

Raciocínio Lógico

Problemas, Testes e Jogos

Ney Garcia

***“ O livro é um mudo que fala, um surdo que responde,
um cego que guia, um morto que vive.”***

Padre Antônio Vieira (1608-1697)

APRESENTAÇÃO

Ao folhear as páginas deste livro, o leitor pode ter a sensação de que os exercícios são difíceis e os cálculos são estafantes. Não se prenda a essa primeira impressão, pois o que ocorre é exatamente o contrário. Tudo o que se vai precisar é de raciocínio e do conhecimento das operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Este texto compõe-se de três partes: a primeira parte apresenta um breve resumo de conceitos lógico-aritméticos, seguidos de 100 problemas e 100 testes lógicos; a segunda parte, composta de 12 seções, propõe 138 jogos lógico-aritméticos que exploram a teoria exposta na primeira parte de forma divertida e criativa; por fim, a terceira parte apresenta sugestões e soluções aos exercícios propostos.

Ao solucionar os problemas, testes e jogos, desejo ao leitor que tenha o mesmo prazer que tive ao desenvolvê-los.

Finalmente, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste texto, aí incluídos todos os meus professores (da escola primária à universidade).

O Autor

Críticas e sugestões:

www.clubedeautores.com.br

Índice

PARTE I – Problemas e Testes

Seção 1 - Resumos de Aritmética e Álgebra.....	10
Problemas Propostos.....	31
Seção 2 - Noções de Lógica.....	47
Testes Propostos.....	53

PARTE II – Jogos Lógico-Aritméticos

Seção 1- Jogo do Dígito Oculto (1).....	76
Seção 2 – Jogo da Pirâmide Aritmética.....	79
Seção 3 – Jogo do Dígito Oculto (2).....	84
Seção 4 – Jogo das Expressões Numéricas Cruzadas.....	90
Seção 5 – Jogo do Dígito Oculto (3).....	96
Seção 6 – Jogo da Tabela de Pontuação.....	99
Seção 7 – Jogo da Vizinhança Linear.....	105
Seção 8 – Jogo da Vizinhança Quadrática.....	111
Seção 9 – Jogo da Ordenação Linear.....	117
Seção 10 – Jogo da Ordenação Quadrática.....	122
Seção 11 – Jogo das Lacunas Numéricas.....	128
Seção 12 – Jogo dos Números Cruzados.....	133

PARTE III – Sugestões e Respostas.....

145

Referências.....

200

Parte I

Problemas e Testes

Nesta parte introdutória, serão aplicados os conceitos básicos de Aritmética e Lógica na resolução de problemas clássicos de Raciocínio Lógico-Quantitativo.

Seção 1

Resumos de Aritmética e Álgebra

O texto seguinte traz uma recapitulação dos conceitos utilizados nos exercícios que se seguem. Para maiores informações, sugere-se ao leitor que consulte as referências listadas ao fim do livro, onde se encontra detalhamento dos temas aqui abordados.

(I) Conjuntos

- Um *conjunto* é uma coleção de elementos (objetos, pessoas, números, etc.) e será indicado por uma letra maiúscula do alfabeto.
- O conjunto vazio, indicado $\emptyset$, não possui elementos.
- A pertinência de um elemento x a um conjunto A será indicada por $x \in A$, e a não pertinência será indicada $x \notin A$.
- Um conjunto A é dito *subconjunto* de um conjunto B , notação $A \subset B$, quando é vazio ou é formado de elementos pertencentes a B .
- Operações com conjuntos: sobre os conjuntos A e B , podem ser definidas as seguintes operações:
 - União ($A \cup B$): é o conjunto formado dos elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos A ou B ;
 - Interseção ($A \cap B$): é o conjunto formado dos elementos comuns a A e B ;
 - Diferença ($A \setminus B$): é o conjunto dos elementos que estão em A mas não estão em B .

Obs.: Se $n(X)$ denota o número de elementos de um conjunto X qualquer, então temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

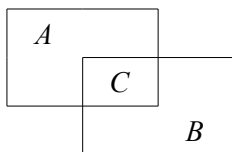
• Principais conjuntos numéricos:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ = conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são inteiros, com } b \neq 0 \right\}$ = conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{I} = \{x/x \text{ não pode ser escrito na forma } \frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ inteiros}\}$ = conjunto dos números irracionais;
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ = conjunto dos números reais.

Observe que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

• Exemplo (I):

- (i) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, então: $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cup C = A$, $A \cap B = B$ e $A \setminus B = C$.
- (ii) Se A é o conjunto dos brasileiros (homens e mulheres) maiores de 20 anos e B é o conjunto de todas as mulheres brasileiras, então: $A \cap B$ é o conjunto de todas as brasileiras com mais de 20 anos, $B \setminus A$ é o conjunto das brasileiras com 20 anos ou menos, e $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = B$.
- (iii) Se $A \subset B$, então $n(A \cup B) = n(B)$, pois quando $A \subset B$, tem-se $A \cap B = A$. Daí, como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, tem-se $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A) = n(B)$.
- (iv) Se $A \neq \emptyset$ e $B = \emptyset$, então $A \setminus B = A$ e $B \setminus A = \emptyset$.
- (v) Um grupo de pessoas distribui-se em três retângulos A, B e C , conforme a figura abaixo. Se em cada retângulo maior existem 10 pessoas, e no retângulo menor tem-se 5 pessoas, qual o total de pessoas do grupo?



Se A e B representam os conjuntos das pessoas nos retângulos A e B , respectivamente, então, como $A \cap B = C$, aplicando a fórmula acima, tem-se $n(A \cup B) = 15$ pessoas.

(II) Sistema de Numeração Decimal

- Um *sistema de numeração* é um conjunto de símbolos e regras para representar o número de elementos de conjuntos quaisquer.
- O número de símbolos utilizados é chamado de *base* do sistema de numeração.
- O Sistema de Numeração Decimal é de base 10, pois utiliza os 10 dígitos ou *algarismos indo-arábicos* $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para representar os números.
- A principal regra para escrever quantidades nesse sistema é a seguinte: todo algarismo escrito à esquerda de uma posição qualquer possui um peso 10 vezes maior do que se fosse escrito nessa posição. Por isso, se diz que o Sistema Numérico Decimal é um *sistema posicional*.
- O algarismo (ou dígito) da posição mais à esquerda na representação de um número é chamado de *algarismo mais significativo*, enquanto o da posição mais à direita é o *algarismo menos significativo*.
- Cada algarismo significativo (diferente de zero), possui um *valor absoluto* (que é simplesmente o valor do algarismo considerado isoladamente) e um *valor relativo* (correspondente à sua posição na escrita do número).
- Na representação decimal, cada posição é chamada de *ordem*; cada dez unidades de uma ordem formam uma unidade da ordem imediatamente à esquerda e cada três ordens formam uma *classe*, como indica o quadro abaixo:

...	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
...	Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidade de milhar	Centena (simples)	Dezena (simples)	Unidade (simples)
...	Classe dos Milhares			Classe das Unidades		

- Exemplo (II):
 - (i) Quando é que o valor absoluto de um algarismo é igual ao seu valor relativo?

Isso acontece somente quando esse algarismo ocupa a ordem

das unidades.

- (ii) Na representação decimal, as posições ocupadas pelos dígitos possuem, da direita para a esquerda, os seguintes pesos: 1, 10, 100, 1000, 10000, ... (isso resulta do fato de que todo algarismo possui um peso dez vezes maior que o algarismo escrito à sua direita); com isso, *o valor relativo de qualquer algarismo é obtido do produto de seu valor absoluto pelo peso da posição ocupada por ele*. Além disso, *todo número natural é igual à soma dos valores relativos de todos os seus dígitos*.

Assim sendo, no número 14.563.728, o peso do algarismo 5 é 100.000, de modo que o seu valor relativo é 500.000; além disso, tem-se:

$$14.563.728 = 10.000.000 + 4.000.000 + 500.000 + 60.000 + 3.000 + 700 + 20 + 8.$$

- (iii) O que acontece com a representação de um número que tem um 9 em determinada ordem, se a ele for acrescentado mais uma unidade nessa ordem?

Como 9 é o algarismo de maior valor absoluto, a ordem fica zerada e acrescenta-se uma unidade à ordem imediatamente à esquerda.

- (iv) Seja a um número do sistema decimal formado por n algarismos 9. Se a representa a quantidade de elementos de um conjunto qualquer, como se representa a quantidade de elementos desse conjunto se a ele for acrescentado mais um elemento?

A representação da nova quantidade possui $n+1$ algarismos, sendo que o mais significativo é 1 e os demais são nulos.

- (v) Pelo item anterior, vê-se que, se um número é formado de n algarismos, onde o mais significativo é 1 e os demais são nulos, então, ao se reduzir uma unidade desse número, a nova representação constitui-se de $n-1$ algarismos iguais a 9.

(III) Conjunto dos Números Naturais

- Ao conjunto dos números naturais associam-se quatro operações

aritméticas básicas, chamadas *adição* (+), *subtração* (−), *multiplicação* (x ou ·) e *divisão* (÷), assim relacionadas:

$$a + b = c \text{ se, e somente se, } a = c - b$$

$$a \cdot b = c \text{ se, e somente se, } a = c \div b$$

- Dados a, b e c naturais:
 - (i) se $c = a + b$, a e b são chamados de *parcelas* e c é chamado *soma* de a e b ;
 - (ii) se $c = a - b$, a é chamado *minuendo*, b é chamado de *subtraendo* e c é a *diferença* de a e b ;
 - (iii) se $c = a \cdot b$, a e b são chamados *fatores* e c é chamado *produto* de a e b ;
 - (iv) se $c = a \div b$, a é chamado de *dividendo*, b é chamado de *divisor* e c é chamado de *quociente* da divisão;
 - (v) nos três itens anteriores, a e b são chamados de *operandos* das operações em consideração.
- As tabelas a seguir indicam o resultado da adição e da multiplicação realizada entre os elementos do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$:

Tabela da Soma												
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Tabela da Multiplicação												
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	

- Todo número natural n possui um *sucessor*, dado por $n+1$;
- Todo número natural $n \neq 0$ possui um *antecessor*, dado por $n-1$.

- A operação de subtração induz uma *relação de ordem* no conjunto dos naturais, uma vez que $a - b$ só está definido em $\mathbb{N}$ quando $a \geq b$. Nesse caso, diz-se também que $b \leq a$. Os símbolos “ $>$ ” e “ $<$ ” são utilizados para indicar que não existe a possibilidade de igualdade entre os elementos comparados.

- Propriedades da adição e multiplicação (não satisfeitas pela subtração e divisão): dados a, b, c naturais tem-se:

- . comutativa: $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$;

- . associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

- . distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ e $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

- *Múltiplo* de um número natural é o produto desse número por um natural qualquer. Indica-se por $M(a)$ o conjunto dos múltiplos do natural $a \neq 0$, que é dado por $M(a) = \{ 0, a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, 4 \cdot a, \dots \}$.

- Zero é múltiplo de todo número natural, pois $n \cdot 0 = 0$, para todo n natural. Além disso, nenhum natural diferente de zero é múltiplo de zero.

- Todo natural é múltiplo de 1 e dele mesmo.

- Os múltiplos de 2 são chamados de *números pares*, e formam o conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$; uma forma alternativa de descrever esse conjunto é escrevê-lo como o conjunto dos números da forma $2 \cdot k$, onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

- Se um número não é par, ele é dito *número ímpar*. Os números ímpares formam o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$, que também pode ser escrito como o conjunto dos números da forma $2 \cdot k + 1$, onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

- Observe que, tanto a soma de dois números pares, quanto a soma de dois números ímpares, resulta em um número par, mas a soma de um número par com um número ímpar resulta em um número ímpar.

- No caso da multiplicação, se pelo menos um dos fatores é par, então o resultado é par, mas se os dois fatores forem ímpares, o produto será um número ímpar.

- Calcular $a \div b$ é calcular o maior número natural q (quociente), que, multiplicado por b (divisor), dá um produto menor ou igual a a (dividendo). Isso significa obter o maior natural q tal que $a = b \cdot q + r$,

onde r , chamado *resto* da divisão de a por b , satisfaz $0 \leq r < b$. Esse processo de cálculo é conhecido como “*Algoritmo da Divisão de Euclides*”. Além disso:

- (i) se $r=0$, o quociente é *exato*; mas se $r \neq 0$, o quociente é *aproximado*;
 - (ii) o zero nunca pode ser divisor numa operação de divisão, mas $0 \div a = 0$, para qualquer $a \neq 0$;
 - (iii) $a \div 1 = a$, para qualquer a natural; e $a \div a = 1$, para todo $a \neq 0$;
 - (iv) se $a = b \cdot q$, b é dito *divisor* de a ; indica-se por $D(a)$ o conjunto dos divisores do número natural a .
- Alguns critérios de divisibilidade: dado n natural não nulo:
 - (i) n é divisível por 2 se n é par;
 - (ii) n é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisível por 3;
 - (iii) n é divisível por 4 se seus dois últimos algarismos (da direita) formam um número divisível por 4;
 - (iv) n é divisível por 5 se o algarismo das unidades é 0 ou 5;
 - (v) n é divisível por 6 se for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo;
 - (vi) n é divisível por 10 se o algarismo das unidades é 0.
 - Uma outra operação relacionada com a multiplicação é a *potenciação*, indicada por a^b (leia-se '*a elevado a b*'), chamada *potência* de base a e expoente b , e assim definida:

$$a^b = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a, \text{ onde o fator } a \text{ se repete } b \text{ vezes.}$$

- Quando $a \in \mathbb{N}$, a^2 é chamado *quadrado (perfeito)* e a^3 é chamado *cubo (perfeito)*.
- Algumas propriedades da potenciação: para todos $a, m, n \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

- A operação inversa da potenciação é a *radiciação*, e essas duas operações estão assim relacionadas:

$$\sqrt[n]{a}=b \quad \text{se, e só se,} \quad b^n=a \quad ,$$

o que significa que obter a raiz n -ésima de a é encontrar b que elevado a n dê a .

- Quando $n=2$, $\sqrt[n]{a}$ é chamada a *raiz quadrada* de a ; e quando $n=3$, temos a *raiz cúbica* de a . Se $n=2$, omite-se o n e indica-se, simplesmente, $\sqrt{a}$.

- Uma sequência de operações aritméticas forma o que se chama uma *expressão aritmética*. Para se fazer o cálculo de tais expressões, deve ser considerado que multiplicações e divisões têm *precedência* sobre adições e subtrações. Isso significa que, numa expressão aritmética do tipo: $a+b \div c - d \cdot e$, o resultado final é obtido somando-se a a o valor de $b \div c$ e subtraindo-se dessa soma o valor de $d \cdot e$.

- A ordem de precedência em uma expressão aritmética pode ser alterada com a utilização de parênteses. Assim, se na expressão acima quisermos que a seja primeiro somado a b , e esse resultado dividido pelo resultado da diferença entre c e o produto de d e e , podemos indicar esse fato colocando parênteses da seguinte forma:
 $(a+b) \div (c-d \cdot e)$.

- Exemplo (III)

(i) Sejam a, b, c naturais não nulos. Se a é múltiplo de b , então todo múltiplo de a é também múltiplo de b , o que significa que $M(a) \subset M(b)$. Além disso, se b é divisor de c , então todo divisor de b é também divisor de c , ou seja, $D(b) \subset D(c)$.

(ii) Sejam a, b, c naturais não nulos. Se $m = a + b$ e $n = m + c$, e se a, b, c são números ímpares, o que se pode dizer de m e n ? Como m é a soma de dois ímpares, então m é par; mas n é a soma de um par com um ímpar, e, portanto, é um número ímpar.

(iii) Sejam a, b, c naturais não nulos. Se a é múltiplo de b e b é divisor de c , então a é múltiplo ou divisor de c ?

Nesse caso, nada se pode afirmar, pois, por exemplo, se $a=12$, $b=6$ e $c=18$, então a não é múltiplo nem divisor de c .

(iv) Como $5 \cdot 4 < 22 < 5 \cdot 5$, podemos afirmar que o quociente

da divisão de 22 por 5 é 4, pois 22 está entre dois múltiplos consecutivos de 5; além disso, como $22=5\cdot 4+2$, isso significa que o resto dessa divisão é 2.

(v) Exemplo de cálculo de expressão aritmética:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2+3)^2-(2\cdot 4+4\cdot(2+12\div 6))}=\sqrt{5^2-(8+4\cdot(2+2))} = \\ & = \sqrt{25-(8+4\cdot 4)}=\sqrt{25-(8+16)}=\sqrt{25-24}=\sqrt{1}=1 \end{aligned}$$

(IV) Números Primos

- *Número primo* é todo natural que só tem dois, e somente dois, divisores: 1 e ele mesmo.
- O conjunto dos números primos é infinito.
- Os números primos menores que 100 estão listados na tabela a seguir:

Números Primos menores que 100				
2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

- Um número que não é primo é chamado de *número composto*.
- Todo número composto pode ser escrito como o produto de números primos. Esse processo é dito *fatoração* ou *decomposição em fatores primos*.
- Para decompor um número composto em seus fatores primos basta realizar os cálculos seguintes: “obtenha o menor número primo divisor do número considerado e o quociente resultante dessa divisão”; esse número primo é um fator primo do número dado, e, se o quociente obtido for diferente de 1, o processo se repete, considerando-se, agora, o quociente obtido como novo dividendo. Quando se obtém um quociente unitário, o processo finaliza. A fatoração do número dado é obtida do produto dos primos

encontrados no processo. Lembre-se que, quando os fatores primos se repetem, eles devem ser colocados na forma de potência.

- Da fatoração de um número natural a , pode-se obter o número de divisores de a : a cada expoente dos fatores primos, some uma unidade e faça a multiplicação desses números; o produto será igual a $n(D(a))$, ou seja, o número de divisores de a .

- Exemplo (IV):

(i) O único número primo par é o 2, pois, caso contrário, se existisse um outro primo par, ele seria um múltiplo de 2 e, portanto, seria composto.

(ii) Decomponha em fatores primos os números 200, 400 e 600.

Para decompor números em fatores primos, pode-se utilizar o esquema a seguir:

400	2	600	2
200	2	300	2
100	2	150	2
50	2	75	3
25	5	25	5
5	5	5	5
1		1	

Observe que à direita do traço, encontram-se os fatores primos dos números, e à esquerda estão os quocientes gerados no processo de fatoração. Assim, tem-se que:

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ e $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Além disso, a fatoração de 200 pode ser obtida da fatoração de 400, já que 200 consta à esquerda do traço na fatoração de 400: $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

(iii) Da fatoração de 200, 400 e 600, obtém-se:

$$n(D(200)) = (3+1) \cdot (2+1) = 12 \quad ;$$

$$n(D(400)) = (4+1) \cdot (2+1) = 15 \quad ;$$

$$n(D(600)) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 24 \quad .$$

(V) MDC e MMC

- Chama-se *máximo divisor comum* dos naturais a e b ao maior número do conjunto $D(a) \cap D(b)$, indicado por $MDC(a,b)$.
- O $MDC(a,b)$ pode ser calculado a partir da fatoração de a e b , tomando-se o produto dos fatores primos comuns, considerando-se sempre os de menor expoente.
- Quando $MDC(a,b)=1$, diz-se que a e b são *primos entre si*.
- Chama-se *mínimo múltiplo comum* dos naturais a e b ao menor número do conjunto $M(a) \cap M(b)$, indicado por $MMC(a,b)$.
- O $MMC(a,b)$ também pode ser calculado a partir da fatoração de a e b ; nesse caso, toma-se o produto dos fatores primos comuns e não-comuns com os seus maiores expoentes.
- Propriedade importante:

$$MMC(a,b) \cdot MDC(a,b) = a \cdot b$$

- Exemplo (V):

- (i) Sejam a , b e c números primos distintos, e sejam $m=a \cdot b$ e $n=b \cdot c$. Então, como b é o único fator primo comum de m e n , tem-se $MDC(m,n) = b$ e $MMC(m,n) = a \cdot b \cdot c$.
- (ii) Das fatorações de 200, 400 e 600 feitas no Exemplo (IV), tem-se:

$$MDC(200,400) = 2^3 \cdot 5^2 = 200$$

$$MMC(200,400) = 2^4 \cdot 5^2 = 400$$

$$MDC(200,600) = 2^3 \cdot 5^2 = 200$$

$$MMC(200,600) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$$

$$MDC(400,600) = 2^3 \cdot 5^2 = 200$$

$$MMC(400,600) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$$

- (iii) Observe que, se a é divisor de b , então $MDC(a,b)=a$ e $MMC(a,b)=b$.