

CHRISTOPHE CAPPE

PHYSIQUE

**1 200 QUESTIONS DE COURS
ET APPLICATIONS**

**CAPES/AGRÉGATION
PHYSIQUE-CHIMIE**

DUNOD

● Avant-propos

La réussite aux concours externes et internes de recrutement des enseignants de physique-chimie (CAPES, Agrégation) nécessite, outre des connaissances didactiques et pédagogiques, de solides connaissances disciplinaires à un niveau attendu au minimum de celui des classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles. La maîtrise de ces connaissances est le socle même du discours scientifique pédagogique propre à l'enseignement. L'objectif principal de cet ouvrage est d'apporter aux candidats de ces concours une synthèse des savoirs et savoir-faire fondamentaux dans les principaux domaines de la physique (optique, mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, ondes et physique moderne). Les étudiants des classes préparatoires comme les collègues déjà enseignants pourront aussi y trouver un intérêt.

Chacun des 24 thèmes proposés se décline sous la forme d'énoncés alternant entre des questions de cours et des applications, avec à leur suite des corrigés détaillés. Ils peuvent être travaillés en toute autonomie indépendamment les uns des autres. Le candidat trouvera dans les questions de cours les principales définitions et lois de la physique, ainsi que les démonstrations et raisonnements physiques types, un soin tout particulier ayant été apporté à la description des hypothèses inhérentes à toute modélisation. Si la capacité à mener un développement calculatoire rigoureux reste indispensable, la technicité mathématique ne doit pas supplanter le sens physique. C'est en ce sens que les applications s'appuyant sur des situations concrètes tirées de l'expérience et de la vie courante ont été choisies. Afin d'alléger les énoncés, toutes les constantes et données astronomiques utiles sont regroupées dans une table en fin d'ouvrage.

Je tiens à remercier tout particulièrement Nathalie Bourdon d'avoir cru en ce projet, pour sa confiance tout au long de la rédaction, pour ses conseils avisés et pour l'entière liberté qu'elle m'a laissée, ainsi qu'Anne Temps pour son important travail consacré au suivi de la réalisation de l'ouvrage et nos échanges toujours constructifs. Je n'oublie évidemment pas ma famille dont l'indéfectible soutien et les encouragements m'ont aidé à mener à bien ce projet.

Table des matières

Partie 1	Optique	1
1	Optique géométrique	2
1	Lois de l'optique géométrique	2
2	Formation des images	5
3	Miroirs sphériques	7
4	Lentilles minces sphériques	8
5	Focométrie	9
6	Aberrations chromatiques des lentilles minces	10
	Corrigés	13
2	Instruments d'optique	36
1	Caractéristiques générales des instruments d'optique	36
2	L'œil	36
3	La loupe	37
4	L'appareil photographique numérique	37
5	Le microscope optique	40
6	Lunette astronomique et télescope	42
	Corrigés	46
3	Lumière et interférences	66
1	L'onde lumineuse	66
2	Conditions d'interférences à deux ondes	66
3	Dispositifs interférentiels par division du front d'onde. Exemple du dispositif des trous d'Young	68
4	Notion de cohérence spatiale	70
5	Notion de cohérence temporelle	73
6	Dispositifs interférentiels par division d'amplitude. Exemple de l'interféromètre de Michelson éclairé avec une source ponctuelle	75
7	Dispositifs interférentiels par division d'amplitude. Exemple de l'interféromètre de Michelson éclairé avec une source étendue	78
8	Interférences à ondes multiples	81
	Corrigés	84

4	Lumière et diffraction	112
1	Principe d'Huygens-Fresnel	112
2	Diffraction de Fraunhofer	112
3	Diffraction par une ouverture rectangulaire	113
4	Diffraction par N fentes fines	114
5	Réseaux plans de diffraction	116
	Corrigés	119

Partie 2 Mécanique 137

5	Lois de la mécanique newtonienne	138
1	Cadre de la mécanique newtonienne	138
2	Éléments de cinématique	138
3	Lois de la dynamique en référentiel galiléen	139
4	Approche énergétique	142
5	Mécanique newtonienne en référentiel non galiléen	143
6	Système de deux points matériels	145
	Corrigés	147
6	Mouvement à force centrale newtonienne. Dynamique terrestre	170
1	Mouvement à force centrale newtonienne. Généralités	170
2	Gravitation	171
3	Mouvements des planètes. Lois de Kepler	174
4	Satellites et sondes terrestres	175
5	Diffusion Rutherford	179
6	Effets de la force d'inertie de Coriolis terrestre	181
7	Effets de marée	183
	Corrigés	186
7	Oscillateurs mécaniques	221
1	Oscillateur libre non amorti ou oscillateur harmonique	221
2	Oscillateur libre amorti	223
3	Oscillateur forcé	225
4	Oscillateur à relaxation	226

5	Oscillateur paramétrique	227
6	Oscillateur à plusieurs degrés de liberté	228
	Corrigés	231
8	Mécanique du solide	252
1	Éléments de cinématique	252
2	Éléments cinétiques d'un solide	253
3	Contact entre deux solides	256
4	Théorèmes généraux appliqués au solide	257
	Corrigés	261
9	Description d'un fluide	278
1	Notion de particule de fluide	278
2	Champ des vitesses dans un fluide en mouvement	278
3	Conservation de la masse	279
4	Écoulements fondamentaux	280
5	Actions de contact sur une particule de fluide	281
6	Nombre de Reynolds	283
7	Écoulement autour d'un obstacle solide	284
8	La capillarité	285
	Corrigés	289
10	Statique & dynamique des fluides	313
1	Statique des fluides	313
2	Écoulements incompressibles de fluides newtoniens	315
3	Écoulements parfaits	318
4	Bilans mécaniques	322
	Corrigés	325
	Partie 3 Thermodynamique	351
11	Description microscopique des gaz	352
1	Le modèle du gaz parfait monoatomique	352
2	Le facteur de Boltzmann	354
3	Les gaz réels	356
4	Diffusion particulière	357
	Corrigés	361

12	Les principes de la thermodynamique	376
1	Généralités	376
2	Premier principe de la thermodynamique	378
3	Second principe de la thermodynamique	380
4	Cas des systèmes ouverts en régime stationnaire	383
	Corrigés	387
13	Transitions de phase d'un corps pur	407
1	Généralités	407
2	Fonctions d'état d'un corps pur sous deux phases	408
3	Application aux machines thermiques	409
	Corrigés	414
14	Thermique	427
1	Généralités	427
2	Loi de Fourier	427
3	Équation de la diffusion thermique	427
4	Cas du régime stationnaire. Résistance thermique	429
5	Rayonnement	430
	Corrigés	432
	Partie 4 Électromagnétisme	449
15	Électrostatique du vide	450
1	La charge électrique	450
2	Le champ électrostatique	450
3	Flux du champ électrostatique	451
4	Circulation du champ électrostatique	452
5	Conducteurs en équilibre électrostatique	454
6	Aspects énergétiques de l'électrostatique	456
7	Le dipôle électrostatique	458
	Corrigés	463
16	Magnétostatique du vide	492
1	Distributions de courants	492
2	Forces magnétiques	495

3	Le champ magnétostatique	497
4	Le dipôle magnétostatique	501
	Corrigés	509
17	Équations de Maxwell	544
1	Champ et potentiels électromagnétiques	544
2	Énergie électromagnétique	546
3	Approximation des régimes quasi-stationnaires	547
4	Phénomènes d'induction	549
	Corrigés	556
18	Électrocinétique	588
1	Électrocinétique en régime continu	588
2	Électrocinétique en régime transitoire	592
3	Électrocinétique en régime sinusoïdal forcé	595
	Corrigés	598
	Partie 5 Ondes	623
19	Ondes mécaniques unidimensionnelles	624
1	Généralités	624
2	Phénomènes de dispersion et d'absorption	624
3	Chaînes d'oscillateurs. Ondes longitudinales dans les solides	625
4	Ondes transversales le long d'une corde	627
5	Ondes électriques dans un câble coaxial	631
	Corrigés	634
20	Ondes acoustiques dans les fluides	654
1	Équations de propagation	654
2	Célérité des ondes acoustiques dans l'air	655
3	Aspect énergétique	656
4	Validation des hypothèses	658
5	Réflexion et transmission à une interface	659
6	Tuyaux sonores	660
7	Effet Doppler	662
	Corrigés	664

21	Ondes électromagnétiques dans le vide. Polarisation	686
1	Propagation d'une onde électromagnétique dans le vide	686
2	Rayonnement électromagnétique	688
3	Production d'une lumière polarisée	691
	Corrigés	695
22	Ondes électromagnétiques dans les milieux	717
1	Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur	717
2	Réflexion d'une onde électromagnétique sur une interface vide/conducteur parfait	719
3	Propagation guidée	721
4	Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique à l'interface entre deux milieux diélectriques	723
	Corrigés	727
	Partie 6 Physique moderne	751
23	Radioactivité et physique nucléaire	752
1	Le noyau atomique	752
2	Le modèle de la goutte liquide	753
3	La radioactivité naturelle	753
4	Production de radionucléides	755
5	Réactions de fusion	756
	Corrigés	758
24	Mécanique quantique	770
1	Le photon	770
2	La dualité onde-corpuscule	773
3	La mécanique ondulatoire de Schrödinger	775
4	Évolution d'une particule dans un potentiel stationnaire	779
	Corrigés	783
	Constantes et données astronomiques	804

Partie 1

Optique

Optique géométrique

1 Lois de l'optique géométrique

1.1 En quoi consiste l'approximation de l'optique géométrique ?

1.2 Expliciter la notion de rayon lumineux.

Sauf mention contraire, tous les milieux matériels considérés dans ce thème seront des milieux diélectriques non magnétiques, transparents, linéaires, homogènes et isotropes (milieux TLHI).

1.3 Donner la signification des qualificatifs « homogène » et « isotrope ».

1.4 Définir l'indice optique n d'un milieu TLHI.

Comment appelle-t-on le phénomène lié à la dépendance de n vis-à-vis de la fréquence de cette lumière ? Quelle loi relie généralement n à la longueur d'onde λ_0 de cette lumière dans le vide ?

1.5 Dans l'approximation de l'optique géométrique, la marche d'un rayon lumineux dans un milieu TLHI obéit à trois principes : le principe de propagation rectiligne, le principe du retour inverse, et le principe d'indépendance des rayons lumineux. Énoncer ces trois principes.

1.6 Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction d'un rayon lumineux à la traversée d'un dioptré qui sépare deux milieux TLHI, d'indices de réfraction n_1 et n_2 . Commenter les cas $n_1 < n_2$ et $n_1 > n_2$.

Les lois de Snell-Descartes peuvent être démontrées à partir du théorème de Fermat (1657).

1.7 Définir le chemin optique $\mathcal{L}_{AB} = (AB)$ le long d'une courbe (Γ) suivie par la lumière entre deux points A et B dans le milieu considéré.

Le principe de Fermat énonce que de tous les trajets possibles reliant les points A et B , celui effectivement suivi par la lumière correspond à un chemin optique stationnaire. Donner la signification du terme « stationnaire ».

Dans les cas usuels, ce chemin optique est minimal. Montrer alors que le postulat de propagation rectiligne de la lumière déduit de l'expérience est bien en accord avec le principe de Fermat.

1.8 On considère le trajet $\widehat{AIB}$ suivi par la lumière entre deux milieux : le point A est situé dans un milieu d'indice n_1 , le point B est situé dans un milieu d'indice n_2 , le point I est le point d'incidence sur le dioptré qui sépare les deux milieux. On fait subir au point I un déplacement infinitésimal $d\vec{OI} = d\vec{II'}$ sur le dioptré, où O est un point fixe quelconque.

Montrer que la différence des chemins optiques entre les trajets infiniment voisins $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AI'B}$ s'écrit : $d\mathcal{L}_{AB} = (n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) \cdot d\vec{OI}$ où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont les vecteurs unitaires orientés dans le sens de propagation de la lumière et portés par les segments $[AI]$ et $[IB]$.

Par application du principe de Fermat, établir les lois de Snell-Descartes pour la réfraction. On pourra introduire le vecteur unitaire $\vec{N}$, normal au dioptré en I et dirigé du milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 .

Application 1

Une fibre optique à saut d'indice est modélisée par un cylindre central d'axe $(O, \vec{u}_x)$ appelé cœur, de rayon R_c et d'indice $n_c = 1,515$, entouré par un second cylindre de même axe appelé gaine, d'indice $n_g = 1,495$ (figure E1.1). On considère un rayon qui arrive en O sur la face d'entrée de la fibre avec un angle d'incidence θ . Ce rayon est situé dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ contenant l'axe de révolution de la fibre, si bien que son trajet au sein de la fibre est astreint à rester dans ce plan. Le milieu extérieur est l'air, assimilé au vide d'indice $n_a = 1,000$. La lumière est monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , située dans le proche infra-rouge et supposée, sauf mention contraire, très inférieure à R_c .

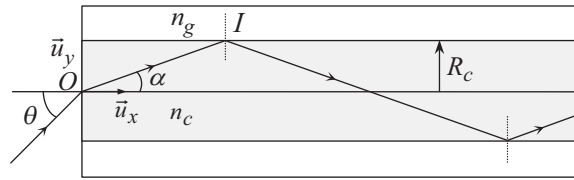


Figure E1.1 – Fibre optique à saut d'indice.

a. Montrer que le rayon est guidé dans le cœur si l'angle θ est inférieur à un angle limite θ_{lim} , appelé angle d'acceptance de la fibre, dont on donnera l'expression en fonction des indices des différents milieux considérés. Calculer θ_{lim} et la quantité $O.N. = n_a \sin(\theta_{\text{lim}})$, appelée ouverture numérique de la fibre.

b. La fibre a une longueur $L \gg R_c$. Exprimer la différence Δt de temps de parcours de l'entrée à la sortie de la fibre, entre le trajet de durée maximale et le trajet de durée minimale. On donnera le résultat en fonction de $\Delta = \frac{n_c^2 - n_g^2}{2n_c^2} \ll 1$, n_c , L et c , célérité de la lumière dans le vide. Calculer Δt pour une fibre de 10 km.

c. On injecte à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses d'une durée $\tau_e \ll \Delta t$, avec une période T , sous la forme d'un faisceau conique convergent d'axe $(O, \vec{u}_x)$ et de demi-angle au sommet θ_{lim} . À quelle condition sur T les impulsions seront-elles séparées à la sortie ? En déduire que cette condition impose que $BL < \frac{c}{n_c \Delta}$ où B est la bande passante en fréquences de

la fibre (c'est-à-dire son débit numérique en bits par seconde). Calculer la longueur maximale L_{max} de fibre permettant une transmission d'informations à un débit de 200 Mbits par seconde.

d. En fait, pour le faisceau conique considéré, la propagation guidée à l'intérieur de la fibre n'est possible que pour un nombre discret de chemins, appelés modes de propagation. Comment expliquer qualitativement l'existence de ces modes ? Pour réduire la dispersion modale d'une fibre, c'est-à-dire l'étalement temporel d'une impulsion lumineuse en sortie, et donc augmenter sa capacité de transmission, on peut limiter le nombre de modes de propagation. À la limite, on a recours à des fibres monomodes pour lesquelles la seule propagation axiale est possible. On admet que la condition d'existence d'un unique mode s'écrit : $\frac{2\pi}{\lambda_0} R_c n_c \sqrt{2\Delta} < 2,405$.

La description adoptée de la lumière jusqu'ici est-elle compatible avec cette condition ?

On peut toutefois améliorer la capacité de transmission d'une fibre multimode en modifiant son profil d'indice. On considère à cet effet une fibre à gradient d'indice dont l'indice du cœur varie continûment avec la distance à l'axe $r \leq R_c$ selon : $n^2(r) = n_c^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{R_c} \right)^p \right)$ où $p \geq 1$. Les valeurs de n_c , n_g et donc de Δ sont les mêmes que celles de la fibre à saut d'indice étudiée précédemment. Un rayon lumineux arrive en O sur la face d'entrée de la fibre avec un angle d'incidence θ . On note $i(r)$ l'angle d'incidence local du rayon lumineux à la distance r de l'axe de la fibre à l'intérieur du cœur (figure E1.2 gauche).

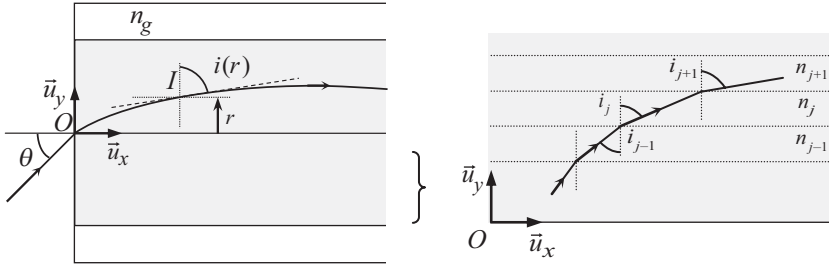


Figure E1.2 – Fibre optique à gradient d'indice.

e. Justifier que le produit $n(r) \sin i(r)$ est une constante, notée A , qu'on exprimera en fonction de n_c , n_g et de l'angle d'injection θ . On pourra pour cela considérer le cœur comme un milieu stratifié constitué de couches homogènes, planes, parallèles et d'épaisseur infiniment faible devant R_c (figure E1.2. droite). Donner la relation entre $\frac{dr}{dx}$ et $i(r)$, puis montrer que $\left(\frac{dr}{dx} \right)^2 = \frac{n^2(r)}{A^2} - 1$. En déduire alors l'équation différentielle suivante vérifiée par tout point du rayon lumineux à l'intérieur du cœur : $\frac{d^2r}{dx^2} = \frac{1}{2A^2} \frac{d(n^2(r))}{dr}$.

f. Pour quelle valeur du paramètre p la trajectoire du rayon lumineux est-elle sinusoidale, de la forme $r(x) = r_0 \cos \left(2\pi \frac{x}{\Lambda} + \varphi \right)$? Préciser les expressions de l'amplitude r_0 et de la période spatiale Λ en fonction de n_c , n_g , R_c , Δ et de l'angle d'injection θ . On conservera cette valeur de p dans la suite.

g. Quelle est la condition sur l'angle θ pour que le rayon lumineux soit effectivement confiné à l'intérieur du cœur ? En déduire la valeur de l'ouverture numérique $O.N.$ de la fibre à gradient d'indice considérée ici. Commenter.

h. On admet que la dispersion modale de la fibre de longueur $L \gg \Lambda$ s'écrit, dans le cas de l'impulsion de la question c. : $\Delta t' = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{1 - \Delta}{\sqrt{1 - 2\Delta}} - 1 \right)$. Calculer $\Delta t'$ pour une fibre de 10 km. Commenter. Expliquer physiquement pourquoi la dispersion modale est plus faible dans une fibre à gradient d'indice que dans une fibre à saut d'indice.

i. Quels intérêts la fibre optique présente-t-elle pour la transmission de l'information par rapport à un câble électrique classique ?

2 Formation des images

Sauf mention contraire, tous les systèmes optiques considérés dans la suite de ce thème seront des systèmes centrés.

2.1 Définir un système optique centré. Distinguer les trois types de systèmes optiques centrés usuellement rencontrés.

2.2 Donner la condition de stigmatisme rigoureux d'un système optique (Σ) pour un couple de points (A, A') . Traduire cette condition en termes de chemin optique. Quel unique système optique vérifie cette condition quel que soit le couple de points (A, A') ?

2.3 Donner les conditions d'aplanétisme rigoureux d'un système optique (Σ) pour un couple de points (A, A') de l'axe du système.

Application 2

Le miroir concave primaire d'un télescope a la forme d'un paraboloïde de révolution d'axe $(S, \vec{u}_x)$ et de sommet S . Dans le plan $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, la trace du miroir décrit une portion de parabole, d'équation cartésienne d'origine S $y^2 = 2px$ et de foyer $F(p/2, 0)$, où la longueur p est le paramètre de la parabole (figure E1.3). Le miroir est éclairé par un faisceau de lumière parallèle à son axe.

Montrer que tout rayon converge après réflexion sur le miroir au foyer F quelle que soit sa distance à l'axe $(S, \vec{u}_x)$. Commenter. On pourra pour cela évaluer le chemin optique $\mathcal{L} = (AIF)$ où I est le point d'incidence d'un rayon passant par un point $A(d, y)$.

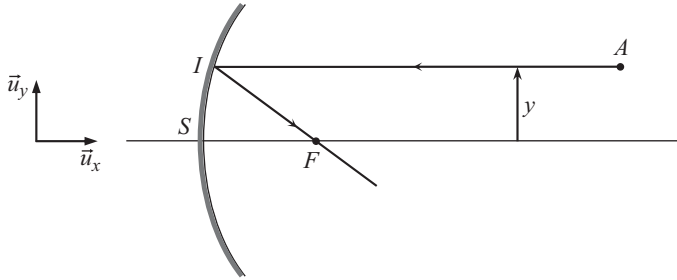


Figure E1.3 – Réflexion sur un miroir parabolique.

Soit A un point-objet de l'axe optique du système (Σ) considéré. Un rayon lumineux issu de A arbitrairement choisi est entièrement caractérisé par l'angle orienté α qu'il forme avec l'axe optique. Ce rayon émerge du système (Σ) en passant par un point-image A'_α de l'axe. On note I le point d'incidence sur la face d'entrée du système (Σ) et I' le point d'émergence sur sa face de sortie (figure E1.4). Du fait de l'invariance de révolution du système, le chemin optique $\mathcal{L}_{AA'_\alpha} = (AI \dots I'A'_\alpha)$ est nécessairement une fonction paire de α . Au voisinage de $\alpha = 0$, un développement limité au quatrième ordre en α conduit à : $\mathcal{L}_{AA'_\alpha} = \mathcal{L}_0 + a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4$ où les coefficients a_2 et a_4 dépendent de la position de A'_α pour A fixé.

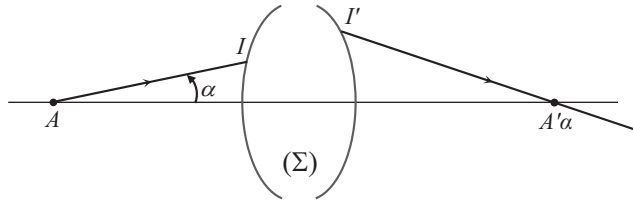


Figure E1.4 – Système optique centré.

2.4 Justifier que le système est approximativement stigmatique pour le couple de points (A, A') , au quatrième ordre près en α , où A' est la position particulière de A'_α telle que $a_2 = 0$. Comment nomme-t-on la relation $a_2 = 0$?

2.5 La limite quantitative à imposer à α dépend évidemment de la qualité de l'image attendue donc du détecteur. Comment en pratique améliorer celle-ci ? Quel en est l'inconvénient ? Quelle est la limitation à cette propriété ?

2.6 Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss qui traduisent le stigmatisme et l'aplanétisme approchés du système (Σ) pour tout couple de points (A, A') de l'axe.

Sauf mention contraire, tous les systèmes optiques considérés dans la suite seront étudiés dans le cadre des conditions de l'approximation de Gauss.

2.7 Définir un foyer objet, puis un foyer image d'un système optique (Σ) . Distinguer un foyer principal d'un foyer secondaire.

Application 3

Un dioptre sphérique est une surface sphérique, de sommet S , de centre C , de rayon algébrique $\bar{R} = \overline{SC}$, séparant deux milieux d'indices de réfraction n et n' (figure E1.5). On considère un rayon issu d'un point-objet A situé sur l'axe optique qui atteint le dioptre au point d'incidence I . Le support du rayon émergent du dioptre en I coupe l'axe optique en un point A' . On note ω l'angle que forme la normale (CI) au dioptre en I avec l'axe optique.

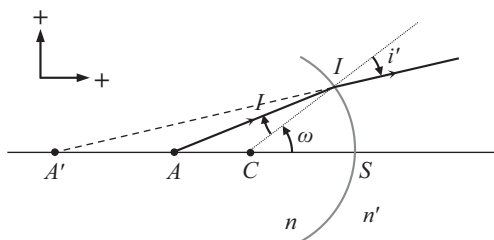


Figure E1.5 – Dioptre sphérique.

a. Établir la relation suivante, appelée invariant fondamental du dioptre sphérique :

$$n \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n' \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}.$$

b. Justifier qu'il y a stigmatisme approché pour le couple de points (A, A') dans les conditions de Gauss. En déduire les relations de conjugaison suivantes liant la position du point-image A' à celle du point-objet A de l'axe :

$$\frac{n'}{CA} - \frac{n}{CA'} = \frac{n' - n}{CS} \quad \frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n' - n}{SC}$$

c. Utiliser l'une des relations précédentes pour déterminer la position du foyer principal image F' d'une lentille biconvexe d'indice n plongée dans l'air.

3 Miroirs sphériques

3.1 Définir un miroir sphérique. Distinguer un miroir concave d'un miroir convexe. Préciser lequel est convergent et lequel est divergent.

3.2 On considère un miroir sphérique de sommet S , de centre C et de rayon algébrique $\bar{R} = \overline{SC}$. En reprenant la démarche de l'application 3, montrer que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = -\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$ dans les conditions de l'approximation de Gauss. En déduire les relations de conjugaison suivantes liant la position du point-image A' à celle du point-objet A de l'axe :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

3.3 Justifier l'existence d'un foyer principal unique $F = F'$ tel que $\overline{SF} = \overline{SF'} = \overline{SC} / 2$.

3.4 Établir à l'aide d'une construction graphique les relations avec origine au centre et au sommet du grandissement transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

3.5 Préciser la position de l'image A' d'un point-objet A quelconque dans le cas particulier du miroir plan.

Application 4

a. Un rayon atteint un miroir plan en un point I sous un angle d'incidence i (figure E1.6). Quel sera le déplacement angulaire β subi par le rayon réfléchi après une rotation du miroir d'un petit angle α autour d'un axe perpendiculaire en I au plan d'incidence ?

b. Pour mesurer de façon précise la déviation angulaire d'un équipage mobile (tel qu'un système à fil de torsion), on fixe le dispositif précédent sur l'équipage mobile en repérant la tache image du rayon réfléchi sur une règle graduée, perpendiculaire à la direction de ce rayon et située à une distance $D = 2,0$ m du miroir (méthode de Poggendorff). Le plus petit déplacement mesurable sur la règle est $d = 1,0$ mm. Quel est le plus petit déplacement angulaire mesurable par ce dispositif ? On donnera le résultat en minutes d'arc.

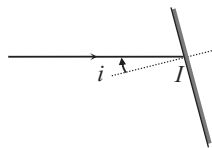


Figure E1.6 – Réflexion sur un miroir plan.

4 Lentilles minces sphériques

4.1 Définir une lentille sphérique. Distinguer les six sortes de lentilles parmi les lentilles à bords minces et celles à bords épais. Préciser leur caractère convergent ou divergent. Le justifier en assimilant localement la lentille à un prisme.

On considère une lentille mince d'indice n , plongée dans l'air, comme l'association de deux dioptries sphériques de sommets S_1 et S_2 pratiquement confondus avec le centre optique O et de rayons algébriques respectifs $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ (figure E1.7). On note $e = S_1S_2$ l'épaisseur au centre de la lentille.

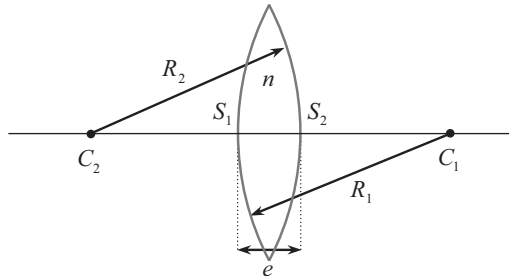


Figure E1.7 – Lentille plongée dans l'air.

4.2 Rappeler les conditions pour qu'une lentille puisse être considérée comme mince, conditions supposées respectées dans toute la suite.

4.3 Utiliser les résultats de l'application 3 pour établir la relation de conjugaison des lentilles avec origine au centre. Comment nomme-t-on cette relation ?

En déduire que la vergence $V = 1/f'$ de la lentille, de distance focale image f' , s'écrit :

$$V = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

4.4 Établir à l'aide d'une construction graphique la relation avec origine au centre du grandissement transversal γ .

4.5 Les mêmes relations, si on utilise comme origines les foyers principaux objet F et image F' de la lentille, sont appelées formules de Newton. Montrer qu'elles s'écrivent :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

On fixe à une distance D d'un objet AB un écran (E). On souhaite former une image nette $A'B'$ de l'objet sur l'écran à l'aide d'une lentille mince convergente (L), de centre optique O et de distance focale image f' . On note p la distance OA et p' la distance OA' .

4.6 Exprimer la distance D et le grandissement transversal γ en fonction de la distance p . Représenter graphiquement $D(p)$ et $\gamma(p)$ dans l'intervalle physiquement acceptable.

4.7 Justifier qu'il y aura au moins une position possible de la lentille à condition que $f' \leq D/4$.

Préciser les positions possibles de la lentille si cette condition est respectée. Caractériser les images correspondantes. Quel est l'intervalle des distances à la lentille de l'objet pour une projection avec un grandissement (en valeur absolue) supérieur à 1 ?

Application 5

On appelle doublet un ensemble de deux lentilles minces (L_1) et (L_2) de même axe optique, de centres optiques respectifs O_1 et O_2 , de distances focales images respectives f'_1 et f'_2 . On caractérise un doublet par un triplet de nombres entiers (p, q, r) tels que $\frac{f'_1}{p} = \frac{e}{q} = \frac{f'_2}{r} = a > 0$ avec $e = O_1O_2 > 0$.

a. Déterminer la position du foyer principal image F' du doublet par rapport à celui F'_2 de (L_2), puis la position du foyer principal objet F du doublet par rapport à celui F_1 de (L_1). On donnera les résultats en fonction de a et des nombres (p, q, r) .

b. On considère un objet AB situé à l'infini et vu sous un petit angle θ (conditions de l'approximation de Gauss). Exprimer la taille $A'B'$ de l'image de l'objet donnée par le doublet. Exprimer la distance focale image f' de la lentille (L) qui donnerait de cet objet une image de même taille que celle donnée par le doublet : f' est la distance focale image du doublet. En déduire la formule de Gullstrand : $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2$ où V_1 et V_2 sont les vergences respectivement du doublet de (L_1) et de (L_2).

c. Dans le cas où les deux lentilles sont accolées ($e = 0$), on obtient la formule des opticiens : $V = V_1 + V_2$. Retrouver cette relation de façon directe.

d. On considère l'oculaire de Huygens (4,3,2) de distance focale $f' = 40$ mm. Déterminer les positions de ses foyers principaux objet F et image F' . Cet oculaire est dit convergent et négatif. Expliquer ces dénominations.

5 Focométrie

MÉTHODE D'AUTOCOLLIMATION

Un miroir plan (M) est accolé à une lentille mince convergente (L), de centre optique O et de distance focale image inconnue f' . Ce système {lentille ; miroir} donne d'un point-objet A situé sur l'axe optique une image A' . On note p la distance OA .

5.1 Exprimer la distance algébrique $\overline{AA'}$ en fonction de p et f' .

5.2 On déplace le système {lentille ; miroir} de façon à former l'image $A'B'$ d'un objet AB dans le plan de front de cet objet. Expliquer comment on peut alors déterminer la distance focale image f' de la lentille (L). Illustrer par une construction graphique. Le miroir doit-il être nécessairement accolé à la lentille ?

MÉTHODES DE BESSEL ET SILBERMANN

On considère une lentille mince convergente (L), de centre optique O et de distance focale image inconnue f' , donnant d'un objet AB une image $A'B'$ nette sur un écran (E). On pourra dans les deux questions qui suivent utiliser directement les résultats établis dans la question 4.7.

5.3 Dans la méthode de Bessel, on impose une distance D entre l'objet et l'écran fixés de sorte qu'il existe deux positions de la lentille, distantes de d , donnant une image nette sur l'écran. Expliquer comment on peut alors déterminer la distance focale image f' de la lentille (L).

5.4 Dans la méthode de Silbermann, l'objet étant fixé, on déplace la lentille et l'écran jusqu'à obtenir une image nette de même taille que l'objet sur l'écran. Expliquer comment on peut alors déterminer la distance focale image f' de la lentille (L).

MÉTHODE DE BADAL

Une source ponctuelle A est placée au foyer principal objet d'une lentille (L_0). On observe son image A' sur un écran (E) à l'aide d'une lentille convergente (L_1) de même axe que la lentille (L_0), de centre optique O_1 et de distance focale image f'_1 .

On interpose alors dans le plan focal objet de (L_1) une lentille (L_2) de même axe que la lentille (L_0), de centre optique O_2 et de distance focale image f'_2 inconnue. Pour retrouver une image nette, on constate qu'il faut éloigner l'écran d'une distance d .

5.5 Déterminer la nature et la distance focale image f'_2 de la lentille (L_2).

6 Aberrations chromatiques des lentilles minces

6.1 Les verres courants sont soit de type *crown*, soit de type *flint*. En analysant les courbes suivantes (figure E1.8), distinguer ces deux types de verre selon leur pouvoir réfringent et leur pouvoir dispersif. Dans le domaine visible, commenter l'évolution de l'indice n de chaque verre avec la longueur d'onde λ_0 de la lumière dans le vide.

Pour pouvoir comparer le pouvoir dispersif de deux verres différents, on utilise trois radiations de référence :

- la radiation rouge C de l'hydrogène, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0,C} = 656,3 \text{ nm}$;
- la radiation bleue F de l'hydrogène, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0,F} = 486,1 \text{ nm}$;
- la radiation jaune D du sodium, de longueur d'onde moyenne dans le vide $\lambda_{0,D} = 589,3 \text{ nm}$.

En notant n_C , n_F et n_D les indices du verre pour les radiations respectivement C, F et D, on définit la constringence ν du verre ou nombre d'Abbe, égal à l'inverse de son pouvoir dispersif K , par :

$$\nu = \frac{1}{K} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

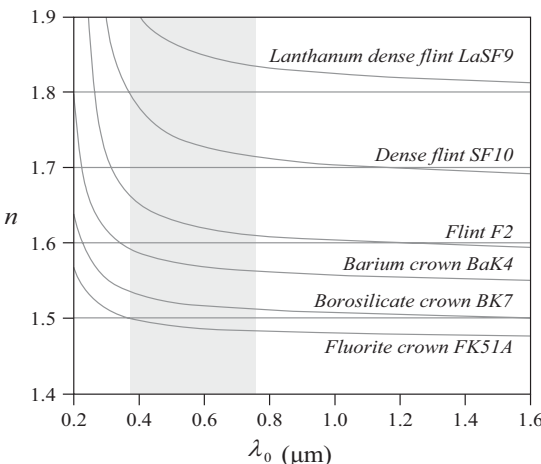


Figure E1.8 – Indice de différents verres selon la longueur d'onde.

On considère une lentille mince convergente (L) et un objet AB éclairé en lumière bichromatique rouge et bleue (radiations C et F). Un diaphragme (D) accolé à la lentille limite l'ouverture du faisceau incident (figure E1.9). On rappelle que la vergence de la lentille dépend de l'indice du verre qui la constitue selon : $V = G(n - 1)$ où G est un facteur ne dépendant que de la géométrie de la lentille (voir question 4.3).

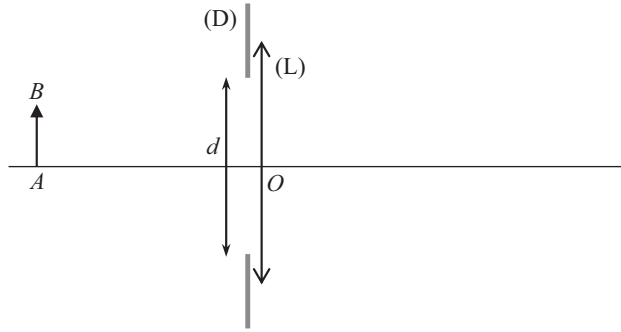


Figure E1.9 – Images d'un objet éclairé en lumière bichromatique.

6.2 Expliquer pourquoi la lentille va former deux images de l'objet AB , une image $A'_C B'_C$ rouge et une image $A'_F B'_F$ bleue. On supposera par la suite ces deux images réelles.

Compléter la figure E1.9 en indiquant qualitativement les positions relatives des foyers principaux image F'_C et F'_F pour les radiations respectives C et F, puis les images $A'_C B'_C$ et $A'_F B'_F$.

On dit qu'il y a dans ce cas chromatisme de position et chromatisme de grandeur. Expliquer pourquoi.

La lentille est désormais éclairée par un faisceau de lumière bichromatique rouge et bleue (radiations C et F) parallèle à son axe optique (le point-objet A est donc rejeté à l'infini).

6.3 Reprendre la figure E1.9 et tracer le cheminement des faisceaux rouge et bleu qui émergent de la lentille.

6.4 On appelle aberration chromatique principale longitudinale d'une lentille la distance δ qui sépare ses foyers F'_C et F'_F . Exprimer δ en fonction de la constringence ν du verre de la lentille et de la distance focale image moyenne f'_D , assimilée à celle calculée pour la radiation D. Commenter.

Calculer δ pour une lentille plan convexe de rayon $R = 15,0$ cm, en verre de type *crown* (constringence $\nu = 58,8$ et indice moyen $n_D = 1,515$), puis en verre de type *flint* (constringence $\nu = 37,0$ et indice moyen $n_D = 1,660$).

6.5 On appelle aberration chromatique principale transversale d'une lentille le rayon ρ minimal du faisceau émergent intercepté par un écran normal à l'axe optique. La tache circulaire correspondante définit le cercle de moindre aberration chromatique. Exprimer ρ en fonction de la constringence ν du verre de la lentille et du diamètre d du diaphragme qui contrôle l'ouverture du faisceau incident.

Calculer ρ pour les deux types de verre précédents et un diamètre d'ouverture $d = 4,0$ cm.

Application 6

On considère à nouveau un oculaire constitué de deux lentilles minces de distances focales images moyennes $f'_{1,D}$ et $f'_{2,D}$ (voir application 5). Dans les conditions usuelles d'observation, on montre que l'œil voit l'image d'un objet AB éclairé en lumière monochromatique à travers l'oculaire sous un angle $\alpha' \approx \frac{AB}{|f|}$ où f' est la distance focale image de l'oculaire.

a. L'objet AB est éclairé en lumière blanche. Pour que l'œil ait l'impression de voir une unique image blanche à travers l'oculaire, il suffit qu'il voit toutes les images colorées correspondant aux différentes radiations composant la lumière sous le même angle α' . On dit que l'oculaire réalise alors un achromatisme apparent. Quelle condition doit vérifier la vergence $1/f'$ de l'oculaire pour que tel soit le cas ?

b. Montrer que cette condition impose que $f'_{1,D} + f'_{2,D} = 2e$ avec e la distance entre les deux lentilles supposées taillées dans le même verre dans cette question. L'oculaire de Huygens (4,3,2) réalise-t-il un achromatisme apparent ?

c. Les deux lentilles sont désormais accolées ($e = 0$). On note $1/f'_i = G_i(n_i - 1)$ la vergence de la lentille i pour une radiation monochromatique donnée. Montrer que le système réalise un achromatisme pour deux radiations monochromatiques de longueurs d'onde dans le vide λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ si $G_1\Delta n_1 + G_2\Delta n_2 = 0$ où Δn_i est la variation de l'indice du verre de la lentille i pour la variation $\Delta\lambda_0$ de la longueur d'onde de la lumière. En considérant les deux radiations C et

F, montrer que la condition précédente s'écrit encore : $\frac{f'_{2,D}}{f'_{1,D}} = -\frac{v_1}{v_2}$ où v_i est la constringence de la lentille i .

d. Peut-on réaliser un achromat mince en accolant deux lentilles taillées dans un même verre ? Peut-on réaliser un achromat mince en accolant deux lentilles de même nature ? Expliquer finalement comment réaliser un achromat mince convergent.

6.6 Outre les aberrations chromatiques qui viennent d'être étudiées, les images formées par une lentille mince sont également sujettes à des aberrations géométriques. Distinguer l'origine des deux types d'aberrations géométriques rencontrées : les aberrations d'ouverture et les aberrations de champ.



1 Lois de l'optique géométrique

1.1 L'approximation de l'optique géométrique se limite à décrire l'interaction de la lumière avec des systèmes matériels dont la taille caractéristique et la distance caractéristique sur laquelle varient ses propriétés sont très grandes devant la distance caractéristique sur laquelle varie l'amplitude des ondes lumineuses, typiquement leur longueur d'onde λ . Dans ce cadre, on traite la lumière comme un ensemble de courbes indépendantes, appelées rayons lumineux, le long desquelles se propage l'énergie lumineuse.

1.2 Les rayons lumineux s'identifient aux lignes de champ du vecteur de Poynting dont la norme, moyennée sur une durée caractéristique de l'onde, est égale à la puissance lumineuse surfacique transportée par l'onde. Dans les milieux usuels rencontrés en optique géométrique (milieux diélectriques non magnétiques, transparents, linéaires, homogènes et isotropes), le vecteur d'onde, localement normal aux différentes surfaces d'onde, est colinéaire au vecteur de Poynting. Ainsi, les rayons lumineux sont eux-mêmes localement normaux aux différentes surfaces d'onde.

1.3 Un milieu homogène a les mêmes propriétés en tout point de l'espace. Un milieu isotrope a les mêmes propriétés quelle que soit la direction considérée de l'espace.

1.4 La durée du trajet de la lumière d'un point A à un point B du milieu dépend de la célérité $v(P)$ de la lumière en chaque point P du trajet. Si on note c la célérité de la lumière dans le vide, on a $v = \frac{c}{n}$ où $n = n(P)$ est l'indice optique du milieu traversé en P . Dans le domaine du visible, dans un milieu TLHI, l'indice optique est une constante supérieure ou égale à 1 (ce qui implique que $v \leq c$). L'indice optique d'un milieu matériel dépend de la fréquence f ou, ce qui revient au même, de la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ de la lumière. La dépendance de l'indice avec la fréquence constitue le phénomène de dispersion, présent dans tous les milieux matériels sauf le vide. En général, on a $\frac{dn}{d\lambda_0} < 0$. Dans le domaine optique, on adopte souvent le modèle de Cauchy : $n = a + \frac{b}{\lambda_0^2}$ où a et b sont deux constantes positives.

1.5 Dans l'approximation de l'optique géométrique, la marche d'un rayon lumineux dans un milieu TLHI obéit à trois principes :

- le principe de propagation rectiligne : la trajectoire de la lumière entre deux points A et B du milieu qu'elle atteint est rectiligne ;
- le principe du retour inverse de la lumière : le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B du milieu est indépendant du sens de parcours de la lumière ;
- le principe d'indépendance des rayons lumineux : les rayons lumineux sont indépendants les uns des autres.

1.6 Lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction :

Première loi : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence, c'est-à-dire le plan défini par le rayon incident et la normale (N) au dioptré au point d'incidence I (figure C1.1).

Seconde loi : les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 vérifient la relation : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

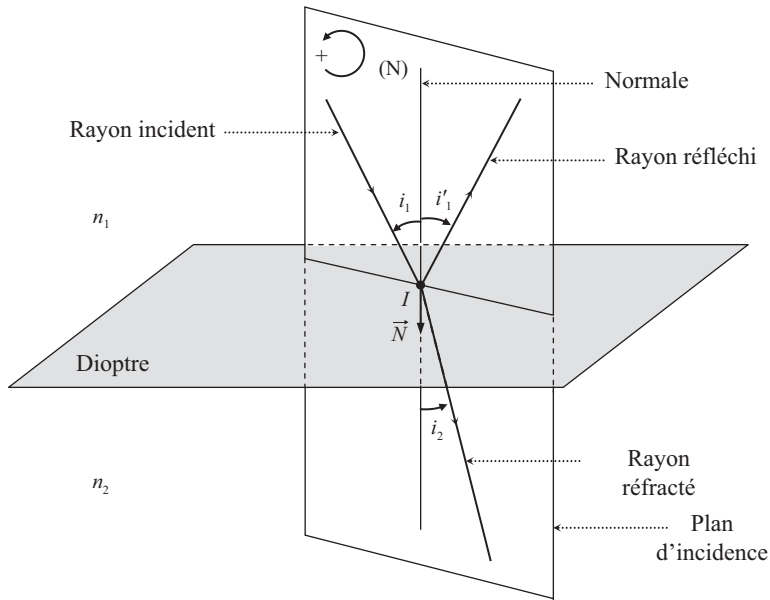


Figure C1.1 – Réflexion et réfraction d'un rayon incident sur un dioptre.

- Cas où le milieu (2) est plus réfringent que le milieu (1) : $n_2 > n_1$

Puisque la fonction sinus est une fonction croissante entre 0 et $\pi/2$, on déduit de la relation

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \text{ que } i_2 \leq i_1 : \text{le rayon réfracté existe toujours et se rapproche donc de la normale.}$$

Lorsque $i_1 = \pi / 2$, l'angle i_2 atteint sa valeur maximale $i_{2,max}$ telle que $\sin i_{2,max} = \frac{n_1}{n_2}$. On le qualifie d'angle limite de réfraction.

- Cas où le milieu (2) est moins réfringent que le milieu (1) : $n_2 < n_1$

Dans ce cas, $i_2 \geq i_1$ et le rayon réfracté s'écarte donc de la normale. La valeur maximale de i_2 étant $\pi/2$, l'angle i_1 ne peut dépasser une valeur limite $i_{1,lim}$ telle que $\sin i_{1,lim} = \frac{n_2}{n_1}$.

On le qualifie d'angle limite d'incidence ou d'angle de réflexion totale. Ainsi, si $i_1 > i_{1,lim}$, il ne peut y avoir de rayon réfracté : c'est le phénomène de réflexion totale.

1.7 Le chemin optique $\mathcal{L}_{AB} = (AB)$ le long d'une courbe (Γ) suivie par la lumière entre deux points A et B dans le milieu considéré est la distance parcourue par la lumière dans le vide, pendant le même temps $t_B - t_A$ qu'elle mettrait à parcourir le trajet de A à B dans le milieu considéré.

En introduisant l'élément de longueur curviligne $ds_P = v(P)dt$ depuis un point P de la courbe (Γ) suivie par la lumière (et orientée dans le sens de son parcours), on déduit de la définition précédente que :

$$\mathcal{L}_{AB} = (AB) = \int_{t_A}^{t_B} c \, dt = \int_A^B n(P) \, ds_P \quad (1.1)$$

Considérons un trajet fictif possible de la lumière reliant les points A et B le long d'une courbe (Γ') infiniment voisine de la courbe (Γ) . Pour passer de (Γ) à (Γ') , il a fallu « déformer » la courbe (Γ) en imposant un déplacement $d\overline{OP}$ à tout point P courant de (Γ) , où O est un point fixe quelconque choisi comme origine. On dit que le chemin optique pour le trajet effectivement suivi par la lumière entre A et B est stationnaire si la différence $|\mathcal{L}_{AB}(\Gamma') - \mathcal{L}_{AB}(\Gamma)|$ est au moins un infiniment petit du second ordre, la borne supérieure ε de $\|\overline{OP}\|$ étant prise comme infiniment petit du premier ordre. En pratique, on pourra donc écrire que $d\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_{AB}(\Gamma') - \mathcal{L}_{AB}(\Gamma) = 0$ à des termes au minimum d'ordre 2 près.

L'indice optique d'un milieu TLHI est constant, donc on peut écrire que $\mathcal{L}_{AB} = (AB) = n \int_A^B ds_P = n\widehat{AB}$.

Ce chemin optique sera donc minimal pour le chemin géométrique le plus court, c'est-à-dire la ligne droite. On retrouve bien le principe de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu TLHI.

1.8 Comme tous les milieux considérés sont TLHI, le chemin optique pour le trajet $\widehat{AIB}$ suivi par la lumière s'écrit :

$$\mathcal{L}_{AB} = (AIB) = n_1 AI + n_2 IB = n_1 \vec{u}_1 \cdot \overline{AI} + n_2 \vec{u}_2 \cdot \overline{IB}$$

Pour le trajet fictif $\widehat{AI'B}$ possible de la lumière reliant les points A et B et infiniment voisin du trajet $\widehat{AIB}$, il peut s'écrire sous la forme $\mathcal{L}'_{AB} = (AI'B) = \mathcal{L}_{AB} + d\mathcal{L}_{AB}$ où :

$$d\mathcal{L}_{AB} = n_1 d\vec{u}_1 \cdot \overline{AI} + n_1 \vec{u}_1 \cdot (d\overline{OI} - d\overline{OA}) + n_2 d\vec{u}_2 \cdot \overline{IB} + n_2 \vec{u}_2 \cdot (d\overline{OB} - d\overline{OI})$$

Les points A et B sont fixes, donc $d\overline{OA} = d\overline{OB} = \vec{0}$.

Par ailleurs, comme $\vec{u}_i^2 = 1$ (vecteur unitaire), on en déduit par différentiation que $\vec{u}_i \cdot d\vec{u}_i = 0$ et donc que $n_1 d\vec{u}_1 \cdot \overline{AI} + n_2 d\vec{u}_2 \cdot \overline{IB} = n_1 d\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 AI + n_2 d\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 IB = 0$.

La variation du chemin optique s'écrit finalement :

$$d\mathcal{L}_{AB} = n_1 \vec{u}_1 \cdot d\overline{OI} + n_2 \vec{u}_2 \cdot (-d\overline{OI}) = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\overline{OI}$$

Ici, la quantité ε n'est autre que $\|\overline{OI}\|$ considéré comme infiniment petit du premier ordre. Le principe de Fermat implique que $d\mathcal{L}_{AB} = 0$ à des termes du second ordre près. Cette condition n'est possible, pour tout déplacement infinitésimal arbitraire du point I sur le dioptré, que si $n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2$ est colinéaire à $\vec{N}$, vecteur unitaire porté par la normale au dioptré en I et dirigé ici arbitrairement du milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 (figure C1.1). On peut donc écrire que :

$$n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = k \vec{N} \quad (1.2)$$

où k est une constante.

On déduit tout d'abord de la relation (1.2) que le rayon incident (porté par $\vec{u}_1$), le rayon réfracté (porté par $\vec{u}_2$) et la normale au dioptré au point d'incidence I (portée par $\vec{N}$) sont dans le même plan. On retrouve ainsi la première loi de Snell-Descartes.

La relation (1.2) peut aussi s'écrire $n_1(-\vec{N}) \wedge (-\vec{u}_1) = n_2 \vec{N} \wedge \vec{u}_2$, soit encore : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ où $i_1 = (-\vec{N}, -\vec{u}_1)$ et $i_2 = (\vec{N}, \vec{u}_2)$ sont les angles orientés respectivement d'incidence et de réfraction. On retrouve ainsi la seconde loi de Snell-Descartes pour la réfraction.

Application 1

a. On note i l'angle d'incidence en I à l'interface entre le cœur et la gaine. Le rayon sera guidé dans le cœur à condition que $i > i_{\text{lim}}$ où $\sin i_{\text{lim}} = \frac{n_g}{n_c}$ (phénomène de réflexion totale). Comme $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$, la condition précédente impose que $\alpha < \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$, soit : $\sin \alpha < \cos i_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \sin^2 i_{\text{lim}}} = \sqrt{1 - n_g^2 / n_c^2}$. Sachant que $n_a \sin \theta = n_c \sin \alpha$, on en déduit finalement que $\theta < \theta_{\text{lim}}$ avec $\sin \theta_{\text{lim}} = \frac{1}{n_a} \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

Pour la fibre à saut d'indice considérée, l'angle d'incidence limite sur sa face d'entrée est égal à $14,20^\circ$ et son ouverture numérique O.N. = $\sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ à 0,2454.

b. Tout rayon se propage dans le cœur à la célérité $v = c / n_c$.

– Le trajet de durée minimale correspond à une incidence $\theta = 0$ sur la face d'entrée de la fibre. Cette durée est : $t_{\text{min}} = t(\theta = 0) = \frac{L}{v}$.

– Le trajet de durée maximale correspond à une incidence $\theta = \theta_{\text{lim}}$ sur la face d'entrée de la fibre. Pour un trajet de type OI, le rayon parcourt une distance égale à $\frac{R_c}{\sin \alpha_{\text{lim}}}$, correspondant à une avancée OI' le long de l'axe égale à $\frac{R_c}{\tan \alpha_{\text{lim}}}$ où I' est le projeté orthogonal de I sur l'axe de la fibre. Sachant que $L \gg R_c$, le rayon effectue $N = \frac{L}{R_c / \tan \alpha_{\text{lim}}}$

trajets de ce type et parcourt donc la distance totale $N \frac{R_c}{\sin \alpha_{\text{lim}}}$ en une durée : $t_{\text{max}} = t(\theta = \theta_{\text{lim}}) = \frac{NR_c / \sin \alpha_{\text{lim}}}{v} = \frac{L / \cos \alpha_{\text{lim}}}{v} = \frac{L / \sin i_{\text{lim}}}{v}$.

La différence de temps de parcours entre ces deux trajets est donc :

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}} \approx \frac{L}{v} \left(\frac{1}{\sin i_{\text{lim}}} - 1 \right) = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$$

En introduisant $\Delta = \frac{n_c^2 - n_g^2}{2n_c^2} \ll 1$, on obtient au premier ordre en Δ : $\frac{n_c}{n_g} = (1 - 2\Delta)^{-1/2} \approx 1 + \Delta$. On en déduit finalement que : $\Delta t \approx \frac{n_c L}{c} \Delta$.

Pour une fibre de 10 km, on trouve une différence de temps de parcours de 0,66 μs .

c. Il n'y aura pas de recouvrement entre deux impulsions consécutives si la largeur temporelle τ_s en sortie de chaque impulsion est inférieure à la durée T qui les sépare.

Sachant que $\tau_s = \tau_e + \Delta t \approx \Delta t$ puisque $\tau_e \ll \Delta t$, cette condition s'écrit $\Delta t < T$, soit encore $BL < \frac{c}{n_c \Delta}$ où $B = 1 / T$ est la bande passante en fréquences de la fibre, c'est-à-dire son débit numérique en bits par seconde.

Pour assurer une transmission d'informations à un débit de 200 Mbits par seconde, la longueur maximale de fibre possible, soit $L_{\text{max}} = \frac{c}{n_c B \Delta}$, est égale à 75 m. Ce type de fibre ne permet donc pas d'assurer des transmissions sur de longues distances.

d. Pour comprendre l'existence d'un nombre discret de chemins possibles pour la lumière à l'intérieur du cœur, il est nécessaire de revenir à une description ondulatoire de la lumière. La fibre optique agit en fait comme un guide d'onde : seuls les champs satisfaisant les conditions aux limites à l'interface entre le cœur et la gaine pourront être guidés. De façon générale, plus on cherchera à confiner l'onde, plus le nombre de modes de propagation se réduira (voir thème 22).

Pour la fibre à saut d'indice considérée, la condition d'existence d'un unique mode impose que $R_c < 1,6 \lambda_0$. Cette inégalité exclut alors toute description géométrique de la lumière. On notera qu'une fibre monomode possède un rayon de cœur de l'ordre du micromètre pour une lumière qui s'y propage dans le proche infrarouge. Tirer une fibre optique sur plusieurs centaines de kilomètres en garantissant un rayon de cœur de cet ordre est un véritable exploit technologique !

e. On modélise dans un premier temps le cœur de la fibre par un milieu stratifié, constitué de couches planes, parallèles, d'épaisseur infiniment faible devant R_c . Chaque couche peut dans ces conditions être considérée comme homogène.

À l'interface entre les couches d'indices n_{j-1} et n_j , on a : $n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j$. L'angle d'incidence à l'interface entre les couches d'indices n_j et n_{j+1} étant i_j , on a aussi : $n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}$. Ainsi, de proche en proche, on peut finalement écrire que $n_j \sin i_j = n_k \sin i_k$ pour tout couple d'entiers ($j, k \neq i$).

Dans la mesure où l'épaisseur de chaque couche a une épaisseur infiniment faible devant le rayon du cœur, il est licite de se placer dans l'approximation des milieux continus et d'associer à la distance r de l'axe un indice $n(r)$ et un angle d'incidence local $i(r)$. Le raisonnement précédent permet d'affirmer que la quantité $n(r) \sin i(r)$ est constante en tout point de la trajectoire effectivement suivie par la lumière à l'intérieur du cœur. La constante A est fixée par les conditions d'entrée de la lumière dans la fibre : $A = n(r=0) \sin i(r=0) = n_c \cos \alpha(r=0)$. Sachant que $n_a \sin \theta = n_c \sin \alpha(r=0)$ sur la face d'entrée de la fibre, on en déduit que

$$n(r) \sin i(r) = A \text{ où } A = \sqrt{n_c^2 - n_a^2 \sin^2 \theta}.$$

Localement, on a $\frac{dr}{dx} = \tan \alpha(r) = \cot i(r)$ où $\alpha(r)$ est l'angle que forme la tangente au rayon lumineux avec l'axe $(O, \vec{u}_x)$ de la fibre à la distance r de cet axe.

En élevant au carré l'égalité précédente et puisque $\sin i(r) = A / n(r)$, on obtient :

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)^2 = \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i} = \frac{1 - \sin^2 i}{\sin^2 i} = \frac{n^2}{A^2} - 1$$

On dérive enfin par rapport à x la relation précédente : $2 \frac{dr}{dx} \frac{d^2r}{dx^2} = \frac{1}{A^2} \frac{d(n^2)}{dx} = \frac{1}{A^2} \frac{d(n^2)}{dr} \frac{dr}{dx}$. Ceci conduit après simplification à l'équation différentielle vérifiée par tout point du rayon lumineux à l'intérieur du cœur :

$$\frac{d^2r}{dx^2} = \frac{1}{2A^2} \frac{d(n^2)}{dr}$$

f. Avec le profil d'indice considéré, on a : $\frac{d(n^2)}{dr} = -\frac{2pn_c^2\Delta}{R_c^p}r^{p-1}$. En réinjectant dans l'équation différentielle, on obtient : $\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{pn_c^2\Delta}{A^2R_c^p}r^{p-1} = 0$. La solution de cette équation est sinusoidale si $p = 2$. La période spatiale des oscillations de $r(x)$ est :

$$\Lambda = 2\pi\sqrt{\frac{A^2R_c^p}{pn_c^2\Delta}} = \frac{2\pi\sqrt{n_c^2 - n_a^2\sin^2\theta}}{n_c\sqrt{2\Delta}}R_c.$$

On détermine l'amplitude des oscillations à partir des conditions d'entrée de la lumière dans la fibre :

$$r(x=0) = r_0 \cos\varphi = 0 \quad \frac{dr}{dx}(x=0) = -\frac{2\pi}{\Lambda}r_0 \sin\varphi = \tan\alpha(r=0)$$

Avec $\tan\alpha(r=0) = \frac{\sin\alpha(r=0)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(r=0)}} = \frac{n_a \sin\theta}{\sqrt{n_c^2 - n_a^2 \sin^2\theta}} > 0$, on en déduit que $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

convient et donc que $r_0 = \frac{\Lambda}{2\pi} \tan\alpha(r=0) = \frac{n_a \sin\theta}{n_c \sqrt{2\Delta}} R_c$.

g. Le rayon restera confiné dans le cœur de la fibre si $r_0 \leq R_c$, soit pour $\sin\theta \leq \frac{n_c\sqrt{2\Delta}}{n_a} = \frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_a}$. L'ouverture numérique de cette fibre est donc : $O.N. = n_a \sin\theta_{\text{lim}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$. On retrouve en fait la même ouverture numérique que celle d'une fibre à saut d'indice.

h. Pour la fibre considérée, la dispersion modale $\Delta t'$ est égale à 4,5 ns. Elle est près de 150 fois plus faible que celle d'une fibre à saut d'indice de même longueur. La diminution de l'indice du cœur avec la distance à l'axe a permis d'augmenter de façon conséquente la capacité de transmission de la fibre. En effet, la lumière des modes les plus élevés ($\theta \approx \theta_{\text{lim}}$) a une trajectoire sinusoidale qui passe à proximité de la gaine de la fibre, là où l'indice du cœur est le plus faible, si bien que ce trajet plus long est compensé par une vitesse plus élevée. Inversement, la lumière des modes les plus faibles ($\theta \approx 0$) a une trajectoire quasi-rectiligne qui passe à proximité de l'axe de la fibre, là où l'indice du cœur est le plus élevé, si bien que ce trajet plus court est compensé par une vitesse plus faible.

Notons que pour établir l'expression donnée de $\Delta t'$, il faut calculer la durée de propagation de la

lumière selon une trajectoire sinusoidale : $t = \int_0^L \frac{n(x)ds}{c}$ où $ds = \frac{dx}{\cos\alpha(x)} = \frac{dx}{\sin i(x)} = \frac{n(x)dx}{A}$

est un élément d'abscisse curviligne de la trajectoire de la lumière (comptée positivement dans le

sens de propagation). On obtient ainsi : $t = \int_0^L \frac{n^2(x)dx}{Ac} = \int_0^L \frac{n_c^2}{Ac} \left(1 - 2\Delta \frac{r_0^2}{R_c^2} \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{\Lambda} + \varphi \right) \right) dx$.

Puisque $L \gg \Lambda$, on a $\int_0^L \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{\Lambda} + \varphi \right) dx = \frac{L}{2}$ et donc $t = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{1 - \frac{n_a^2}{2n_c^2} \sin^2\theta}{\sqrt{1 - \frac{n_a^2}{n_c^2} \sin^2\theta}} \right)$. Cette

durée est minimale pour $\theta = 0$, soit $t_{\min} = \frac{n_c L}{c}$, et maximale pour $\theta = \theta_{\lim}$, soit

$$t_{\max} = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{1 - \Delta}{\sqrt{1 - 2\Delta}} \right) \text{ puisque } \sin \theta_{\lim} = \frac{n_c \sqrt{2\Delta}}{n_a}.$$

i. Les intérêts majeurs de la transmission d'informations par fibre optique comparativement à celle par câbles électriques sont la rapidité de cette transmission, l'insensibilité aux perturbations électromagnétiques, les bandes passantes très élevées et la faible atténuation de la lumière par absorption.

2 Formation des images

2.1 On appelle système optique (Σ) tout élément capable de modifier la propagation des rayons issus d'un point objet. Si le système admet un axe de symétrie de révolution, il est dit centré. Cet axe est appelé axe optique. On distingue :

- les systèmes dioptriques, comportant uniquement des dioptres (surfaces réfractantes) ;
- les systèmes catoptriques, comportant uniquement des miroirs (surfaces réfléchissantes) ;
- les systèmes catadioptriques, comportant des dioptres et des miroirs.

2.2 On dit qu'un système optique (Σ) est rigoureusement stigmatique pour un couple de points (A, A') lorsque tous les rayons issus d'un point A (ou du moins leurs supports) qui traversent le système (Σ), émergent de ce système en passant tous par un unique point A' (ou du moins leurs supports). Les points A et A' sont dits conjugués par rapport au système (Σ).

Plus formellement, le système optique (Σ) est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A, A') si et seulement si le chemin optique $\mathcal{L}_{AA'} = (AA')$ est constant, c'est-à-dire indépendant du rayon lumineux particulier choisi issu de A et passant par A' après traversée du système.

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique pour tous les couples de points conjugués (A, A') de l'espace. C'est un cas unique dans tous les systèmes optiques.

2.3 Le système optique (Σ) est dit rigoureusement aplanétique pour le couple de points de l'axe (A, A') s'il est rigoureusement stigmatique pour ce couple de points et si ce stigmatisme est conservé pour tout couple de points B et B' , infiniment proches respectivement de A et A' , et appartenant aux plans de front (plans perpendiculaires à l'axe optique) passant par ces points.

Application 2

Avec $AI = x_A - x_I = d - \frac{y^2}{2p}$ et $IF = \sqrt{(x_F - x_I)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}\right)^2 + y^2}$, le chemin

optique $\mathcal{L} = (AIF)$ s'écrit : $\mathcal{L} = (AI) + (IF) = AI + IF = d - \frac{y^2}{2p} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}\right)^2 + y^2}$. Après

développement et simplification, on trouve que : $\mathcal{L} = d - \frac{y^2}{2p} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + \frac{y^2}{2p}\right)^2} = d + \frac{p}{2}$.

Le chemin optique est indépendant de la position du point I, donc de la distance à l'axe du rayon incident : un miroir paraboloidique de révolution est rigoureusement stigmatique pour un point de son axe situé à l'infini et le foyer F de la parabole (qui est par définition le foyer du miroir, là où convergent tous les rayons incidents parallèles à l'axe du miroir).

2.4 Si la condition $a_2 = 0$ est réalisée, alors le chemin optique est constant au quatrième ordre près en α : $\mathcal{L}_{AA'_\alpha} \approx \mathcal{L}_0 = C^{ste}$. Le système est donc approximativement stigmatique pour le couple de points (A, A') , au quatrième ordre près en α , où A' est la position particulière de A'_α telle que $a_2 = 0$. Cette dernière condition est appelée relation de conjugaison.

2.5 La limite quantitative à imposer à l'angle α dépend de la qualité de l'image attendue donc de la nature du détecteur. On améliore toujours celle-ci grâce à un diaphragme positionné devant le système dont on pourra réduire l'ouverture à souhait, ce qui aura pour effet de limiter les rayons lumineux qui pénètrent dans le système à ceux très faiblement inclinés par rapport à l'axe optique et à proximité de ce dernier. L'introduction du diaphragme se fera toutefois au prix d'une dégradation de la luminosité. Et pour s'assurer de la validité d'une description géométrique de la lumière, il faudra en plus se limiter à une ouverture grande devant la longueur d'onde de la lumière utilisée.

2.6 Si tous les rayons lumineux issus du point-objet A situé sur l'axe optique sont limités à des angles α (comptés par rapport à l'axe optique) faibles, alors le système présente un stigmatisme approché pour le couple de points (A, A') : on dit que le système optique (Σ) vérifie la première condition de Gauss.

De plus, si tous les rayons lumineux restent à des distances faibles (devant les divers rayons de courbure des dioptries et miroirs) de l'axe optique, alors le système présente un aplanétisme approché pour le couple de points (A, A') , c'est-à-dire que l'image $A'B'$ d'un objet étendu AB situé dans un plan de front est elle-même dans un plan de front : on dit que le système vérifie la seconde condition de Gauss.

Les rayons qui respectent les deux conditions de Gauss sont qualifiés de rayons paraxiaux.

2.7 Tout système optique centré (Σ) est caractérisé par ses foyers principaux objet et image, notés respectivement F et F' .

Par définition, le point-image conjugué A'_∞ par le système d'un point-objet situé à son foyer objet F est un point de l'axe optique à l'infini : $F \xrightarrow{(\Sigma)} A'_\infty$. Inversement, le point-image conjugué par le système d'un point A_∞ de l'axe optique à l'infini est situé à son foyer image F' : $A_\infty \xrightarrow{(\Sigma)} F'$.

Le plan de front passant par F est appelé plan focal objet. Le plan de front passant par F' est appelé plan focal image. Tout point appartenant à ces plans est un foyer secondaire, objet ou image. Ainsi, le point-image conjugué par le système d'un point-objet situé à l'un de ses foyers secondaires est un point à l'infini hors de l'axe optique.

Application 3

a. On raisonne dans un premier temps avec des grandeurs non algébriques. En considérant le triangle CIA , la relation des sinus conduit à : $\frac{CA}{\sin i} = \frac{IA}{\sin(\pi - \omega)}$. De même, en considérant le triangle CIA' , on a : $\frac{CA'}{\sin i'} = \frac{IA'}{\sin(\pi - \omega)}$. On en déduit que $\frac{CA}{IA \sin i} = \frac{CA'}{IA' \sin i'}$, soit encore $n \frac{CA}{IA} = n' \frac{CA'}{IA'}$ puisque $n \sin i = n' \sin i'$ (relation de Snell-Descartes en I).

En algébrisant désormais, on obtient l'invariant fondamental du dioptré sphérique :

$$n \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n' \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}$$

b. En se limitant à des rayons paraxiaux, le point d'incidence I reste très proche du sommet S du dioptré et l'invariant fondamental peut s'écrire dans ces conditions : $n \frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n' \frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$. La position de A' est désormais indépendante du rayon issu du point-objet A : il y a bien stigmatisme approché pour le couple de points (A, A') .

On peut écrire la relation précédente sous la forme : $n \overline{CA} \cdot (\overline{SC} + \overline{CA'}) = n' \overline{CA'} \cdot (\overline{SC} + \overline{CA})$.

Après développement, puis division par $\overline{CA} \cdot \overline{CA'} \cdot \overline{CS}$, on obtient la relation de conjugaison du dioptré sphérique avec origine au centre C :

$$\frac{n'}{\overline{CA}} - \frac{n}{\overline{CA'}} = \frac{n' - n}{\overline{CS}}$$

On peut aussi écrire que $n(\overline{CS} + \overline{SA}) \cdot \overline{SA'} = n(\overline{CS} + \overline{SA'}) \cdot \overline{SA}$, ce qui conduit après développement, puis division par $\overline{SA} \cdot \overline{SA'} \cdot \overline{SC}$, à la relation de conjugaison du dioptré sphérique avec origine au sommet S :

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n' - n}{\overline{SC}}$$

c. La lentille boule peut être considérée comme l'association de deux dioptrés sphériques de même centre C et même rayon R (figure C1.2). Le foyer image F' de la lentille est le point-image conjugué d'un point-objet situé sur l'axe optique du système à l'infini.

Le dioptré d'entrée de sommet S_1 donne du point-objet situé à l'infini une image intermédiaire A_i telle que : $\frac{n}{\infty} - \frac{1}{\overline{CA_i}} = \frac{n - 1}{\overline{CS_1}}$. Le dioptré de sortie de sommet S_2 donne de l'image intermédiaire A_i une image finale F' telle que :

$$\frac{1}{\overline{CA_i}} - \frac{n}{\overline{CF'}} = \frac{1 - n}{\overline{CS_2}}. \text{ On en déduit que } \frac{n}{\overline{CF'}} = (n - 1) \left(\frac{1}{\overline{S_1 C}} - \frac{1}{\overline{S_2 C}} \right), \text{ soit finalement avec } \overline{S_1 C} = R \text{ et } \overline{S_2 C} = -R : \overline{CF'} = \frac{nR}{2(n - 1)}.$$

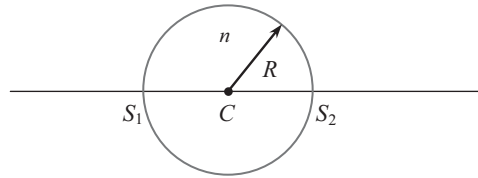


Figure C1.2 – Lentille boule plongée dans l'air.

3 Miroirs sphériques

3.1 On appelle miroir sphérique une surface sphérique réfléchissante de centre C . Il s'agit d'un système centré dont l'axe optique passe par C et coupe le miroir en son sommet S . Un miroir est caractérisé par son rayon algébrique $\bar{R} = \overline{SC}$.

Si le centre est dans le milieu transparent de propagation, le miroir est dit concave. Il est dit convexe dans le cas contraire. Un miroir concave est convergent alors qu'un miroir convexe est divergent.

3.2 Considérons un rayon issu d'un point-objet A situé sur l'axe optique du miroir et qui après réflexion en I coupe cet axe en un point A' (figure C1.3). On note ω l'angle que forme la normale (CI) au miroir en I avec l'axe optique.

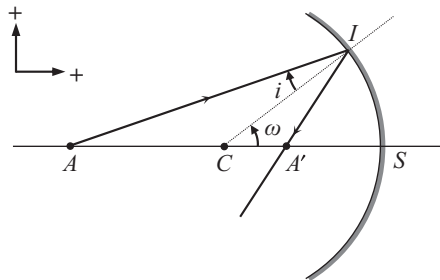


Figure C1.3 – Réflexion sur un miroir sphérique.

Comme dans l'application 3, on raisonne dans un premier temps avec des grandeurs non algébriques. D'après la loi de la réflexion, l'angle $(\overline{IC}, \overline{IA'})$ est égal à i . Les relations des sinus dans les triangles

CIA et CIA' s'écrivent ainsi respectivement $\frac{CA}{\sin i} = \frac{IA}{\sin(\pi - \omega)}$ et $\frac{CA'}{\sin i} = \frac{IA'}{\sin \omega}$, d'où on déduit que :

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{IA}{IA'}$$

Dans les conditions de l'approximation de Gauss, le point d'incidence I reste très proche du sommet S du miroir, ce qui permet d'écrire que $\frac{CA}{CA'} = \frac{SA}{SA'}$, soit en algébrisant :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = -\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} \quad (1.3)$$

Comme $\overline{CA} = -\overline{SC} + \overline{SA}$ et $\overline{CA'} = -\overline{SC} + \overline{SA'}$, la relation (1.3) conduit après développement à : $-\overline{SC} \cdot \overline{SA'} + \overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{SC} \cdot \overline{SA} - \overline{SA'} \cdot \overline{SA}$. En divisant les deux membres de l'égalité par $\overline{SC} \cdot \overline{SA} \cdot \overline{SA'}$, on établit la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet S :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (1.4)$$

En écrivant de même que $\overline{SA} = \overline{SC} + \overline{CA}$ et $\overline{SA'} = \overline{SC} + \overline{CA'}$, la relation (1.3) conduit après développement à : $\overline{CA} \cdot \overline{SC} + \overline{CA} \cdot \overline{CA'} = -\overline{CA'} \cdot \overline{SC} - \overline{CA'} \cdot \overline{CA}$. En divisant les deux membres de l'égalité par $\overline{SC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CA'}$, on établit la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre C :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad (1.5)$$

3.3 On a par définition $F \xrightarrow{\text{miroir}} A'_\infty$ et $A_\infty \xrightarrow{\text{miroir}} F'$. À partir de la relation de conjugaison avec origine au sommet, on en déduit immédiatement que les deux foyers principaux F et F' sont confondus :

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} \quad (1.6)$$

3.4 Pour établir les deux relations de grandissement transversal, il suffit de considérer les deux rayons particuliers passant par le sommet S et le centre C du miroir (figure C1.4).

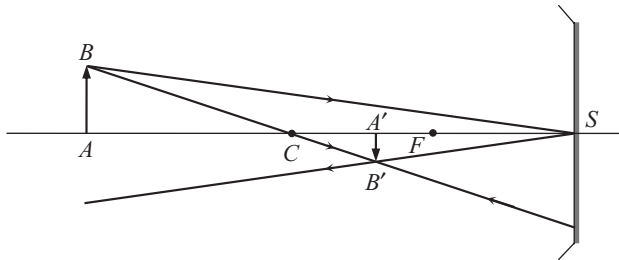


Figure C1.4 – Image d'un objet plan par un miroir sphérique concave.

Les triangles ABC et $A'B'C$ d'une part, et les triangles SAB et $SA'B'$ d'autre part (d'après la loi de la réflexion) sont semblables, d'où :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad (1.7)$$

Notons qu'on retrouve avec la dernière égalité la relation (1.3).

3.5 Considérons un point-objet A et un rayon quelconque issu de ce point qui se réfléchit en I (figure C1.5). Le support du rayon réfléchi coupe la normale (AH) au miroir en un point A' . Conformément à la loi de la réflexion, l'angle $\widehat{IAA'}$ est égal à l'angle $\widehat{IA'A}$, ce qui implique également

l'égalité des distances HA et HA' , soit encore en algébrisant : $\overline{HA} = -\overline{HA'}$. La position du point A' est indépendante du point d'incidence I : le support de tout rayon réfléchi issu du point-objet A passe par le point A' , symétrique de A par rapport au plan du miroir et pouvant être rigoureusement qualifié de point-image. Un miroir plan est donc un système rigoureusement stigmatique quel que soit le point-objet considéré et quel que soit l'ouverture du faisceau issu de ce point qui se réfléchit sur le miroir.

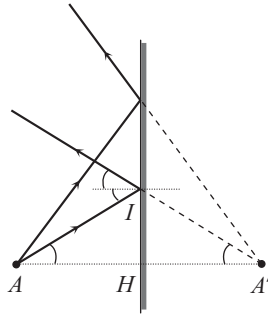


Figure C1.5 – Réflexions sur un miroir plan.

Application 4

a. On raisonne avec des angles non orientés. Avant rotation du miroir, l'angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi est égal à $2i$. Si on tourne le miroir d'un angle α tel que l'angle entre le rayon incident et la normale au miroir soit égal à $i + \alpha$ (figure C1.6), l'angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi devient égal à $2(i + \alpha)$ et le déplacement angulaire subi par le rayon réfléchi après rotation du miroir est donc $\beta = 2\alpha$.

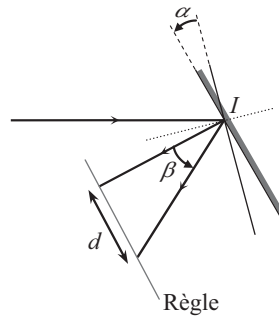


Figure C1.6 – Déplacement angulaire du rayon réfléchi après rotation d'un miroir plan.

b. On a $\tan \beta = \frac{d}{D}$, d'où $\alpha \approx \frac{d}{2D} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,86'$ dans l'approximation des petits angles ($d \ll D$).

4 Lentilles minces sphériques

4.1 Une lentille est un milieu TLHI limité par deux dioptries sphériques ou un dioptre sphérique et un dioptre plan. On distingue les lentilles à bords minces des lentilles à bords épais (figure C1.7).

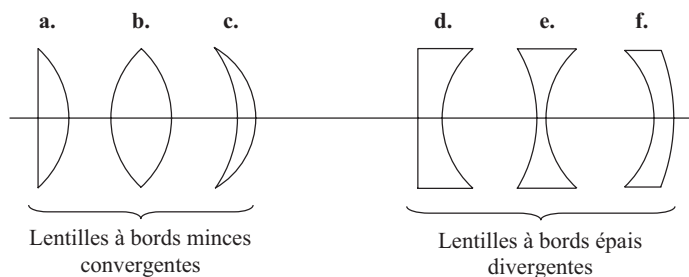


Figure C1.7 – Différents types de lentilles.

a. plan convexe ; b. biconvexe ; c. ménisque convergent ; d. plan concave ;
e. biconcave ; f. ménisque divergent

Vis-à-vis de tout rayon ne passant pas par le centre optique, une lentille mince joue localement le rôle d'un prisme de petit angle au sommet délimité par les plans tangents aux faces de la lentille aux points où le rayon pénètre et sort de la lentille (figure C1.8). Or, dans un prisme, on peut vérifier aisément par un tracé que les rayons incidents sont toujours déviés vers la base à l'émergence. Pour une lentille à bords minces, la base est vers l'axe optique, donc le rayon incident après deux réfractions est ramené vers l'axe optique : la lentille est convergente. Pour une lentille à bords épais, la base est vers l'extérieur, donc le rayon incident après deux réfractions s'écarte de l'axe optique : la lentille est divergente.

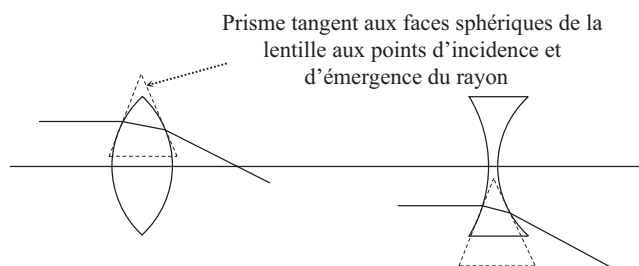


Figure C1.8 – Comportement d'une lentille localement assimilée à celui d'un prisme.

4.2 Une lentille sphérique est dite mince si l'épaisseur axiale $e = S_1S_2$ est négligeable comparée aux rayons de courbure $R_1 = S_1C_1$ et $R_2 = S_2C_2$ des deux faces et à la distance C_1C_2 de leurs centres :

$$e \ll |R_1|, e \ll |R_2|, e \ll |R_1 - R_2|$$

4.3 Le dioptre sphérique d'entrée (D_1) donne d'un point-objet A situé sur l'axe optique de la lentille une image intermédiaire A_i . Le dioptre sphérique de sortie (D_2) en donne une image finale A' .

On applique la relation de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au sommet à chacun des deux dioptres (voir application 3) :

$$(D_1) : \frac{n}{S_1A_i} - \frac{1}{S_1A} = \frac{n-1}{S_1C_1}$$

$$(D_2) : \frac{1}{S_2A'} - \frac{n}{S_2A_i} = \frac{1-n}{S_2C_2}$$

Dans l'approximation de la lentille mince, les sommets S_1 et S_2 des dioptries peuvent être considérés confondus avec le centre optique O : $\overline{S_1 A_i} = \overline{S_2 A_i} = \overline{O A_i}$, $\overline{S_1 A} = \overline{O A}$ et $\overline{S_2 A'} = \overline{O A'}$. En éliminant l'image intermédiaire A_i entre les deux relations, on aboutit à :

$$\frac{1}{\overline{O A'}} - \frac{1}{\overline{O A}} = \frac{n-1}{\overline{S_1 C_1}} + \frac{1-n}{\overline{S_2 C_2}} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Le terme de droite s'identifie à $\frac{1}{\overline{O F'}} = -\frac{1}{\overline{O F}} = \frac{1}{f'}$. En effet, si $A \rightarrow \infty$, on a alors $A' \rightarrow F'$, et inversement si $A \rightarrow F$, on a alors $A' \rightarrow \infty$. On obtient finalement la relation de conjugaison des lentilles minces sphériques avec origine au centre O , ou relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O A'}} - \frac{1}{\overline{O A}} = \frac{1}{f'} \quad (1.8)$$

La vergence de la lentille s'écrit donc :

$$V = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.9)$$

Remarquons que $\overline{R_1} = \overline{S_1 C_1} > 0$ et $\overline{R_2} = \overline{S_2 C_2} > 0$ pour une lentille convergente, ce qui implique que $f' > 0$. On vérifie de la même façon que $f' < 0$ pour une lentille divergente.

4.4 Les triangles OAB et $OA'B'$ étant semblables (figure C1.9), on obtient immédiatement la relation avec origine au centre O du grandissement transversal de la lentille :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (1.10)$$

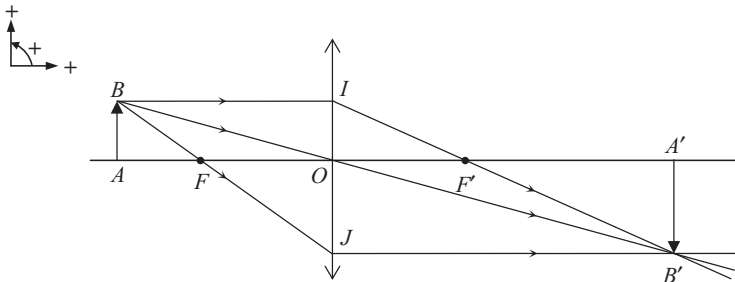


Figure C1.9 – Image d'un objet plan par une lentille mince convergente.

4.5 On établit les formules de Newton à partir de la construction graphique précédente (figure C1.9).

Les triangles FAB et FOJ sont semblables, d'où : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{FA}}$ puisque $\overline{OJ} = \overline{A'B'}$.

Les triangles $F'A'B'$ et $F'OI$ sont semblables, d'où : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$ puisque $\overline{OI} = \overline{AB}$.

On obtient finalement :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}} \quad (1.11)$$

4.6 On fixe la distance D entre l'objet et l'écran. En posant $p' = OA'$ et $p = OA$, on obtient à partir de la relation de Descartes : $p' = \overline{OA'} = \frac{f' \cdot \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} = -\frac{f'p}{f' - p}$. On en déduit ainsi que :

$$D = \overline{AA'} = p + p' = \frac{p^2}{p - f'} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f'}{f' - p}$$

Pour obtenir une image réelle sur un écran d'un objet réel, il faut donc que $p > f'$. Les deux fonctions $D(p)$ et $\gamma(p)$ admettent une asymptote verticale en $p = f'$. On peut enfin vérifier que la fonction $D(p)$ présente un minimum égal à $4f'$ en $p = 2f'$ (figures C1.10).

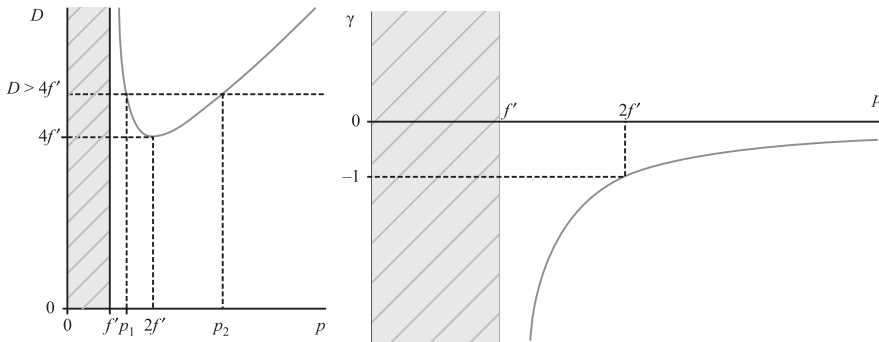


Figure C1.10 – Représentations graphiques de $D(p)$ (gauche) et $\gamma(p)$ (droite).

4.7 La représentation graphique de $D(p)$ montre qu'il y aura au moins une position possible de la lentille donnant une image nette sur l'écran à condition que $f' \leq D/4$. On retrouve cette condition en remarquant que p obéit à l'équation du second degré : $p^2 - Dp + f'D = 0$. Cette équation admet au moins une solution réelle si $\Delta = D^2 - 4f'D \geq 0$, soit si $f' \leq D/4$.

- Si $f' = D/4$, il y a une position unique de la lentille à $p_0 = 2f' = D/2$ avec un grandissement transversal pour cette position $\gamma_0 = \frac{f'}{f' - p_0} = -1$.
- Si $f' < D/4$, il y a deux positions possibles p_1 et p_2 de la lentille, symétriques par rapport au milieu du segment objet/écran : $p_1 = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f'}{D}} \right)$ et $p_2 = \frac{D}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4f'}{D}} \right)$. Les grandissements transversaux pour ces deux positions sont $\gamma_1 = \frac{f'}{f' - p_1}$ et $\gamma_2 = \frac{f'}{f' - p_2}$. Puisque $f' < p_1 < p_2$, on en déduit que $\gamma_1 < 0$ et $\gamma_2 < 0$. On peut enfin remarquer que $p_1 < p_0 = \frac{D}{2} = 2f'$ et $p_2 > 2f'$, ce qui permet de conclure que $|\gamma_2| < 1 < |\gamma_1|$ (figure C1.10 droite)

Il ressort de cette étude qu'on ne pourra obtenir d'un objet réel, une image réelle, que si la distance objet-image D est supérieure à $4f'$ où f' est la distance focale image de la lentille convergente utilisée. La portion de l'axe optique utilisée se réduit, dans le cas des projections avec grandissement supérieur à 1, au segment HF à la distance comprise entre f' et $2f'$ de la lentille.

Application 5

a. Le foyer principal image F' du doublet est le conjugué par l'ensemble (L_1) et (L_2) d'un point-objet A_∞ situé sur l'axe optique à l'infini, ce qui donne : $A_\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 \xrightarrow{(L_2)} F'$. F' est donc aussi le conjugué par la lentille (L_2) du foyer principal image F'_1 de la lentille (L_1) .

En utilisant les formules de Newton, on en déduit que $\overline{F'_2 F'} = -\frac{(f'_2)^2}{F'_2 F'_1} = -\frac{(f'_2)^2}{F'_2 O_2 + O_2 O_1 + O_1 F'_1}$, soit encore :

$$\overline{F'_2 F'} = \frac{(f'_2)^2}{e - f'_1 - f'_2} = \frac{r^2}{q - p - r} a$$

Inversement, un point-image A'_∞ situé sur l'axe optique à l'infini est le conjugué par l'ensemble (L_1) et (L_2) du foyer principal objet F du doublet, ce qui donne : $F \xrightarrow{(L_1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} A'_\infty$. Le foyer principal objet F_2 de (L_2) est donc aussi le conjugué par la lentille (L_1) de F . En utilisant

toujours les formules de Newton, on en déduit que $\overline{F_1 F} = -\frac{(f'_1)^2}{F'_1 F_2} = -\frac{(f'_1)^2}{F'_1 O_1 + O_1 O_2 + O_2 F_2}$, soit encore :

$$\overline{F_1 F} = -\frac{(f'_1)^2}{e - f'_1 - f'_2} = -\frac{p^2}{q - p - r} a$$

b. Comme l'objet AB est à l'infini, la lentille (L_1) en forme une image intermédiaire $A_i B_i$ située dans son plan focal image telle que $\overline{A_i B_i} \approx f'_1 \theta$ dans l'approximation des petits angles, avec $\theta < 0$ (figure C1.11).

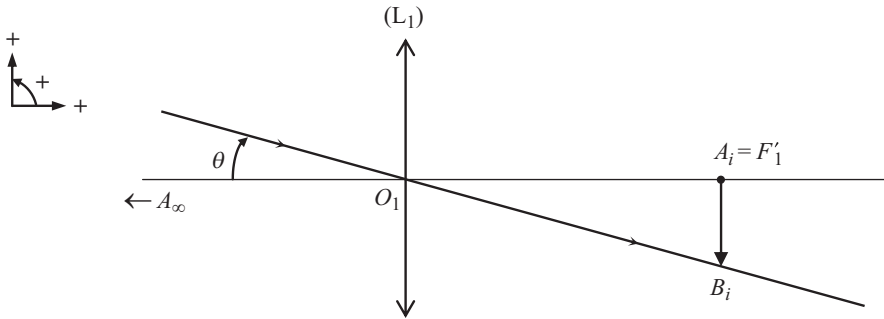


Figure C1.11 – Image d'un objet plan situé à l'infini et vu sous un angle θ .

La lentille (L_2) forme ensuite une image définitive $A'B'$ de $A_i B_i$ située dans le plan focal image du doublet, c'est-à-dire dans le plan de front passant par F' . Les formules de Newton pour la

lentille (L_2) conduisent à : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_i B_i}} = -\frac{\overline{F'_2 F'}}{f'_2}$. On en déduit donc que :

$$\overline{A'B'} = -\overline{A_i B_i} \cdot \frac{\overline{F'_2 F'}}{f'_2} = -\frac{pr}{q - p - r} a \theta$$

Une lentille unique (L) de distance focale image f' donnerait une image $A'B'$ de AB située dans son plan focal image telle que (figure C1.11) :

$$\overline{A'B'} \approx f'\theta$$

Pour que les tailles des images données par le doublet et la lentille (L) soient égales, il faut une distance focale image de (L) :

$$f' = -\frac{pr}{q-p-r}a$$

Il s'agit aussi de la distance focale image du doublet. La vergence correspondante est donc :

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{a} \frac{p+r-q}{pr} = \frac{1}{ar} + \frac{1}{ap} - \frac{q}{apr}$$

Elle s'écrit encore (formule de Gullstrand) :

$$V = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} = V_1 + V_2 - eV_1 V_2$$

c. Lorsque les deux lentilles sont accolées, on peut considérer leurs centres optiques respectifs O_1 et O_2 confondus en un unique point O (soit $e = 0$). D'un objet AB , l'ensemble donne une image finale $A'B'$ telle que : $AB \xrightarrow{(L_1)} A_i B_i \xrightarrow{(L_2)} A'B'$.

Les relations de conjugaison avec origine au centre pour chacune des lentilles s'écrivent :

$$(L_1) : \frac{1}{\overline{OA_i}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \quad (L_2) : \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_i}} = \frac{1}{f'_2}$$

En sommant membre à membre, on obtient : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$. L'ensemble des deux lentilles accolées se comporte donc comme une lentille unique (L), de centre optique O et de vergence donnée par la formule des opticiens :

$$V = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = V_1 + V_2$$

d. Dans le cas de l'oculaire de de Huygens (4,3,2), on a $\frac{f'_1}{4} = \frac{e}{3} = \frac{f'_2}{2} = a$, d'où :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} - \frac{3a}{8a^2} = \frac{3}{8a}$$

Sachant que $f' = 40$ mm, on en déduit que $a = 15$ mm, $f'_1 = 60$ mm, $f'_2 = 30$ mm, $e = 45$ mm, $\frac{f'_2 f'}{3} = -\frac{4a}{3} = -20$ mm et $\frac{16a}{3} = \frac{f'_1 f'}{3} = 80$ mm.

Le foyer principal objet de l'oculaire F est 20 mm devant (L_1), donc il est virtuel : on dit que l'oculaire est négatif.

Le foyer principal image de l'oculaire F' est 10 mm devant (L_2), donc il est réel : on dit que l'oculaire est convergent.

5 Focométrie

MÉTHODE D'AUTOCOLLIMATION

5.1 L'ensemble constitue un système catadioptrique avec la succession d'images suivantes :

$$A \xrightarrow{(L)} A_1 \xrightarrow{(M)} A_2 \xrightarrow{-(L)} A'$$

La lentille (L) donne du point-objet A une image intermédiaire A_1 . D'après la relation de Descartes,

$$\text{on a : } \overline{OA_1} = \frac{f' \cdot \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} = -\frac{fp}{f' - p} \text{ où on a posé } p = OA.$$

Le miroir (M) accolé à la lentille donne de A_1 une image A_2 symétrique par rapport à son plan, donc

$$\overline{OA_2} = -\overline{OA_1} = \frac{fp}{f' - p}.$$

Enfin, la lumière réfléchiée sur le miroir retransverse la lentille en sens inverse pour donner de A_2 une

image A' . La relation de Descartes s'écrit dans ce cas $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'}$ puisque les rôles des foyers

principaux ont été inversés, d'où : $\overline{OA'} = \frac{f' \cdot \overline{OA_2}}{f' - \overline{OA_2}} = \frac{fp}{f' - 2p}$.

On en déduit finalement que :

$$\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = \frac{2p(f' - p)}{f' - 2p}$$

5.2 La méthode d'autocollimation consiste à déplacer le système {lentille ; miroir} de façon à recueillir dans le plan de front de l'objet AB son image $A'B'$ par ce système. Lorsque tel est le cas, on a $\overline{AA'} = 0$ et donc d'après la question précédente $f' = p$: la distance focale image f' de la lentille est égale à la distance entre l'objet et la lentille. Cette méthode ne dépend pas en fait de la position relative du miroir par rapport à la lentille (figure C1.12).

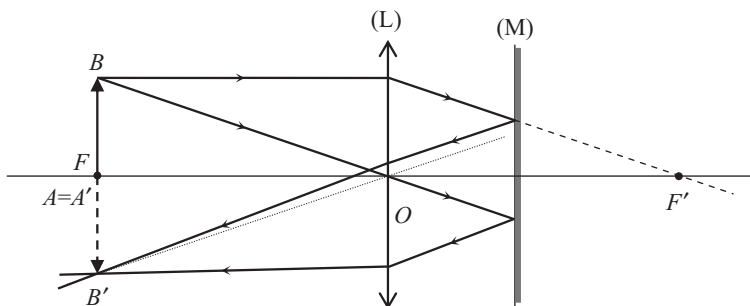


Figure C1.12 – Méthode d'autocollimation : l'image d'un objet plan par le système se forme dans le plan de front de cet objet avec un grandissement transversal $\gamma = -1$.