

miniManuel

de mécanique des fluides

Cours + Exercices

Arnault Monavon

Maître de conférences à l'UPMC

2^e édition

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071348-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

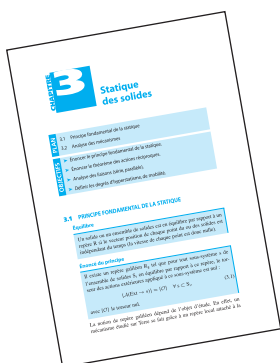
Nomenclature	1
1 Propriétés physiques	3
1.1 Définition	3
1.2 Gaz	4
1.3 Liquides	5
1.4 Fluide barotrope (compressible)	7
<i>Points clefs</i>	9
<i>Exercices</i>	9
<i>Solutions</i>	10
2 Statique	13
2.1 Système	13
2.2 Forces de surface et de volume	16
2.3 Équilibre statique	19
2.4 Loi de comportement	21
2.5 Statique des fluides	22
<i>Points clefs</i>	35
<i>Exercices</i>	35
<i>Solutions</i>	39
3 Cinématique	47
3.1 Description lagrangienne	48
3.2 Description eulérienne	50
3.3 Dérivées particulières	55
3.4 Divergence du champ de vitesse	64
3.5 Rotationnel du champ de vitesse	69

3.6	Accélération	78
3.7	Mouvement relatif	80
	<i>Points clefs</i>	82
	<i>Exercices</i>	83
	<i>Solutions</i>	85
4	Conservation de la masse	91
4.1	Formulation générale	91
4.2	Cas particuliers	94
	<i>Points clefs</i>	98
	<i>Exercices</i>	98
	<i>Solutions</i>	100
5	Conservation de la quantité de mouvement	103
5.1	Loi fondamentale de la dynamique	103
5.2	Équation de la dynamique des fluides	106
5.3	Fluide parfait	107
5.4	Équations du mouvement	112
5.5	Approximations fréquentes	117
5.6	Équations du mouvement en repère relatif	129
	<i>Points clefs</i>	130
	<i>Exercices</i>	131
	<i>Solutions</i>	136
6	Théorème de Bernoulli	143
6.1	Formulation locale	143
6.2	Formulation intégrale	150
6.3	Extension à un système complexe	156
6.4	Approximation par tranches	157
	<i>Points clefs</i>	160
	<i>Exercices</i>	161
	<i>Solutions</i>	167
7	Résultante des forces	177
7.1	Introduction	177
7.2	Théorème des quantités de mouvement	178

7.3	Fluide parfait incompressible en écoulement permanent dans le champ de la pesanteur	182
7.4	Application à un tube de courant	183
7.5	Cas d'un tube de courant immobile	186
	<i>Points clefs</i>	193
	<i>Exercices</i>	193
	<i>Solutions</i>	203
8	Frottement visqueux	217
8.1	Écoulement de Couette	217
8.2	Écoulement en conduit rectiligne	220
8.3	Écoulements turbulents	225
	<i>Points clefs</i>	230
	<i>Exercices</i>	230
	<i>Solutions</i>	232
Annexe A	Annexe mathématique	235
A.1	Analyse vectorielle	235
A.2	Opérateurs différentiels	235
A.3	Intégration	236
Annexe B	Formulations des équations générales	237
B.1	Coordonnées cartésiennes	237
B.2	Coordonnées cylindriques	239
B.3	Coordonnées sphériques	240
Annexe C	Données thermophysiques	243
C.1	Air	243
C.2	Eau	243
	Table des figures	246
	Liste des tableaux	247
	Index	248

Comment utiliser le Mini-Manuel ?

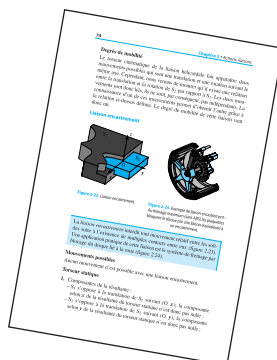
La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques



Une erreur à éviter



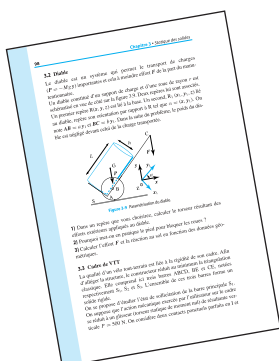
Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Nomenclature

Notations

A	scalaire	$\partial\mathcal{D}$	bord du domaine $\mathcal{D}$
$\vec{A}$	vecteur	$\vec{\nabla}$	gradient (opérateur <i>nabla</i>)
$\overline{\overline{A}}$	tenseur	(δa)	échelle de variation de a

Symboles romains

A	surface	$\vec{r}$	rayon-vecteur
$\vec{a}$	variable de LAGRANGE	r	rayon polaire (coordonnées cylindriques et sphériques), constante du gaz
c	vitesse du son	S	nombre de STROUHAL
c_p, c_v	chaleurs massiques	s	abscisse curviligne
$\mathcal{D}$	système matériel	t	temps
$\vec{e}$	vecteur unitaire	$\vec{T}$	densité de force de surface
e	énergie totale massique	T	température absolue
e_m	énergie mécanique massique	$\mathcal{U}$	potentiel des forces de masse, vitesse débitante
$\vec{f}$	densité de force de masse	u	composante de la vitesse sur Ox , énergie interne massique
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur	$\mathcal{V}$	volume géométrique
$\mathcal{H}$	charge (hydraulique)	V	volume, vitesse
h	enthalpie massique	$\vec{V}, \vec{v}$	vitesse
$\overline{\overline{I}}$	tenseur identité	v	composante de la vitesse sur Oy
$\vec{n}$	vecteur normal	w	composante de la vitesse sur Oz
h'	$\int dp/\rho$	$\bar{x}$	variable d'EULER
p	pression statique	Z	verticale ascendante
p_g	pression réduite (ou motrice ou piézométrique)		
Q, q	débit massique		
Q_v, q_v	débit volumique		
Re	nombre de REYNOLDS		

Symboles grecs

α	coefficient de dilatation	$\vec{\omega}$	tourbillon
β	coefficient d'augmentation de pression	ω	vitesse de rotation
χ_T	coefficient de compressibilité isotherme	$\vec{\Phi}$	trajectoire (représentation lagrangienne, $\vec{a} \rightarrow \vec{x}$)
δ_{ij}	symbole de KRONECKER	ϕ, φ	potentiel des vitesses, mouvement absolu et relatif
$\bar{\epsilon}, \epsilon_{ijk}$	tenseur d'orientation	$\vec{\Psi}$	trajectoire (représentation lagrangienne, $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$)
ε	petit paramètre ($\ll 1$)	ψ	fonction de courant
Γ	circulation	ρ	masse volumique
Λ	coefficient de perte de charge	$\bar{\bar{\sigma}}$	tenseur des contraintes
$\vec{\gamma}$	accélération	θ	angle polaire (coordonnées cylindriques et sphériques)
$\bar{\bar{\Omega}}$	tenseur des taux de rotation		

Indices (inférieurs ou supérieurs)

a	mouvement absolu	γ	exposant isentropique
e	extérieur, entrée, mouvement d'entraînement	k	exposant polytropique
f	frottement	m	mécanique
i	intérieur	r	mouvement relatif
$i, j, \dots$	indices (1, 2, 3)	s	sortie



Propriétés physiques

PLAN

- 1.1 Définition
- 1.2 Gaz
- 1.3 Liquides
- 1.4 Fluide barotrope (compressible)

OBJECTIFS

- Différencier un solide d'un fluide.
- Donner les définitions et les valeurs numériques des coefficients calorimétriques et thermoélastiques de fluides usuels comme l'air et l'eau.
- Rappeler les propriétés de la transformation isentropique.
- Définir un fluide barotrope.

1.1 DÉFINITION

La notion intuitive de ce qu'est un fluide repose sur les différences observées expérimentalement entre les propriétés physiques de la matière à l'état solide, liquide et gazeux. À l'état solide, la matière est déformable mais, à condition de ne pas dépasser la limite élastique au-delà de laquelle se produisent des déformations plastiques irréversibles, la matière reprend sa forme initiale lorsque les efforts appliqués s'annulent. À l'état liquide ou gazeux, la matière n'a pas de forme propre et on peut obtenir des déformations aussi grandes que l'on veut en exerçant des efforts extrêmement petits, pour autant qu'ils soient appliqués suffisamment longtemps. Lorsqu'ils cessent, le fluide ne reprend pas sa forme initiale. On exprime ces constatations en disant qu'*un fluide peut s'écouler*.

Il serait donc vain de tenter de différencier un solide d'un fluide en se basant sur les valeurs numériques de leurs propriétés physiques respectives car les adjectifs « grand » et « petit » n'ont aucun sens en physique,

si on ne se donne pas une référence. Il faut donc s'appuyer sur le schéma de comportement.

Un fluide est un milieu matériel homogène, déformable, assimilable à un milieu continu dans lequel les contraintes ne dépendent que des taux (ou vitesses) de déformation et non pas des déformations elles-mêmes.



Ce chapitre se rattache à la thermodynamique et nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Foussard & Mathé (voir bibliographie) auquel nous nous référerons par l'abréviation « FM » (cf. S. FOUSSARD et J.-N. MATHÉ. *Mini Manuel de Thermodynamique*. Dunod, Paris, 2009).

1.2 GAZ

Gaz parfait

Ce modèle est le plus simple et le plus connu (FM, § 1.6). Il est valable tant que la température et la pression ne sont « pas trop proches » des conditions critiques où l'état liquide se confond avec l'état gazeux. En mécanique des fluides, il s'écrit de préférence avec la masse volumique du fluide ρ , plutôt que son volume massique $1/\rho$:

$$\rho = p/(rT),$$

où ρ se mesure en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, p en Pa (pascal), r en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et T en K (kelvin) (voir tableau 1.2. La constante du gaz r se déduit de la constante molaire des gaz parfaits $\mathcal{R} = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et de la masse molaire $\mathcal{M}$ par la définition : $r = \mathcal{R}/\mathcal{M}$; dans le cas de l'air : $\mathcal{M}_{\text{air}} = 28,97 \text{ g}$ et $r_{\text{air}} = 287,0 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Coefficients calorimétriques

La thermodynamique macroscopique ne donne pas les valeurs des chaleurs massiques et il faut se référer à la théorie cinétique des gaz ou à des tables (FM, § 2.2).

Par exemple, la chaleur massique à pression constante de l'air à 20°C est égale à $c_p = 1,012 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ tandis que l'exposant isentropique prend pour valeur $\gamma = c_p/c_v = 1,4$. Rappelons également la forme prise par la relation de Mayer de laquelle se déduisent la chaleur massique à volume constant c_v ainsi que l'expression des chaleurs spécifiques en fonction de r et γ :

$$c_p(T) - c_v(T) = r \quad \text{et} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}.$$

Coefficients thermoélastiques

Les coefficients thermoélastiques se calculent directement à partir de l'équation d'état (voir tableau 1.1) et, quand bien même le comportement d'un gaz réel s'en éloignerait il quelque peu, les définitions de ces coefficients dans le cas du gaz parfait constituent un bon ordre de grandeur (FM, § 1.5).

Tableau 1.1 Coefficients thermoélastiques

Coefficient	Symbole usuel	Définition	Cas du GP	Unité
de dilatation	α	$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$	$\frac{1}{T}$	K^{-1}
d'augmentation de pression	β	$\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho$	$\frac{1}{T}$	K^{-1}
de compressibilité isotherme	χ_T	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$	$\frac{1}{p}$	Pa^{-1}
de compressibilité isentropique	χ_s	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$	$\frac{1}{\gamma p}$	Pa^{-1}

Aux conditions atmosphériques ($\Theta = 20^\circ\text{C}$, $p = 1 \text{ atm} = 1,0133 \text{ bar}$) ; on retiendra les valeurs suivantes : $\alpha = \beta \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T \sim 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. Les deux coefficients de compressibilité sont reliés par la relation de Reech :

$$\chi_T = \gamma \chi_s.$$

1.3 LIQUIDES

Contrairement aux gaz, le comportement des liquides est déterminé par les forces d'interaction moléculaires, en raison de leur proximité. Les liquides sont beaucoup plus denses et moins compressibles que les gaz, mais cette distinction n'a rien d'absolu, car, au voisinage du point critique, il n'y a aucune discontinuité entre l'état liquide et l'état gazeux.

Par exemple, les coordonnées du point critique de l'eau sont 221 bar et 374 °C, tandis que celles de l'azote sont 33 bar et -147 °C. Dans ce qui suit, nous supposons que les liquides sont pris à des températures très inférieures à la température critique, proches de l'ambiance.

Masse volumique

Le rapport des masses volumiques des liquides et des gaz est de l'ordre de 1 000. Par exemple, à 20 °C et 1 bar, la masse volumique de l'eau est de 998 kg · m⁻³ tandis que celle de l'air est de 1,16 kg · m⁻³.

Coefficients thermoélastiques

- Coefficient de compressibilité isotherme χ_T . Il est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$ pour de l'eau liquide.

Exemple de l'eau : pour faire varier de 1 % le volume d'une certaine masse d'eau liquide, il faut exercer une surpression de l'ordre de 200 bar. Il est donc inutile, lorsqu'on définit le volume d'un liquide, de préciser à quelle pression il a été mesuré.

- Coefficient de dilatation α . Il est de l'ordre de $2,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ pour de l'eau liquide à 20 °C. Comparée à celle des gaz, la dilatation thermique des liquides n'est pas négligeable.
- Coefficient d'augmentation de pression. Il est extrêmement difficile de faire des mesures à volume constant pour un liquide et on préfère calculer les coefficients correspondants à partir de la définition : $\beta = \alpha / (\chi_T p)$.

Exemple de l'eau : en utilisant les valeurs indiquées, nous obtenons $\beta = 4,2 \text{ K}^{-1}$. Donc, de l'eau considérée au départ à 20 °C et 1 bar et maintenue dans une enceinte de volume constant voit sa pression multipliée par le facteur β pour une augmentation de la température de 1 degré, ce qui est considérable.

Chaleurs spécifiques

Les chaleurs spécifiques des liquides dépendent parfois de façon significative de la température. Cependant, pour des applications mettant en jeu des écarts de température « suffisamment » petits, on peut les assimiler l'une à l'autre et les tenir pour constantes. Les mesures s'effectuent à pression constante, ce qui donne c_p , ensuite c_v se déduit de la relation de Mayer :