq \lambda$ et donc $v_{n_0} \leq \lambda$; (II.5) entraîne alors : $L \leq v_{n_0} \leq \lambda$, ce qui est absurde.

Si $L < L'$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L < \lambda < L'$; d'après (II.1) b) pour L' , on a $v_{n_0} \geq \lambda$ pour tout $n_0 \geq 0$, donc d'après (II.5), $L \geq \lambda$, ce qui est de nouveau absurde; et donc $L = L'$.

(II.2) : la preuve de l'existence et de l'unicité est similaire, en posant cette fois :

$$(II.6) \quad \ell := \sup_{n \geq 0} \left(\inf_{k \geq n} u_k \right) =: \sup_{n \geq 0} w_n.$$

(II.3) : Soit m, n deux entiers ≥ 0 et soit $p = \sup(m, n)$. Par définition, (v_n) est une suite décroissante et (w_n) une suite croissante ; donc en utilisant l'inégalité $\inf A \leq \sup A$ avec $A = \{u_p, u_{p+1}, \dots\}$ on obtient :

$$(II.7) \quad w_m \leq w_p \leq v_p \leq v_n.$$

Fixant n et passant au sup sur m dans (II.7) on obtient

$$(II.8) \quad \ell \leq v_n.$$

Passant à l'inf sur n dans (II.8), on obtient *via* (II.5) : $\ell \leq L$.

(II.4) : $\Leftarrow$ Pour plus de clarté limitons-nous au cas où la valeur commune u de ℓ et L se trouve dans $\mathbb{R}$ et donnons-nous $\varepsilon > 0$:

(II.1) a) entraîne l'existence de n_0 tel que : $\forall n \geq n_0 : u_n \leq u + \varepsilon$,

(II.2) a) entraîne l'existence de n_1 tel que : $\forall n \geq n_1 : u_n \geq u - \varepsilon$.

Si $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on voit donc que : $\forall n \geq n_2 : u - \varepsilon \leq u_n \leq u + \varepsilon$, soit encore : $\forall n \geq n_2 : |u_n - u| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $u_n \rightarrow u$.

$\Rightarrow$ La preuve est analogue, et laissée au lecteur. $\diamond$

2. Passage à la $\overline{\lim}$ ou $\underline{\lim}$ dans une inégalité

L'utilité des notions de $\underline{\lim}$ ou $\overline{\lim}$ tient d'une part à leur existence toujours garantie (contrairement à celle de $\lim$), d'autre part à leur souplesse d'utilisation illustrée par le :

Théorème II.2. (Principe de passage à la $\underline{\lim}$ ou à la $\overline{\lim}$ dans une inégalité)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels telles que

$$(II.9) \quad \exists n_0; \quad \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n.$$

On a alors la conclusion

$$(II.10) \quad \begin{cases} a) & \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \\ b) & \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n. \end{cases}$$

PREUVE. a) Posons $L = \overline{\lim} a_n$, $L' = \overline{\lim} b_n$ et supposons $L > L'$. Soit λ_1, λ_2 deux réels tels que $L > \lambda_1 > \lambda_2 > L'$. D'après (II.1) a) et (II.1) b) :

$$(II.11) \quad \exists p \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq p : b_n \leq \lambda_2$$

$$(II.12) \quad \exists q \geq p \text{ tel que } a_q \geq \lambda_1.$$

D'où $b_q \leq \lambda_2 < \lambda_1 \leq a_q$, ce qui donne $b_q < a_q$ et contredit (II.9), prouvant ainsi a) par l'absurde.

b) se prouve de la même façon. ◇

Exemples.

$$(II.13) \quad \text{Si } u_n = (-1)^n, \quad \underline{\lim} u_n = -1 \text{ et } \overline{\lim} u_n = +1.$$

$$(II.14) \quad \text{Si } u_n = n, \quad \underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n = +\infty.$$

$$(II.15) \quad \text{Si } u_n = \cos(2\pi n\theta) \text{ avec } 0 < \theta \leq 1, \text{ il y a deux cas à distinguer :}$$

a) θ irrationnel $\Rightarrow \underline{\lim} u_n = -1$ et $\overline{\lim} u_n = +1$. (On utilise la densité de $\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.)

b) $\theta = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers > 0 premiers entre eux $\Rightarrow \underline{\lim} u_n = \alpha$, $\overline{\lim} u_n = 1$ avec $\alpha = \min_{0 \leq r < q} \left(\cos 2\pi \frac{r}{q} \right)$. (On effectue la division euclidienne de np par q ; noter que $\alpha = -1$ si q est pair, en faisant $r = \frac{q}{2}$.)

Remarques.

(II.16) $\overline{\lim} u_n = +\infty$ équivaut à dire que (u_n) n'est pas majorée, ou encore qu'on peut trouver une suite extraite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = +\infty$. Donc, $\overline{\lim} u_n < +\infty$ équivaut à dire que (u_n) est majorée.

(II.17) $\underline{\lim} u_n = +\infty$ équivaut à dire que $u_n \rightarrow \infty$. Donc $\underline{\lim} u_n < +\infty$ équivaut à dire que u_n ne tend pas vers $+\infty$, soit encore qu'on peut trouver une suite extraite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ qui est majorée.

(II.18) On a défini $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ pour des suites; mais on peut faire la même chose pour une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}$, x_0 point d'accumulation de A dans $\mathbb{R}$. On obtient alors

$\ell = \varliminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$ et $L = \overline{\varliminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)}$ tels que, V désignant un voisinage de x_0

$$(II.19) \quad \begin{cases} a) & (\forall \lambda > L) \ (\exists V) \ (\forall x \in V \cap A) : f(x) \leq \lambda \\ b) & (\forall \lambda < L) \ (\forall V) \ (\exists x \in V \cap A) : f(x) \geq \lambda. \end{cases}$$

$$(II.20) \quad \begin{cases} a) & (\forall \lambda < \ell) \ (\exists V) \ (\forall x \in V \cap A) : f(x) \geq \lambda \\ b) & (\forall \lambda > \ell) \ (\forall V) \ (\exists x \in V \cap A) : f(x) \leq \lambda. \end{cases}$$

(Noter que dans (II.1) et (II.2) le rôle de x_0 était joué par $+\infty$, celui de A par les entiers ≥ 0 et celui de V par $\{n; n \geq n_0\} \cup \{\infty\}$.)

Si f, g sont deux applications de A dans $\mathbb{R}$, le théorème II.2 et sa preuve restent valables en remplaçant (II.9) par :

$$(II.21) \quad \exists V; \forall x \in V \cap A : f(x) \leq g(x)$$

et en remplaçant (II.10) par

$$(II.22) \quad \begin{cases} a) & \overline{\varliminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)} \leq \overline{\varliminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} g(x)} \\ b) & \varliminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) \leq \varliminf_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} g(x). \end{cases}$$

(II.23) Revenons aux suites; ℓ (resp. L) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur d'adhérence de (u_n) dans $\mathbb{R}$; en particulier si F est un fermé de $\mathbb{R}$ tel que $u_n \in F$ pour tout $n \geq 0$, alors $\ell \in F$ et $L \in F$. Enfin, ℓ ou L ne dépendent pas des premiers termes de la suite (u_n) .

III. — Applications

1. Suites sous-additives

Exemple III.1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que :

$$(III.1) \quad u_{n+p} \leq u_n + u_p, \quad \forall n, p \geq 0.$$

Alors $\frac{u_n}{n}$ tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^+$.

PREUVE. Posons $\ell = \varliminf \frac{u_n}{n}$; $L = \overline{\varliminf} \frac{u_n}{n}$; $a = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$. Nous allons montrer que :

$$(III.2) \quad \ell \geq a; \text{ et } L \leq a.$$

La première inégalité est évidente : $n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_n}{n} \in F := [a, \infty]$ et on applique (II.23).

Pour la seconde inégalité, on fixe un entier $m \geq 1$ et on effectue la division euclidienne de n par m : $n = mq(n) + r(n)$ avec $0 \leq r(n) < m$. D'après (III.1) et une récurrence $u_n \leq u_{mq(n)} + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + (m-1)u_1 + u_0 =: q(n)u_m + C$. Donc si $n \geq 1$: $\frac{u_n}{n} \leq \frac{q(n)}{n}u_m + \frac{C}{n}$. Passons à la $\lim$ dans cette inégalité en notant que $\frac{q(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{m}$; nous obtenons $L \leq \frac{u_m}{m}$. Passant maintenant à la borne inférieure sur m , on obtient la seconde inégalité de (III.2) ; (II.3) et (II.4) montrent alors que $\frac{u_n}{n}$ tend vers a . $\diamond$

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse de sous-additivité (III.1) par l'hypothèse de sous-multiplicativité : $u_{n+p} \leq u_n u_p$. On arrive cette fois à la conclusion que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n}$ existe et vaut $\inf_{n \geq 1} u_n^{1/n}$. Si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé complet, T un opérateur linéaire borné de E et $u_n = \|T^n\|$, on a bien : $u_{n+p} = \|T^{n+p}\| \leq \|T^n\| \|T^p\| = u_n u_p$, et donc $\|T^n\|^{1/n}$ a une limite.

(Le théorème du rayon spectral précise la valeur de cette limite : c'est $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, où $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda \text{Id}_E \text{ n'a pas d'inverse dans } \mathcal{L}(E)\}$ est le spectre de T).

2. Un théorème taubérien

Exemple III.2.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite **décroissante** de réels positifs, $S_n = a_0 + \dots + a_n$, $\alpha \in]0, 1[$ et $c > 0$. On a équivalence entre :

- i) $a_n \sim cn^{-\alpha}$ quand $n \rightarrow \infty$.
- ii) $S_n \sim c \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ quand $n \rightarrow \infty$.

($u_n \sim v_n$ signifie comme d'habitude que $u_n = v_n + o(v_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$).

PREUVE. i) $\Rightarrow$ ii) est classique et utilise seulement la positivité des a_n , pas leur décroissance. Pour la réciproque, posons $\ell = \underline{\lim} n^\alpha a_n$ et $L = \overline{\lim} n^\alpha a_n$.

Soit $\delta > 1$ et $m = [\delta n]$ (où $[\]$ désigne la partie entière). Puisque (a_n) décroît :

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m \leq (m - n)a_n \leq (\delta - 1)n a_n.$$

D'où pour $n \geq 1$, $n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} n^{\alpha-1} (S_m - S_n)$, soit

$$(III.3) \quad n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} \left[\left(\frac{n}{m} \right)^{\alpha-1} m^{\alpha-1} S_m - n^{\alpha-1} S_n \right].$$

Passant à la $\lim$ dans (III.3) et utilisant le fait que $m \sim \delta n$ quand $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$(III.4) \quad \ell \geq \frac{1}{\delta - 1} \left[\delta^{1-\alpha} \frac{c}{1-\alpha} - \frac{c}{1-\alpha} \right] = \frac{c}{1-\alpha} \frac{\delta^{1-\alpha} - 1}{\delta - 1}.$$

Passant maintenant à la $\lim$ dans (III.4) quand δ tend vers 1 par valeurs supérieures, on obtient :

$$(III.5) \quad \ell \geq \frac{c}{1-\alpha} (1-\alpha) = c.$$

Soit $\delta \in]0, 1[$ et $m = [\delta n]$. On a cette fois :

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \dots + a_n \geq (n - m) a_n,$$

d'où pour $n \geq 1$:

$$(III.6) \quad n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1 - \frac{m}{n}} \left[n^{\alpha-1} S_n - m^{\alpha-1} S_m \left(\frac{n}{m} \right)^{\alpha-1} \right].$$

Le passage à la $\overline{\lim}$ dans (III.6) donne :

$$(III.7) \quad L \leq \frac{1}{1-\delta} \left[\frac{c}{1-\alpha} - \frac{c}{1-\alpha} \delta^{1-\alpha} \right] = \frac{c}{1-\alpha} \left[\frac{1 - \delta^{1-\alpha}}{1-\delta} \right].$$

Passant maintenant à la $\lim$ dans (III.7) quand δ tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$(III.8) \quad L \leq \frac{c}{1-\alpha} (1-\alpha) = c.$$

(II.3), (III.5) et (III.8) entraînent $\ell = L = c$; puis (II.4) implique $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = c$, ce qui prouve i). $\diamond$

Remarques.

(III.9) On a réussi à prouver l'implication relativement délicate ii) $\Rightarrow$ i) sans découper un seul epsilon en mille morceaux.

(III.10) La condition **taubérienne** de décroissance est essentielle, comme le montre l'exemple $a_n = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } n \text{ est pair } \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Un calcul simple montre que $S_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{n}$, donc

ii) a lieu avec $c = \alpha = \frac{1}{2}$, alors que i) est clairement en défaut.

IV. – Énoncés des exercices

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels positifs, ou deux suites bornées.

a) Montrer que :

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \text{ et } \underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n.$$

b) Montrer par des exemples que les inégalités peuvent être strictes.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Montrer que $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim} a_n$ et $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim} a_n$.

Exercice 3. Soit $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler d'un entier $n \geq 2$ ($\varphi(n)$ = nombre d'entiers n compris entre 1 et n , premiers avec n) ; on rappelle que $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$, où le produit est étendu aux diviseurs premiers de n . Montrer que :

$$\underline{\lim} \frac{\varphi(n)}{n} = 0 \text{ et } \overline{\lim} \frac{\varphi(n)}{n} = 1.$$

Exercice 4.

a) Montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{\delta}{q^2}$ pour tout rationnel p/q avec $q > 0$. En déduire que $\underline{\lim} |\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} = \lim |\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} = 1$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_1^\infty \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$?

b) Soit α un irrationnel algébrique, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, irréductible de degré $d \geq 2$, tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer (**théorème de Liouville**) qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\delta}{q^d}$ pour tout rationnel p/q avec $q > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_1^\infty \frac{z^n}{\sin(n\pi\alpha)}$?

c) On définit une suite d'entiers par $q_1 = 2$ et la relation de récurrence : $q_{n+1} = q_n^{q_n}$ si $n \geq 1$. Soit $\alpha = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{q_n}$. Montrer que α est irrationnel.

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_1^\infty \frac{z^n}{\sin(n\pi\alpha)}$?

Exercice 5. Soit (f_n) , f des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ telles que :

i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour presque tout x de $\mathbb{R}$.

ii) $\int_{-\infty}^\infty |f_n(x)| dx \rightarrow \int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx$. Montrer que $\int_{-\infty}^\infty |f(x) - f_n(x)| dx \rightarrow 0$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire ayant une loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité $e^{-x} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$; soit $(X_n)_{n \geq 1}$ un échantillon de X ; montrer que $\overline{\lim} \frac{X_n}{\text{Log } n} = 1$ presque sûrement.

V. — Indications

Exercice 1. b) Choisir différemment a_n et b_n suivant la parité de n .

Exercice 3. Soit $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$ la suite des nombres premiers et soit p un nombre premier fixé; considérer $n_k = p_1 p_2 \dots p_k$ puis $n_k = p^k$.

Exercice 4. a) Utiliser le fait que $|(\sqrt{2} - \frac{p}{q})(\sqrt{2} + \frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^2}$. Le rayon de convergence est 1.

b) P étant irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, $P(\frac{p}{q}) \neq 0$; montrer qu'il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que $|P(\frac{p}{q})| \geq \frac{\delta_0}{q^d}$, puis appliquer le théorème des accroissements finis à $P(\alpha) - P(\frac{p}{q}) = -P'(\xi)(\alpha - \frac{p}{q})$.

c) Montrer par récurrence que $q_1 \dots q_n$ divise q_{n+1} . Puis montrer qu'on peut trouver deux suites $(P_n)_{n \geq 1}$, $(Q_n)_{n \geq 1}$ d'entiers > 0 telles que : $0 < |Q_n \alpha - P_n|$ et $|Q_n \alpha - P_n| \rightarrow 0$; cela implique l'irrationalité de α .

d) Montrer que $|\sin(\pi q_n \alpha)|^{1/q_n} \rightarrow 0$. Le rayon de convergence est nul.

Exercice 5. Appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives :

$$g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|.$$

Exercice 6. Soit $\varepsilon > 0$; considérer les événements

$$A_n = \{X_n > (1 + \varepsilon) \text{Log } n\}, \quad B_n = \{X_n > \text{Log } n\}.$$

Montrer que $\sum_1^\infty P(A_n) < \infty$, $\sum_1^\infty P(B_n) = \infty$ et appliquer le lemme de Borel-Cantelli.

VI. — Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1. a) est facile.

b) Prenons $a_n = 1$ si n est pair, 0 si n est impair et $b_n = 1 - a_n$.

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim} 1 = 1 < 2 = 1 + 1 = \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n.$$

De même :

$$\lim(a_n + b_n) = \lim 1 = 1 > 0 = \lim a_n + \lim b_n.$$

Solution de l'exercice 3. Posons $\ell = \lim \frac{\varphi(n)}{n}$ et $L = \overline{\lim} \frac{\varphi(n)}{n}$. Rappelons que $1 + u \leq e^u$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Si $n_k = p_1 \dots p_k$, $\frac{\varphi(n_k)}{n_k} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq \exp \left[- \left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \right) \right]$. Or (cf. ch. II. ex. 3) la série des inverses des nombres premiers diverge; donc $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n_k)}{n_k} \leq e^{-\infty} = 0$, ce qui entraîne $\frac{\varphi(n_k)}{n_k} \rightarrow 0$, puis $\ell = 0$.

Soit maintenant $n_k = p^k$; $\frac{\varphi(n_k)}{n_k} = 1 - \frac{1}{p}$, $\forall k \geq 1$, donc la plus grande valeur d'adhérence L vérifie : $L \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n_k)}{n_k} = 1 - \frac{1}{p}$. Faisant tendre p (premier) vers $+\infty$, on obtient $L \geq 1$ et finalement $L = 1$ puisque $\frac{\varphi(n)}{n} \in [0, 1]$ (cf. (II. 23)).

Solution de l'exercice 4. a) $\sqrt{2} \notin Q$, donc :

$$(*) \quad \left| \left(\sqrt{2} - \frac{p}{q} \right) \left(\sqrt{2} + \frac{p}{q} \right) \right| \geq \frac{1}{q^2}.$$

En effet $\left| \left(\sqrt{2} - \frac{p}{q} \right) \left(\sqrt{2} + \frac{p}{q} \right) \right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q^2}$ et l'entier $|2q^2 - p^2|$ est différent de zéro, donc supérieur ou égal à 1. Distinguons maintenant deux cas :

$$\text{Cas 1 : } \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^2}.$$

$$\text{Cas 2 : } \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Alors $\left| \sqrt{2} + \frac{p}{q} \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| + 2\sqrt{2} \leq \frac{1}{q^2} + 2\sqrt{2} \leq 1 + 2\sqrt{2} \leq 4$ et (*) entraîne

$$\frac{1}{q^2} \leq \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \times \left| \sqrt{2} + \frac{p}{q} \right| \leq 4 \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right|,$$

d'où dans tous les cas

$$(**) \quad \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\delta}{q^2} \text{ avec } \delta = \frac{1}{4}.$$

(On peut choisir (J. F. Burnol) $\delta = \frac{1}{3/2 + \sqrt{2}} > 1/3$, l'exemple $p = 3, q = 2$ montrant que cette valeur est optimale).

On va utiliser l'inégalité classique

$$(VI.1) \quad |\sin x| \geq \frac{2}{\pi} |x| \text{ si } |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Soit n un entier ≥ 1 ; on peut trouver un entier $m \geq 1$ tel que : $|n\sqrt{2} - m| \leq \frac{1}{2}$; alors $|n\pi\sqrt{2} - m\pi| \leq \frac{\pi}{2}$ et d'après (VI.1) : $|\sin(n\pi\sqrt{2})| = |\sin(n\pi\sqrt{2} - m\pi)| \geq$

$\frac{2}{\pi}|n\pi\sqrt{2} - m\pi| = 2n\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| \geq 2n \times \frac{\delta}{n^2} = \frac{2\delta}{n}$ (d'après (**)), d'où :
 $|\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} \geq \left(\frac{2\delta}{n}\right)^{1/n}$ et le passage à la $\underline{\lim}$ dans cette inégalité donne :
 $\underline{\lim} |\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} \geq 1$, donc $= 1$ puisque $|\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} \in [0, 1]$ pour tout entier $n \geq 1$. $\underline{\lim} = \lim$ dans le cas qui nous concerne, mais laissons les choses en termes de $\underline{\lim}$ pour bien illustrer l'application de la formule de Hadamard, qui nous dit que :

$$(VI.2) \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim} \frac{1}{|\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n}}.$$

(R étant le rayon de convergence cherché).

Inversons (VI.2) et utilisons le fait facile que $\overline{\lim} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$ si (a_n) est une suite de réels > 0 . Nous obtenons d'après ce qui précède :

$$R = \underline{\lim} |\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} = 1.$$

$$b) \quad P(X) = \frac{a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0}{b} \text{ avec } (a_i), b \text{ entiers, } a_d \neq 0, b \geq 1.$$

En raisonnant comme dans a), on voit que (puisque $P(\frac{p}{q}) \neq 0$)

$$(VI.3) \quad \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{bq^d}.$$

Posons aussi

$$(VI.4) \quad M = \sup_{|x-\alpha| \leq 1} |P'(x)|$$

et distinguons deux cas :

$$\textbf{Cas 1 : } \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

$$\textbf{Cas 2 : } \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^d}.$$

Alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq 1$ et le théorème des accroissements finis donne :

$$\left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \sup_{|x-\alpha| \leq 1} |P'(x)| = M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

D'autre part : $|P(\alpha) - P(\frac{p}{q})| = |P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{bq^d}$ d'après (VI.3), d'où $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{bMq^d}$ et dans tous les cas :

$$(VI.5) \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\delta}{q^d} \text{ avec } \delta = \inf \left(1, \frac{1}{bM}\right).$$

En recopiant le calcul de a) et en utilisant (VI.5) on obtient : $|\sin(n\pi\alpha)| \geq \frac{2\delta}{n^{d-1}}$ et on conclut de la même façon que le rayon de convergence R vaut 1.

c) q_1 divise $q_2 = q_1^2$. Si q_n est divisible par $q_1 \dots q_{n-1}$, alors $q_{n+1} = q_n q_n^{q_n-1}$ est divisible par $q_1 \dots q_n$ puisque $q_n - 1 \geq 1$; cela montre par récurrence que q_n est divisible par $q_1 \dots q_{n-1}$, $\forall n \geq 2$ (noter que q_n est une “grande” puissance de 2); en particulier q_n est divisible par q_j si $j \leq n$ et $\sum_{j=1}^n \frac{q_n}{q_j}$ est un entier. Posons :

$$(VI.6) \quad Q_n = q_n; \quad P_n = \sum_{j=1}^n \frac{q_n}{q_j}.$$

On voit d'autre part, par récurrence sur p , que :

$$(VI.7) \quad q_{n+p} \geq q_n^{q_n} 2^{p-1}, \quad \forall n, p \geq 1.$$

Alors :

$$0 < Q_n \alpha - P_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{q_n}{q_j} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q_n}{q_{n+p}} \leq \frac{q_n}{q_n^{q_n}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{2q_n}{q_n^{q_n}},$$

(d'après (VI.7)), soit :

$$(VI.8) \quad 0 < Q_n \alpha - P_n \leq \varepsilon_n := \frac{2q_n}{q_n^{q_n}}.$$

Cela prouve l'irrationalité de α ; car si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers > 0 : $0 < Q_n \frac{p}{q} - P_n = \frac{Q_n p - P_n q}{q}$, donc l'entier $Q_n p - P_n q$ est ≥ 1 , donc $Q_n \alpha - P_n \geq \frac{1}{q}$ et cela contredit (VI.8) puisque $\varepsilon_n \rightarrow 0$. L'irrationalité de α entraîne : $\sin(n\pi\alpha) \neq 0, \forall n \geq 1$, donc on peut “considérer” $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{\sin(n\pi\alpha)}$.

d) Utilisant (VI.6), (VI.8) et l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ si $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$|\sin(\pi q_n \alpha)| = |\sin(\pi q_n \alpha - \pi P_n)| \leq \pi |q_n \alpha - P_n| \leq \frac{2\pi q_n}{q_n^{q_n}}$$

$$|\sin(\pi q_n \alpha)|^{1/q_n} \leq \frac{(2\pi q_n)^{1/q_n}}{q_n}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi q_n \alpha)|^{1/q_n} = 0.$$

$\lim |\sin(n\pi\alpha)|^{1/n} = 0$. Raisonnant comme dans a), on trouve un rayon de convergence R égal à zéro.

Solution de l'exercice 5. $\int$ désignant $\int \dots dx$, le lemme de Fatou $\int \lim g_n \leq \lim \int g_n$ se lit :

$$\int 2|f| \leq \lim \left[\int |f| + \int |f_n| - \int |f - f_n| \right] = 2 \int |f| - \overline{\lim} \int |f - f_n|$$

d'après l'exercice 2. Simplifiant par $\int 2|f| < \infty$, on obtient : $\overline{\lim} \int |f - f_n| \leq 0$, d'où $\lim \int |f - f_n| = 0$.

Solution de l'exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de probabilités sur lequel sont définies les X_n et X . On a :

$$(VI.9) \quad P(X > t) = \int_t^\infty e^{-x} dx = e^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $(E_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, rappelons que :

$$\overline{\lim} E_n := \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n} E_k \right) = \left\{ \omega \in \Omega; \omega \in \text{une infinité de } E_n \right\}.$$

(Noter l'analogie avec (II.5).)

$$\underline{\lim} E_n := \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcap_{k \geq n} E_k \right) = \left\{ \omega \in \Omega; \omega \in \text{tous les } E_n \text{ sauf un nombre fini} \right\}.$$

(Noter l'analogie avec (II.6).)

$(\overline{\lim} E_n)^c = \underline{\lim} E_n^c$, A^c désignant le complémentaire de l'ensemble A .

Alors, (VI.9) $\Rightarrow P(A_n) = P(X > (1 + \varepsilon) \log n) = \exp[-(1 + \varepsilon) \log n] = n^{-1-\varepsilon}$, donc $\sum_1^\infty P(A_n) < \infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli : $P(\overline{\lim} A_n) = 0$.

Si on pose $N_\varepsilon = \overline{\lim} A_n$, les rappels qui précèdent montrent que :

$$(VI.10) \quad P(N_\varepsilon) = 0; \text{ et } \omega \notin N_\varepsilon \Rightarrow \exists n_0(\omega) \text{ tel que } n \geq n_0(\omega) \Rightarrow X_n(\omega) \leq (1 + \varepsilon) \log n.$$

(II.10) et (VI.10) montrent que :

$$(VI.11) \quad \omega \notin N_\varepsilon \Rightarrow \overline{\lim} \frac{X_n(\omega)}{\log n} \leq 1 + \varepsilon.$$

Soit D l'ensemble dénombrable des rationnels > 0 et N l'ensemble négligeable $\bigcup_{\varepsilon \in D} N_\varepsilon$. (VI.11) montre que :

$$(VI.12) \quad \omega \notin N \Rightarrow \overline{\lim} \frac{X_n(\omega)}{\log n} \leq 1.$$

De même $P(B_n) = \frac{1}{n}$, donc $\sum_1^\infty P(B_n) = +\infty$; les B_n étant indépendants, le lemme de Borel-Cantelli entraîne $P(\overline{\lim} B_n) = 1$, donc $P(N') = 0$ avec

$N' = (\overline{\lim} B_n)^c$. Par définition, $\omega \notin N' \Rightarrow X_n(\omega) > \text{Log } n$ pour une infinité d'entiers n , ce qui implique :

$$(VI.13) \quad \omega \notin N' \Rightarrow \overline{\lim} \frac{X_n(\omega)}{\text{Log } n} \geq 1.$$

(VI.12) et (VI.13) montrent que :

$$\omega \notin N \cup N' \Rightarrow \overline{\lim} \frac{X_n(\omega)}{\text{Log } n} = 1.$$

Puisque $P(N \cup N') = 0$, cela achève l'exercice.

CHAPITRE II

Compléments sur les séries et les séries de fonctions

Il n'est bien entendu pas question de faire dans ce chapitre une théorie complète des séries puisque la littérature abonde d'ouvrages traitant de ce sujet ; l'objectif est seulement d'apporter quelques compléments moins connus, en particulier de populariser une méthode, due à Abel, de comparaison entre séries et intégrales aux applications intéressantes. On termine ce chapitre par les séries de Dirichlet et par quelques digressions sur la fonction ζ de Riemann et son prolongement au plan complexe.

I. — Formule d'Abel et applications

1. Formule d'Abel. Exemples

Si a est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ on posera pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$(I.1) \quad A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

D'autre part pour $t \in \mathbb{R}_+$ on notera $[t]$ sa partie entière et $\{t\} = t - [t]$ sa partie décimale. Alors $0 \leq \{t\} < 1$.

Théorème I.1. Soient $y < x$ deux réels positifs, f une fonction de classe C^1 sur $[y, x]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors

$$(I.2) \quad \sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt.$$

Corollaire I.2. Soient $y < x$ deux réels positifs, $f \in C^1([y, x], \mathbb{C})$. Alors

$$(I.3) \quad \sum_{y < n \leq x} f(n) = \{y\} f(y) - \{x\} f(x) + \int_y^x f(t) dt + \int_y^x \{t\} f'(t) dt.$$

En particulier si n_0 et N sont deux entiers positifs on a

$$(I.4) \quad \sum_{n=n_0+1}^N f(n) = \int_{n_0}^N f(t) dt + \int_{n_0}^N \{t\} f'(t) dt.$$

Corollaire I.3. Soient $x_0 \geq 0$ et $f : [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 . Si l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)| dt$ est convergente, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Remarque I.4. Lorsque f est à valeurs positives et décroissante, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)| dt$ est convergente puisque $\int_{x_0}^X |f'(t)| dt = -\int_{x_0}^X f'(t) dt = f(x_0) - f(X)$ tend vers une limite lorsque $X \rightarrow +\infty$. On retrouve alors le critère classique. Cependant il n'est pas nécessaire dans ce cas de supposer que f est C^1 . Mais lorsque f est C^1 le corollaire I.3 montre qu'il n'est pas nécessaire que f soit réelle ni monotone.

PREUVE DU THÉORÈME I.1. Posons $p = [y]$, $q = [x]$ de sorte que pour $p \leq t < p+1$ on a $A(t) = A(y) = A(p)$ et pour $q \leq t < q+1$, $A(t) = A(x) = A(q)$.

Notons d'autre part $I = \sum_{y < n \leq x} a(n) f(n)$. On a

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=p+1}^q a(n) f(n) = \sum_{n=p+1}^q (A(n) - A(n-1)) f(n) = \sum_{n=p+1}^q A(n) f(n) \\ &- \sum_{n=p}^{q-1} A(n) f(n+1) = A(q) f(q) - A(p) f(p+1) + \sum_{n=p+1}^{q-1} A(n) (f(n) - f(n+1)). \end{aligned}$$

Or $f(n) - f(n+1) = -\int_n^{n+1} f'(t) dt$ et pour $n < t < n+1$, $A(t) = A(n)$. Par conséquent

$$(I.5) \quad I = A(q) f(q) - A(p) f(p+1) - \int_{p+1}^q A(t) f'(t) dt.$$

Ensuite pour $q \leq t \leq x < q+1$, $A(t) = A(x) = A(q)$; alors

$$A(q) f(q) = A(x) f(x) + A(q) [f(q) - f(x)]$$

$$(I.6) \quad A(q) f(q) = A(x) f(x) - \int_q^x A(t) f'(t) dt.$$

De même pour $p \leq y \leq t < p+1$, $A(t) = A(y) = A(p)$, d'où

$$A(p)f(p+1) = A(y)f(y) + A(p)[f(p+1) - f(y)],$$

$$(I.7) \quad A(p)f(p+1) = A(y)f(y) + \int_y^{p+1} A(t)f'(t)dt.$$

On déduit de (I.5), (I.6) et (I.7)

$$(I.8) \quad I = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \left(\int_y^{p+1} A(t)f'(t)dt + \int_{p+1}^q A(t)f'(t)dt + \int_q^x A(t)f'(t)dt \right)$$

ce qui prouve (I.2).

PREUVE DU COROLLAIRE I.2. Appliquons le théorème I.1 au cas où $a(n) = 1$ pour tout n . Comme $A(x) = [x]$ on obtient

$$(I.9) \quad \sum_{y < n \leq x} f(n) = [x]f(x) - [y]f(y) - \int_y^x [t]f'(t)dt.$$

D'autre part une intégration par parties montre que

$$(I.10) \quad \int_y^x f(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t)dt.$$

Il suffit alors d'ôter l'égalité (I.10) à (I.9) pour obtenir (I.3).

PREUVE DU COROLLAIRE I.3. Supposons l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$ convergente. Comme $|\{t\}f'(t)| \leq |f'(t)|$, le membre de droite de l'égalité (I.4) admet une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$ ce qui prouve que la série $\sum f(n)$ est convergente. Inversement, par hypothèse, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)|$ est convergente. Donc $\int_{x_0}^{+\infty} f'(t)dt$ est convergente *i.e.* $\int_{x_0}^x f'(t)dt$ tend vers une limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par conséquent $f(x)$ tend vers une limite ℓ à l'infini. Supposons la série $\sum f(n)$ convergente; alors $f(n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$, ce qui entraîne que $\ell = 0$. Il suffit d'utiliser (I.3) pour déduire que $\int_y^x f(t)dt$ tend vers une limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exemples I.5.

1. La série de terme général $u_n = \frac{\cos \text{Log } n}{n}$ est divergente. En effet la fonction $f(t) = \frac{\cos \text{Log } t}{t}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = -\frac{\sin \text{Log } t}{t^2} - \frac{\cos \text{Log } t}{t^2}$, d'où $|f'(t)| \leq \frac{2}{t^2}$. Le corollaire I.3 s'applique. Dans l'intégrale $F(x) = \int_1^x \frac{\cos \text{Log } t}{t} dt$

posons $\text{Log } t = u$, il vient $F(x) = \int_0^{\text{Log } x} \cos u \, du = \sin \text{Log } x$ qui n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$; il suffit de prendre $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$, où $k \rightarrow +\infty$, alors $F(x) = (-1)^k$.

2. La série de terme général $u_n = \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ est convergente. En effet la fonction $f(t) = \frac{\sin \sqrt{t}}{t}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{t^{3/2}} - \frac{\sin \sqrt{t}}{t^2}$ d'où $|f'(t)| \leq \frac{2}{t^{3/2}}$ pour $t \geq 1$. Le corollaire I.3 s'applique. Dans l'intégrale $F(x) = \int_1^x \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$ posons $\sqrt{t} = u$. Il vient, $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du$ qui tend vers une limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. L'intégrale et la série sont donc convergentes. Remarquons que l'on aurait pu être tenté d'utiliser le critère d'Abel usuel mais une estimation uniforme de $\left| \sum_0^N \sin \sqrt{n} \right|$ n'est pas évidente.

3. Il est bien connu que pour $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re } s > 1$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^s}$ est absolument convergente. Que se passe-t-il pour $\text{Re } s = 1$? Si $s = 1$ la série diverge. Considérons le cas où $s = 1 + i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f(t) = t^{-(1+i\theta)}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = -(1+i\theta)t^{-(2+i\theta)}$ d'où $|f'(t)| \leq \frac{1+|\theta|}{t^2}$. Le corollaire I.3 s'applique; comme $\int_1^x \frac{dt}{t^{1+i\theta}} = \frac{1}{i\theta} \left(1 - \frac{1}{x^{i\theta}}\right)$ et que $x^{i\theta} = e^{i\theta \text{Log } x}$ n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ on déduit que la série $\sum \frac{1}{n^{1+i\theta}}$, $\theta \in \mathbb{R}^*$, est divergente. Cependant, remarquons que, d'après (I.4) on a

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^{1+i\theta}} = \int_1^N \frac{dt}{t^{1+i\theta}} - \int_1^N \{t\} \frac{1+i\theta}{t^{2+i\theta}} dt.$$

On en déduit

$$\left| \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^{1+i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|\theta|} + \int_1^{+\infty} \frac{1+|\theta|}{t^2} dt = \frac{2}{|\theta|} + (1+|\theta|),$$

ce qui montre que les sommes partielles sont uniformément bornées. En utilisant le critère d'Abel usuel on en déduit, par exemple que la série de terme général $\frac{a_n}{n^{1+i\theta}}$ où (a_n) est une suite décroissante qui tend vers zéro est convergente pour $\theta \neq 0$. Remarquons que $\text{Re } \frac{1}{n^{1+i\theta}} = \frac{\cos \text{Log } n}{n}$; on retrouve ainsi l'exemple 1.

Remarque I.6. Si f' n'est pas absolument intégrable sur $[a, +\infty[$ le corollaire I.3 ne s'applique plus. Cependant si f est C^2 et si f'' est absolument intégrable on peut encore avoir un résultat du même type. En effet on part de la formule (I.3); notons $p = [y]$, $q = [x]$. On a

$$\int_y^x \{t\} f'(t) dt = \int_y^{p+1} (t-p) f'(t) dt + \sum_{n=p+1}^{q-1} \int_n^{n+1} \{t\} f'(t) dt + \int_q^x (t-q) f'(t) dt$$