

Jesús Ferrer

ÁLGEBRA LINEAL

$(f \circ f^{-1})(x, y, z) =$ **REVISITADA**

$$\begin{aligned} &= f(f^{-1}(x, y, z)) = f\left(\frac{1}{2}(x+y-z), \frac{1}{6}(x+y-3z), \frac{1}{6}(x-y+z)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(x+y-z) + \frac{1}{2}(x-y+z), 2 \cdot \frac{1}{2}(x+y-z) - 3 \cdot \frac{1}{6}(x+y-3z), \frac{1}{2}(x+y-z) - 3 \cdot \frac{1}{6}(x-y+z)\right) \\ &= (x, y, z) = Id_{\mathbb{R}^3}(x, y, z) \end{aligned}$$

Jesús Ferrer

ÁLGEBRA LINEAL REVISITADA

ACCI ediciones (Asociación cultural y científica iberoamericana) apoya la protección del copyright. El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Gracias por comprar una edición autorizada de este libro y por respetar las leyes del copyright al no reproducir, escanear ni distribuir ninguna parte de esta obra por ningún medio sin permiso.

© Obra: Álgebra Lineal Revisitada
Primera edición: Enero. 2019
© Autor: Jesús Ferrer Llopis
ISBN: 978-84-17519-72-8

© Editado por ACCI ediciones // www.acciediciones.com
Gestión, promoción y distribución: Vision Netware S.L.
C./ San Ildefonso 17, local, 28012 Madrid. España.
Tlf: 0034 91 5273678 // Email: pedidos@visionnet-libros.com

Disponible en papel y ebook en las principales librerías físicas y online.
Las opiniones expresadas en este trabajo son exclusivas del autor. No reflejan necesariamente las opiniones del editor, que queda eximido de cualquier responsabilidad derivada de las mismas.

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.es o por teléfono 917021970) si necesita fotocopiar, escanear o utilizar algún fragmento de esta obra. Gracias por comprar una edición autorizada de esta obra y por respetar las leyes del copyright.

Als meus fills **Pablo, Marta, Jesse...**,
i als meus nets **Pablo, Martin, Ferran i Guillem**
...i als que vindran...

Índice general

0.1. Introducción	5
1. Espacios vectoriales	7
1.1. Conjuntos numéricos básicos	7
1.2. Espacios vectoriales. Ejemplos	10
1.3. Subespacios vectoriales	12
1.4. Dependencia lineal. Sistemas generadores	15
1.5. Bases. Bases de subespacios	26
1.6. Subespacios intersección y suma	32
1.7. Espacio vectorial cociente	35
2. Aplicaciones lineales. Matrices y determinantes	39
2.1. Aplicación lineal	39
2.2. Núcleo y rango	42
2.3. Espacio dual	49
2.4. Matrices	55
2.5. Determinantes	68
2.6. Matriz inversa. Cambios de base	75
3. Sistemas de ecuaciones lineales	85
3.1. Sistemas de ecuaciones lineales	85
3.2. Teorema de Rouché-Fröbenius	87
3.3. Regla de Crámer	88
3.4. Eliminación de parámetros	92
4. Diagonalización de matrices y endomorfismos	95
4.1. Matrices linealmente semejantes	95
4.2. Valores y vectores propios	97
4.3. Teorema de diagonalización	101
5. Forma canónica de Jordan de un endomorfismo	111
5.1. Bloques de Jordan. Matriz de Jordan	111
5.2. Subespacio máximo	112
5.3. Teorema de existencia de la matriz de Jordan	119
5.4. Matriz de Jordan real	125

6. Formas bilineales. Formas cuadráticas	135
6.1. Formas bilineales	135
6.2. Matriz de una forma bilineal	136
6.3. Forma bilineal simétrica	138
6.4. Formas cuadráticas	139
6.5. Clasificación de las formas cuadráticas	141
7. Espacios euclídeos	155
7.1. Producto escalar. Espacio euclídeo	155
7.2. Norma euclídea. Angulo entre dos vectores	160
7.3. Ortogonalidad. Bases ortonormales	163
7.4. Complemento ortogonal. Proyección ortogonal	169
7.5. Producto vectorial en $\mathbf{R}^3$	180
7.6. Isometrías vectoriales	184
8. Apéndice: Matrices circulantes	213
8.1. El grupo dihédrico	213
8.2. Permutaciones actuando sobre vectores	214
8.3. Matrices circulantes: Diagonalización e inversión	215

0.1. Introducción

En lo que sigue presentamos unos apuntes de Álgebra Lineal que pretendemos sean fácilmente comprensibles. Puesto que estos apuntes están pensados para un posible público con un sólido interés por las Ciencias Matemáticas, intentaremos desarrollar rigurosamente las demostraciones de todos los resultados que van apareciendo en la teoría, es decir, propiedades, lemas, proposiciones, teoremas y corolarios; el principio de su prueba se marca con el símbolo $\equiv$ y su finalización con $\clubsuit$. Con la intención de ilustrar los conceptos teóricos que se están explicando, iremos resolviendo una serie de ejemplos complementarios, los cuales representamos mediante Ex. 1, Ex. 2, etc. Dedicamos la última sección al estudio de un tipo particular de matrices cuadradas, las *matrices circulantes* respecto de las cuales admitimos tener una especial debilidad por su facilidad para proporcionar ejemplos de diferentes partes del Álgebra Lineal.

Para poder seguir estos apuntes con garantías creemos conveniente que el lector sea conocedor de los elementos y propiedades básicas de la Teoría de Conjuntos, es decir, las operaciones conjuntistas de la unión ($A \cup B$), intersección ($A \cap B$) y complementación ($A \setminus B$), el producto cartesiano de dos conjuntos ($A \times B$), etc. Al tratarse de una primera escritura de estos apuntes-de-profesor, es muy probable que el lector encuentre muchos errores y "gazapos" que, además de hacer más divertida la lectura (personalmente, cuando era alumno me divertía hallar errores en los textos, por supuesto siempre que no fuese extremadamente difícil corregirlos), lo que seguro demuestran es la humanidad del autor.

Miramar, Junio de 2015

Capítulo 1

Espacios vectoriales

- 1.1.- Conjuntos numéricos básicos.
- 1.2.- Espacios vectoriales. Ejemplos.
- 1.3.- Subespacios vectoriales.
- 1.4.- Dependencia lineal. El método de reducción. Sistemas generadores.
- 1.5.- Bases. Bases de subespacios.
- 1.6.- Subespacios intersección y suma.
- 1.7.- Espacio vectorial cociente.

1.1. Conjuntos numéricos básicos

Empezaremos recordando algunas nociones referentes a conjuntos numéricos básicos. El conjunto de los *números naturales* (o enteros no negativos) se representa por $\mathbf{N}$ y se trata de

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Según David Kronecker (matemático alemán del siglo XIX): *Die Ganzen Zahlen hat der lieber Got gemacht, alles anderes ist Menschenwerk*, que significa "El buen Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra del hombre". Como es bien sabido, el hombre y el vicio han ido siempre de la mano, en el momento que se necesitó llevar la cuenta de ganancias y pérdidas aparecieron los *números enteros*. Su símbolo representativo es la letra $\mathbf{Z}$ (del alemán Zahl)

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Dios creó (dicen algunos) al hombre y (ésto sí es seguro) lo creó con hambre. Así que el hombre tuvo que repartir y, después de más de un hachazo, hicieron su aparición los *números racionales*, o fraccionarios, o quebrados. Se simbolizan mediante la letra $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \{p/q : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, q \neq 0\}.$$

La introducción de los *números reales* necesitó algo más de tiempo. Pero, no tanto. Ya los sacerdotes egipcios, muchos siglos antes de Cristo, y de Pitágoras, conocían el Teorema

de Pitágoras de los triángulos rectángulos: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de su hipotenusa es lo mismo que la suma de los cuadrados de sus catetos". Las cosas importantes (y el *número irracional* lo es) aparecen cuando se necesitan (no pasa lo mismo con los teléfonos celulares). El río Nilo jugaba malas pasadas a los agricultores egipcios inundando periódicamente sus tierras perdiendo todo indicio de los lindes entre ellas. Es por ello que, cobrándose un buen precio (como el buen Rha les mandaba), los sacerdotes guardaban en pergaminos secretos dichos lindes en base a cálculos trigonométricos (de ahí viene la palabra Trigonometria, que quiere decir "medida de tres lados o ángulos"). En resumidas cuentas, sabían que todo ladrillo cuadrado esconde la raíz cuadrada de dos ($\sqrt{2}$) y que el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro vale constantemente el número "pi" (π). Los dos números que acabamos de recordar suponen dos buenos ejemplos de números irracionales (el primero es un irracional algebraico, ya que es raíz de un polinomio entero, mientras que el segundo es un irracional trascendente, puesto que no es raíz de polinomios con coeficientes enteros). Aunque la definición rigurosa de *número real* es complicada, para nosotros no lo va a ser. Por número real entendemos cualquier "expresión decimal", o sea, una sucesión de cifras decimales con una coma (o punto) separando la parte entera de la parte decimal.

$$e_1 e_2 \dots e_n \cdot d_1 d_2 \dots d_m, \quad e_1, e_2, \dots, e_n, d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Cuando la parte decimal es finita o periódica (pura o mixta) tenemos un número que es racional (se le puede calcular fácilmente su fracción generatriz). Por el contrario, si la parte decimal es infinita y no periódica, tenemos un número irracional ($\sqrt{2}, \pi$, e son ejemplos usuales).

Ex. 1 Hallar la fracción generatriz del decimal $1,234343434\dots = 1,\widehat{234}$.

≡

Sea $x = 1,2343434\dots$. Multiplicamos por 10 para pasar el punto decimal al 2:

$$10x = 12,343434\dots$$

Multiplicamos ahora por 100 para pasar el decimal al 1234.343434...:

$$1000x = 1234,343434\dots$$

Finalmente, restamos las dos últimas expresiones, aprovechando que tienen la misma parte decimal, y simplificando todo lo que se pueda (una siempre excelente costumbre)

$$990x = 1222; \quad x = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495} \cdot \clubsuit$$

Se puede comprobar (comprobar siempre es bueno!) la veracidad de lo hecho haciendo la división $\frac{611}{495}$.

Ex. 2 Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

≡

Razonamos por *Reducción al Absurdo*, es decir, suponemos que lo que queremos demostrar no es verdad, a continuación buscamos obtener algo *Absurdo* (por ejemplo, una "cosa" y también lo contrario de dicha "cosa"). Así pues, suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional, sea

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

donde suponemos que p, q son dos números naturales primos entre sí (no poseen divisores comunes distintos del 1). Elevando al cuadrado

$$2 = \frac{p^2}{q^2}; \quad 2 q^2 = p^2.$$

Entonces, 2 es un divisor de p . Sea pues $p = 2r$, siendo r un número natural. Volviendo a la igualdad anterior,

$$2 q^2 = (2r)^2 = 4 r^2; \quad q^2 = 2 r^2.$$

De lo que tenemos que 2 es un divisor de q . Por tanto, hemos obtenido que 2 es divisor común de p y de q , lo que supone un Absurdo con la hipótesis inicial de que p, q son primos entre sí. ♣

El orden real

Si $x, y \in \mathbf{R}$, decimos que " x es menor o igual que y ", lo que se escribe $x \leq y$, siempre que al representar x, y en la recta real resulta que x está situado a la izquierda de y . Equivalentemente, al comparar las expresiones decimales de x, y recorriéndolas de izquierda a derecha, se tiene que, o bien son iguales, o la primera cifra más pequeña corresponde a x .

Propiedades

1. (Reflexiva) $\forall x \in \mathbf{R}, x \leq x$.
2. (Antisimétrica) Si $x \leq y; y \leq x$, entonces $x = y$.
3. (Transitiva) Si $x \leq y; y \leq z$, entonces $x \leq z$.
4. (Compatibilidad con la suma) $x \leq y$ implica que $\forall z \in \mathbf{R}, x + z \leq y + z$.
5. (Compatibilidad con el producto por positivos) $x \leq y$ implica que $\forall z \geq 0$,

$$x \cdot z \leq y \cdot z.$$
6. (Reversibilidad ante el producto por negativos) $x \leq y$ implica que $\forall z \leq 0, xz \geq yz$.
7. (Reversibilidad ante inversos) $0 < x \leq y$ implica que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

1.2. Espacios vectoriales. Ejemplos

Por *espacio vectorial real* se entiende un conjunto E (cuyos elementos se llaman *vectores* siendo representados por $u, v, w, \dots$) que posee dos operaciones:

1) Suma vectorial: Se trata de una operación entre elementos de E que cumple las siguientes propiedades:

- 1.1 Estable: $\forall u, v \in E, u + v \in E$.
- 1.2 Asociativa: $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$.
- 1.3 Neutro: $\exists \vec{0} \in E$ tal que, $\forall u \in E, u + \vec{0} = u$.
- 1.4 Simétricos: $\forall u \in E, \exists -u \in E$ tal que $u + (-u) = \vec{0}$.
- 1.5 Conmutativa: $\forall u, v \in E, u + v = v + u$.

Con todo ésto, se dice que $(E, +)$ es un *Grupo Abelian*.

2) Ley externa: Es una operación $\cdot$ entre números reales (a menudo llamados *escalares* y representados mediante letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$) y vectores para dar como resultado vectores que cumple las siguientes propiedades conocidas como los *Cuatro Axiomas* (conviene saber que un Axioma es una afirmación que se admite Verdadera sin rechistar):

(Ax.1) Distributiva de escalares respecto de vectores: $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall u, v \in E,$
 $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

(Ax.2) Distributiva de vectores respecto de escalares: $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall u \in E,$
 $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

(Ax.3) Asociativa mixta: $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$. Observar que de los cuatro " $\cdot$ " que aparecen en el Axioma 3 el tercero de ellos es de distinto tipo que los restantes tres: El primer " $\cdot$ ", el segundo y el cuarto corresponden a la ley externa, mientras que el tercero se refiere al producto usual de números reales.

(Ax.4) Escalar unidad: $\exists 1 \in \mathbf{R}$ tal que $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$.

Ejemplos de espacios vectoriales

1) El espacio $\mathbf{R}^n$

El conjunto de vectores viene dado por el *producto cartesiano*

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

Al vector $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se le llama *n-pla* o *n-tupla* y a los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ se les llama *coordenadas* o *componentes* de u .

Suma en $\mathbf{R}^n$

Dados $u = (x_1, x_2, \dots, x_n); v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, definimos

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Aunque sea aburrido, vamos a tomarnos un tiempo demostrando que dicha suma cumple las cinco propiedades de grupo abeliano para $\mathbf{R}^n$.

Estable: De la misma definición, si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ y $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, queda claro que, como $x_1 + y_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 + y_2 \in \mathbf{R}$, ..., $x_n + y_n \in \mathbf{R}$, se tiene que

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Asociativa: Si u, v son como antes y $w = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, entonces, haciendo uso de que la suma de escalares es asociativa,

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) = u + (v + w). \end{aligned}$$

Neutro: El vector $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ es el elemento neutro para la suma de $\mathbf{R}^n$. Se le denomina *vector cero o nulo*

$$\begin{aligned} u + \vec{0} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = u. \end{aligned}$$

Simétricos: Dado u como antes, definimos el *vector opuesto* de u como

$$-u = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Claramente, se cumple que $u + (-u) = \vec{0}$.

Conmutativa: Es una clara consecuencia de la propiedad conmutativa de la suma de escalares.

Ley externa en $\mathbf{R}^n$: Si $\lambda \in \mathbf{R}$ y u es como siempre, definimos

$$\lambda \cdot u = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Nos entretenemos demostrando el cumplimiento del Axioma 1 (los demás se verifican de manera análoga):

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (u + v) &= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \dots, \lambda(x_n + y_n)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) \\ &= \lambda \cdot u + \lambda \cdot v. \end{aligned}$$

A $\mathbf{R}^n$ se le conoce con el nombre de *espacio vectorial real n -dimensional* y constituye el ejemplo más importante dentro de esta teoría, ya que como se verá más adelante la mayoría de espacios son equivalentes a él.

2) El espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que n

Por $\mathbf{R}_n[x]$ designamos el conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales y de grado menor o igual que n . Explícitamente

$$\mathbf{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}\}.$$

Suma vectorial en $\mathbf{R}_n[x]$

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ son elementos de $\mathbf{R}_n[x]$, todos sabemos sumar dichos polinomios

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n.$$

Comprobar que dicha suma induce una estructura de espacios vectorial para $\mathbf{R}_n[x]$ es bastante sencillo y análogo a lo hecho anteriormente.

Ley externa en $\mathbf{R}_n[x]$

Si $\lambda \in \mathbf{R}$ y $p(x)$ es como antes, definimos

$$\lambda \cdot p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \dots + (\lambda a_n)x^n.$$

También es fácil verificar que se cumplen los cuatro axiomas para esta ley externa.

Remarquemos que el espacio vectorial $\mathbf{R}_n[x]$ tiene $n + 1$ dimensiones. Para comprenderlo, basta desproveer al polinomio genérico $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ de la "decoración" dada por las potencias de la variable x , así como de las sucesivas sumas, para obtener

$$p(x) \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

que es una $(n+1)$ -pla de $\mathbf{R}^{n+1}$.

1.3. Subespacios vectoriales

Supongamos que tenemos un espacio vectorial real E . Un subconjunto $\emptyset \neq H \subset E$ es un *subespacio vectorial* de E siempre que, al restringir las dos operaciones de E al subconjunto H , resulta que H cumple todas las condiciones de la definición de espacio vectorial. Hablando vulgarmente (lo cual puede ser a veces peligroso), diremos que un subespacio vectorial es un espacio vectorial contenido en otro.

Como verificar todas las condiciones de espacio vectorial suele ser tedioso, he aquí una condición bastante más cómoda y equivalente.

Teorema 1 [Teorema de caracterización]

En un espacio vectorial E , un subconjunto H es subespacio vectorial si y sólo si se cumple que:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u, v \in H, \quad \lambda u + \mu v \in H. \quad (1.1)$$

Nota 1 Al vector $\lambda u + \mu v$ se le denomina *combinación lineal* de los vectores u, v . Resumiendo, lo que el teorema de caracterización nos dice es que un subconjunto H de un espacio vectorial E es subespacio vectorial siempre y cuando cualquier combinación lineal de vectores de H sigue perteneciendo a H .

$\equiv$

[$\Rightarrow$] Supongamos que H es un subespacio vectorial del espacio vectorial E . Entonces, como la ley externa está bien definida en H y la suma de vectores es estable en H , dados $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ y $u, v \in H$, se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \cdot u \in H \\ \mu \cdot v \in H \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in H.$$

[$\Leftarrow$] Supongamos ahora que sabemos que se cumple la condición (1.1). Vamos a verificar una por una las condiciones de estructura de espacio vectorial para H .

1) Suma vectorial

(1.1) Estable en H : Si $u, v \in H$, considerando $\lambda := \mu := 1 \in \mathbf{R}$ y aplicando la condición que estamos suponiendo cierta

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v \in H.$$

(1.2) Asociativa: Se cumple en H , ya que se cumple en todo E .

(1.3) Neutro: Como $H \neq \emptyset$, tomando $u \in H$ y $\lambda := 1, \mu := -1$, tenemos, aplicando de nuevo la condición (1.1),

$$\vec{0} = u - u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u \in H.$$

(1.4) Simétricos: Si $u \in H$, considerando $\lambda := -1, \mu := 0 \in \mathbf{R}, v := \vec{0} \in H$, aplicando la condición que estamos suponiendo cierta

$$-u = (-1) \cdot u = (-1) \cdot u + 1 \cdot \vec{0} \in H.$$

(1.2) Conmutativa: Se cumple en H , ya que se cumple en todo E .

2) Ley externa

(2.1) Bien definida en H : Si $\lambda \in \mathbf{R}, u \in H$, considerando $\mu := 0 \in \mathbf{R}, v := u \in H$ y aplicando la condición que estamos suponiendo cierta

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0 \cdot u \in H.$$

(2.2) Primer, Segundo, Tercero y Cuarto Axioma: Se cumplen en H , ya que se cumplen en todo E . ♣

Ex. 3 Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ son subespacios vectoriales

a) $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x - y + z = 0\}.$

b) $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x - y + z = 1\}.$

≡

a) Aplicamos el Teorema de caracterización.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u, v \in H_1, \quad \lambda u + \mu v \in H_1?$$

Lo más importante es saber empezar: Sean $u = (x, y, z); v = (a, b, c)$. Entonces conviene notar que $2x - y + z = 0$ y $2a - b + c = 0$.

$$\lambda u + \mu v = \lambda(x, y, z) + \mu(a, b, c) = (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c).$$

El siguiente paso tiene carácter comprensivo, es decir, podría ser evitado si se comprende. Llamamos

$$\alpha = \lambda x + \mu a; \quad \beta = \lambda y + \mu b; \quad \gamma = \lambda z + \mu c.$$

Así tenemos

$$\lambda u + \mu v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Nos queda verificar si la terna (α, β, γ) pertenece a H_1 . Observar que, para ello, basta comprobar que dichas coordenadas cumplen la ecuación definitoria de H_1 :

$$2\alpha - \beta + \gamma = 2(\lambda x + \mu a) - (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c) = \lambda(2x - y + z) + \mu(2a - b + c) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, la condición del teorema se cumple y H_1 es subespacio vectorial.

b) Hacemos lo mismo para H_2 :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u, v \in H_2, \quad \lambda u + \mu v \in H_2?$$

Otra vez sean $u = (x, y, z); v = (a, b, c)$. Ahora lo que tenemos es que $2x - y + z = 1$ y $2a - b + c = 1$.

$$\lambda u + \mu v = \lambda(x, y, z) + \mu(a, b, c) = (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c).$$

De nuevo este paso puede ser omitido. Llamamos

$$\alpha = \lambda x + \mu a; \quad \beta = \lambda y + \mu b; \quad \gamma = \lambda z + \mu c.$$

Así tenemos

$$\lambda u + \mu v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Nos queda verificar si la terna (α, β, γ) pertenece a H_2 . Observar que, para ello, basta comprobar que dichas coordenadas cumplen la ecuación definitoria de H_2 , es decir, que $2\alpha - \beta + \gamma = 1$:

$$2\alpha - \beta + \gamma = 2(\lambda x + \mu a) - (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c) = \lambda(2x - y + z) + \mu(2a - b + c) = \lambda + \mu.$$

Ahora bien, lo que nos preguntamos es si $\lambda + \mu$ es igual a 1, y ello para toda pareja de escalares λ, μ . Está claro que hay infinitas parejas de escalares λ, μ cuya suma $\lambda + \mu$ es distinta de 1. Por tanto, H_2 no es un subespacio vectorial. Para que quede más claro, aportamos el siguiente

Contraej.: Sean $\lambda = 1, \mu = 1, u = (1, 1, 0), v = (0, 0, 1)$. Está claro que $u \in H_2, v \in H_2$. Sin embargo

$$\lambda u + \mu v = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \notin H_2,$$

pues $2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2 \neq 1$. ♣

1.4. Dependencia lineal. Sistemas generadores

Dado E un espacio vectorial real, un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ (le llamaremos en lo sucesivo sistema) se dice que es un *sistema libre*, o que sus vectores son *linealmente independientes*, siempre que, al plantearnos la ecuación vectorial

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = \vec{0},$$

donde los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son incógnitas, resulta que la única solución que admite es la llamada *solución trivial*, es decir,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_r = 0.$$

En caso contrario, cuando la ecuación vectorial anterior admite alguna solución distinta de la trivial, es decir, si existe algún $\lambda_i \neq 0, i \in \{1, 2, \dots, r\}$, entonces se dice que el sistema de vectores inicial es un *sistema ligado*, o que sus vectores son *linealmente dependientes*.

Ex. 4 En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, se consideran los sistemas de vectores

$$S_1 = \{(1, 2, -1); (-3, 0, 2); (2, 1, 3)\}, \quad S_2 = \{(1, 2, -1); (-3, 0, 2); (-1, 4, 0)\}.$$

Estudiar su dependencia lineal.

≡

Empezamos estudiando la dependencia lineal del sistema S_1 . Siguiendo la definición (después aprenderemos una manera distinta de hacer lo mismo), nos planteamos la ecuación vectorial

$$\lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(-3, 0, 2) + \lambda_3(2, 1, 3) = (0, 0, 0).$$

Operando obtenemos

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (\lambda_1, 2\lambda_1, -\lambda_1) + (-3\lambda_2, 0, 2\lambda_2) + (2\lambda_3, \lambda_3, 3\lambda_3) \\ &= (\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3). \end{aligned}$$

Igualando coordenada a coordenada formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Nota 2 Aunque la resolución de sistemas de ecuaciones lineales corresponde a un tema que veremos posteriormente, en general, (como decía un viejo maestro mío) para resolver un sistema de ecuaciones cualesquiera todo consiste en empezar despejando una

de las incógnitas en una de las ecuaciones (normalmente la que más sencillo resulte), para substituir luego en cada una de las ecuaciones restantes y pasar a un nuevo sistema con una incógnita y una ecuación menos. Se procede de este modo hasta que, después de verificar que se han usado todas las ecuaciones del sistema inicial, se tenga el mayor número de incógnitas en función del menor número de ellas (a las incógnitas que quedan independientes se les denomina *parámetros*, y según cómo se resuelva pueden quedar como parámetros unas incógnitas u otras, siendo las resoluciones igualmente correctas). Al finalizar la resolución (correcta, claro...) pueden darse las siguientes situaciones:

- 1) Que las distintas incógnitas tengan que tener unos valores concretos. Entonces se dice que el sistema es *resoluble*, o *compatible*, *determinado*.
- 2) Que aparezca alguna "identidad universal" del tipo $0 = 0$, ó, $k = k$, con k un número cualquiera. Ello indica que el sistema es compatible y admite más de una solución. Se le llama sistema *compatible indeterminado*.
- 3) Que aparezca algún "absurdo" del tipo $0 = 1$, ó, $k = p$, con k, p un números cualesquiera distintos. Ello indica que el sistema es *irresoluble*, o *incompatible*.

Volviendo al Ejercicio, aplicando lo mencionado en la Nota anterior, despejando en la segunda ecuación del sistema de arriba y substituyendo luego

$$\begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ -7\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ -9\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Ello implica que

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Es decir, la única solución que la ecuación vectorial de partida admite es la trivial. Por tanto, el sistema S_1 es linealmente independiente.

Para estudiar la dependencia lineal del sistema S_2 , empezamos como antes. Primero nos planteamos la ecuación vectorial correspondiente

$$\lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(-3, 0, 2) + \lambda_3(-1, 4, 0) = (0, 0, 0).$$

Operando obtenemos

$$(0, 0, 0) = (\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + 4\lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Iguando coordenada a coordenada formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Despejando de la tercera ecuación y substituyendo

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

De ahí se obtiene

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ -4\lambda_3 + 4\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

que nos lleva a la identidad universal $0 = 0$. Ello significa que el sistema admite más de una solución (de hecho, al tratarse de un sistema lineal, admite infinitas soluciones). Consecuentemente, la ecuación vectorial inicial admite alguna solución que no es la trivial y el sistema S_2 es linealmente dependiente. Cuando tengamos un sistema linealmente dependiente es conveniente hallar alguna solución diferente de la trivial para formar lo que se llama una *relación de dependencia*, que de paso nos sirve para comprobar lo hecho:

Como el sistema anterior admite la solución final (parametrizada)

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3, \end{cases}$$

eligiendo el valor (huir de los ceros!...) $\lambda_3 = 1$, obtenemos: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$. Por tanto, se ha de cumplir la siguiente relación de dependencia (lo que sirve para comprobar que lo hecho está bien)

$$-2 \cdot (1, 2, -1) - (-3, 0, 2) + (-1, 4, 0) = (0, 0, 0). \clubsuit$$

Propiedades de la dependencia lineal

- 1) Cualquier sistema que contenga al vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente (L.D.).
- 2) Cualquier subsistema (subconjunto) de un sistema linealmente independiente (L.I.) lo sigue siendo.
- 3) Cualquier sistema unitario (de un sólo vector) cuyo vector no sea el $\vec{0}$ es linealmente independiente.
- 4) En $\mathbf{R}^n$, todo sistema linealmente independiente ha de tener como máximo n vectores.
- 5) En $\mathbf{R}^n$, un sistema de n vectores se llama *triangular* cuando, al disponer los vectores formando un cuadrado, todas las coordenadas por debajo de la *diagonal principal* (la descendente de izquierda a derecha) valen cero. Cualquier sistema triangular cuyos coeficientes diagonales sean todos distintos de cero es linealmente independiente.
- 6) En un espacio vectorial E , consideremos los sistemas $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y

$S' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, donde

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2 + \alpha_2 v_1, w_3 = v_3 + \alpha_3 v_1, \dots, w_n = v_n + \alpha_n v_1.$$

Entonces los dos sistemas S y S' tienen el mismo carácter lineal, es decir, si S es L.I. (resp. L.D.) también lo es S' .

≡
1) Supongamos que $\vec{0} \in S$, donde S es un sistema de vectores del espacio vectorial E . Claramente, si $S = \{\vec{0}, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, la ecuación vectorial

$$\lambda_1 \cdot \vec{0} + \lambda_2 \cdot v_1 + \dots + \lambda_{n+1} \cdot v_n = \vec{0}$$

admite soluciones distintas de la trivial, por ejemplo

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{n+1} = 0.$$

2) Si $S_1 \subseteq S_2$ y sabemos que S_2 es L.I. Suponiendo que $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$, si nos planteamos la ecuación vectorial

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0},$$

como se puede extender a la ecuación vectorial

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m = \vec{0},$$

y sabemos que los vectores v 's y u 's forman el sistema S_2 , que es L.I., podemos afirmar, ya que la única solución de la ecuación vectorial anterior es la trivial, que

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

3) Sea $S = \{v\}$, con $v \neq \vec{0}$. Si nos planteamos la ecuación vectorial correspondiente, ésta ha de tener la forma

$$\lambda \cdot v = \vec{0}.$$

Entonces, suponiendo que $\lambda \neq 0$, como existe $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \mathbf{R}$, tenemos, usando propiedades de la estructura de espacio vectorial

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} (\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = \lambda^{-1} (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} + \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = v + v \\ &\rightarrow \vec{0} = v + (-v) = (v + v) + (-v) = v. \text{ Absurdo} \end{aligned}$$

Nota 3 Observar que al demostrar esta propiedad, de paso hemos demostrado algo muy importante en la estructura vectorial: Si $\lambda \cdot v = \vec{0}$ y $v \neq \vec{0}$, entonces $\lambda = 0$. De hecho, puede verse con facilidad que

$$\lambda \cdot v = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ó} \\ v = \vec{0}. \end{cases}$$

