Colles
corrigées et commentées

MPSi

Maths

*S'entraîner aux concours dès la **Sup***

ellipses

Mayeul Bacquelin

Maths

Colles

corrigées et commentées

MPSi

Maths

Mayeul Bacquelin

ellipses

Collection

Colles

corrigées et commentées

ISBN 9782340-098961

Dépôt légal : janvier 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2025
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

TABLE DES MATIÈRES

1 Logique, ensembles et applications **5**
1.1 Éléments de logique 5
1.2 Ensembles 7
1.3 Applications 10

2 Récurrence, somme et produit finis **15**
2.1 Récurrence 15
2.2 Sommes classiques 18
2.3 Sommes sur certains indices, sommes doubles 21
2.4 Et les produits ? 25

3 La trigonométrie **29**
3.1 Les équations trigonométriques de base 29
3.2 Développer, factoriser 32
3.3 Fonctions circulaires réciproques et hyperboliques 34

4 Rappels d'analyse **41**
4.1 Fonctions logarithme, exponentielle, puissances 41
4.2 Études de fonctions 46

5 Les complexes : la base ! **53**
5.1 Écriture algébrique 53
5.2 Écriture trigonométrique 54
5.3 Retour sur la trigonométrie 58

6 Les complexes : applications pour les équations et la géométrie **65**
6.1 Équations du second degré 65
6.2 Racine n-ième 67
6.3 Un peu de géométrie 72

7 Calculs de primitives **77**
7.1 Primitives de référence 77
7.2 Intégration par parties 80
7.3 Changement de variable 85

8 Les équations différentielles **89**
8.1 Ordre un 89
8.2 Recollement 91
8.3 Ordre deux à coefficients constants 95
8.4 Équation fonctionnelle 100

9 Les systèmes linéaires **103**
9.1 Résoudre un système linéaire échelonné 103
9.2 Savoir résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss 104
9.3 Savoir résoudre un système linéaire comportant des paramètres . . 109

10 Les suites particulières **111**
10.1 Suites géométriques, arithmétiques et suites arithmético-géométriques 111
10.2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 114
10.3 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ 116

11 Arithmétique **121**
11.1 PGCD, PPCM 121
11.2 Nombres premiers 124

12 Les suites **127**
12.1 Calculs de limites 127
12.2 Quelques outils un peu plus théoriques 129
12.3 Un peu d'ordre 131

13 Limites et continuité **135**
13.1 Calculs de limites 135
13.2 Étude de fonctions 139
13.3 Les gros théorèmes 141

14 Dérivabilité **145**
14.1 Calculs et utilisation de dérivée 145
14.2 Dérivée n-ième 147
14.3 Convexité 151
14.4 Les gros théorèmes 153

15 Structure algébrique **155**
15.1 Groupes 155
15.2 Anneaux, corps 157
15.3 Morphismes 160

16 Polynômes et fractions rationnelles **163**
16.1 Degré, coefficients 163
16.2 Racines et décomposition 166
16.3 Fractions rationnelles 171

17 Matrices et déterminants **173**
17.1 Puissance de matrices . . . 173
17.2 Inverse de matrices . . . 179
17.3 Les déterminants . . . 181

18 Analyse asymptotique **185**
18.1 Équivalence . . . 185
18.2 Obtention de développements limités . . . 188
18.3 Utilisation des développements limités . . . 192

19 Les espaces vectoriels : généralités **195**
19.1 Prouver qu'on a, ou non, un espace vectoriel . . . 195
19.2 Familles libres, génératrices, bases . . . 199

20 Les espaces vectoriels de dimension finie **207**
20.1 Sur le rang . . . 207
20.2 Sur la dimension . . . 215

21 Intégration **221**
21.1 Linéarité, relation de Chasles . . . 221
21.2 Intégration et ordre . . . 222
21.3 Intégration et suites . . . 225
21.4 Fonction définie à l'aide d'une intégrale . . . 227

22 Applications linéaires **231**
22.1 Généralités et interprétation matricielle . . . 231
22.2 Noyau et image . . . 233
22.3 Autour du rang . . . 236
22.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . 237

23 Dénombrement et probabilité **243**
23.1 Dénombrement . . . 243
23.2 Probabilité sans probabilité conditionnelle . . . 247
23.3 Probabilité avec probabilité conditionnelle . . . 249

24 Variables aléatoires discrètes finies **255**
24.1 Loi d'une variable aléatoire . . . 255
24.2 Loi usuelle . . . 258
24.3 Espérance et compagnie . . . 259

25 Les séries **265**
25.1 Séries usuelles . . . 265
25.2 Trouver la nature . . . 269
25.3 Calculer la somme . . . 272

26 Fonctions de deux variables **277**
26.1 Calculer une dérivée partielle . . . 277
26.2 Les extremums . . . 279
26.3 Les approximations . . . 282
26.4 Autres . . . 283

27 Espaces préhilbertiens réels **287**
27.1 Propriétés de base 287
27.2 Bases orthonormées 291
27.3 Projection orthogonale 293

CHAPITRE 1

LOGIQUE, ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1.1 Éléments de logique

Quelques notions à retenir de votre chapitre de logique :

- **Comment nier $\mathcal{P}$, comment exprimer $\bar{\mathcal{P}}$** : Pour nier une proposition $\mathcal{P}$, on va la décomposer (avec des "ou", des "et" et des implications) en propositions élémentaires que l'on va nier, remplacer les ou par des et, les et par des ou, les "Pour tout" par des "Il existe" et les "Il existe" par des "Pour tout". La négation de la proposition : "Tous les habitantes de la rue du stand qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des graveuses de talent que l'on peut retrouver au N58 et auront un bon point avant 50 ans" est donc la proposition "Il existe une habitante de la rue du stand qui porte des lunettes ou des chapeaux qui n'est pas une graveuse de talent que l'on peut retrouver au N58 ou qui n'aura pas de bon point avant 50 ans".
- **Comment mener un raisonnement par l'absurde/par contraposée :** Ce sont deux raisonnements proches, à ne pas confondre :
  - **Par l'absurde :** Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On sait que $\mathcal{P}$ est vraie et on souhaite démontrer que $\mathcal{Q}$ est vraie. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer $\mathcal{Q}$ fausse, i.e. $\overline{\mathcal{Q}}$ vraie, et d'aboutir à une contradiction. On pourra alors conclure que l'hypothèse "$\mathcal{Q}$ fausse" est une hypothèse fausse, ce qui signifie que $\mathcal{Q}$ est vraie. Ce type de raisonnement est intéressant quand la proposition $\overline{\mathcal{Q}}$ est plus exploitable que la proposition $\mathcal{Q}$.
  - **Par contraposée :** Pour démontrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose $\mathcal{Q}$ fausse et on prouve que $\overline{\mathcal{P}}$ est alors vraie. On peut alors conclure que, par contraposée, $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ car on a équivalence entre $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\bar{\mathcal{Q}} \Rightarrow \bar{\mathcal{P}}$.
- **Comment mener un raisonnement par équivalence :** Pour montrer que $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, on peut d'abord montrer que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ puis on prouve que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$. Cela signifie qu'on suppose $\mathcal{P}$ vraie et on montre alors que $\mathcal{Q}$ est vraie puis on fait la réciproque. On peut aussi raisonner directement par équivalence. C'est le cas, entre autres, si on a à notre disposition des fonctions bijectives ($x \mapsto \exp(x)$ par exemple), si on résout un système par opérations élémentaires, si on est dans des conditions favorables pour utiliser un théorème donnant une équivalence...

- **Comment mener un raisonnement par Analyse-Synthèse :** On cherche à prouver qu'il existe un unique objet vérifiant une propriété $\mathcal{P}$. Le raisonnement par Analyse-Synthèse se passe en deux étapes :
  - **Analyse :** On suppose avoir trouvé un objet vérifiant $\mathcal{P}$ et on tire les conséquences du fait que cet objet vérifie $\mathcal{P}$. On cherche donc les caractéristiques de ces objets. À la fin de cette phase, on a une liste d'un certain nombre d'objets susceptibles de marcher mais dont on n'est pas sûr qu'ils marchent. À ce stade là, ce dont on est sûr, c'est que les autres, ceux qui ne sont pas dans notre liste, ne vérifient pas le problème !
  - **Synthèse :** Dans cette phase, on teste tous les objets de liste précédente. Cela nous permet d'éliminer les solutions parasites. Si, à la fin, on obtient un unique objet marchant, on aura bien prouvé l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant $\mathcal{P}$.

Colle 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit paire, h impaire et $f = g + h$.

Le plus simple est probablement de partir sur un raisonnement par analyse-synthèse !

On va faire un raisonnement par analyse/synthèse.

- **Analyse :** Supposons qu'il existe un couple de fonctions (g, h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit paire, h impaire et $f = g + h$. Soit x un réel, en exploitant la parité de g et l'imparité de h, on a alors :

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

  Or, on sait que $f(x) = g(x) + h(x)$. On a donc, pour tout réel x, les deux égalités suivantes :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

  On a donc un seul objet susceptible de marcher (un seul, pas deux car on cherche un couple !). On aura donc zéro ou une solution.
- **Synthèse :** On définit les fonctions g et h par :

$$\text{Pour tout réel } x,\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Soit x un réel, on a :

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \qquad h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$$

donc g est paire et h impaire. Quand on ajoute g et h, on obtient bien f. On a donc obtenu l'unicité et l'existence par Analyse-Synthèse !

1.2 Ensembles

Voici les différentes tâches les plus classiques que l'on vous posera :

- **Comment montrer que** $E \subset F$**,** $E = F$ **:** $E = F$ se prouve en démontrant que $E \subset F$ et $F \subset E$ (raisonnement par double inclusion). Une simple inclusion suffit pour avoir l'égalité si E et F sont de cardinal fini et si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$. Pour prouver que $E \subset F$, on prend x, un élément quelconque de E, et on montre que x est nécessairement dans F. Parfois, à l'aide des propriétés du cours comme la distributivité, l'associativité, les lois de Morgan, on peut prouver l'inclusion sans avoir à redescendre jusqu'au niveau de l'élément.
- **Comment prouver et utiliser que** $x \in A \cup B$ **:** On prend un élément x. Deux grandes techniques pour prouver que $x \in A \cup B$:
  1. Première technique, celle du bilan. On fait une hypothèse, on prouve alors que x est dans un ensemble A. On fait une autre hypothèse, on prouve que x est dans B. Si nos hypothèses recouvrent tous les cas possibles que peut rencontrer x alors on peut affirmer que x appartient à $A \cup B$.
  2. Deuxième technique, celle de l'ajout d'hypothèse. Pour montrer que $x \in A \cup B$, il suffit de prouver que si $x \notin B$, alors $x \in A$.

  Quand on nous dit que $x \in A \cup B$, on ne sait pas si x est dans A ou dans B mais on est sûr qu'il est au moins dans l'un des deux ! Pour exploiter cette information, il suffit de distinguer les cas :
  — Si x est dans A alors... blabla...
  — Si x est dans B alors... blabla...
  et de faire une conclusion ! L'avantage de procéder ainsi est de pouvoir exploiter les propriétés de A (dans le premier cas) puis de B (second cas).
- **Comment montrer que** $x \in \bar{A}$ **:** On réalise souvent cette tâche par l'absurde. On suppose que $x \in A$ et on se rend compte qu'il y a comme un problème. Cette idée de l'absurde est assez naturelle car $\bar{A}$ est défini lui-même par "négativité", ce sont les x de E tels que $x \notin A$.

Colle 2

Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que $(B \backslash C) \cup (A \backslash C) = (B \cup A) \backslash C$.
2. Montrer que $(B \cup A) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Faire un raisonnement par double inclusion pour la première question. Par contre, inutile de revenir aux éléments pour la seconde ! Ne pas hésiter à exploiter les opérations sur les ensembles (distributivité et compagnie).

1. Soit x un élément de $(B\backslash C)\cup(A\backslash C)$.
   - **Cas 1 :** On suppose que x appartient à $B\backslash C$. x est dans B donc en particulier dans $B\cup A$. x n'appartient pas à C. x appartient donc à $(B\cup A)\backslash C$.
   - **Cas 2 :** On suppose que x appartient à $A\backslash C$. On prouve de même que x appartient à $(B\cup A)\backslash C$.

   Bilan : x appartient à $(B\cup A)\backslash C$. Cela nous permet d'affirmer la première inclusion : $(B\backslash C)\cup(A\backslash C)\subset(B\cup A)\backslash C$.

   Supposons désormais que x est un élément de $(B\cup A)\backslash C$. x n'appartient donc pas à C et x appartient à $B\cup A$.
   - **Cas 1 :** On suppose que x appartient à B. x est dans B et x n'appartient pas à C. x appartient donc à $B\backslash C$.
   - **Cas 2 :** On suppose que x appartient à A. On prouve de même que x appartient à $A\backslash C$.

   Bilan : x appartient à $(B\backslash C)\cup(A\backslash C)$ ce qui prouve que : $(B\cup A)\backslash C$ est inclus dans $(B\backslash C)\cup(A\backslash C)$. Par double inclusion, on a donc prouvé l'égalité souhaitée !
2. En utilisant la distributivité de l'union sur l'intersection, on obtient :

$$(B\cup A)\cap(B\cup C)=B\cup(C\cap A)\,.$$

   Par distributivité, on en déduit :

$$\begin{aligned}(B\cup A)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)&=(B\cup(C\cap A))\cap(C\cup A)\\&=(B\cap(C\cup A))\cup((C\cap A)\cap(C\cup A))\\&=(B\cap(C\cup A))\cup(C\cap A)\\&=((B\cap C)\cup(B\cap A))\cup(C\cap A)\,.\end{aligned}$$

Colle 3

Soit E un ensemble non vide. Soit A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que si $\chi_A=\chi_B$ (χ_A état l'application caractéristique, définition rappelée dans l'indication juste après si besoin est) alors $A=B$.
2. Montrer que $\chi_A^2=\chi_A$, $\chi_{\bar{A}}=1-\chi_A$, $\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B$ et $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$.
3. En déduire que $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$ en rappelant que $A\triangle B$ est $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$, soit l'ensemble des éléments qui sont ou bien dans A, ou bien dans B.

On rappelle que : $\chi_A : \begin{cases} E & \to \{0;1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \end{cases}$. Si f et g sont deux applications d'ensemble de départ E, $f = g$ signifie que $f(x) = g(x)$ pour tout x de E. Calculer donc $\chi_A(x) \times \chi_A(x), \chi_{\bar{A}}(x), \chi_{A\cap B}(x)$ (en pensant à distinguer les cas afin de pouvoir expliciter ces objets). Pour la dernière question, pensez à faire la synthèse de ce qui a été vue.

1. Supposons donc que $\chi_A = \chi_B$ et prenons un x dans A alors $\chi_A(x) = 1$ et donc $\chi_B(x) = 1$ (car $\chi_A = \chi_B$) et donc $x \in B$... ce qui prouve que $A \subset B$ puis, comme l'autre sens est similaire, que $A = B$. On remarque que la réciproque est évidente, on a donc : $\chi_A = \chi_B \iff A = B$.
2. Fixons un x dans E pour toute la question.
   - Si $x \in A$ alors $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_{\bar{A}}(x) = 0$ donc $\chi_A(x) = \chi_A(x) \times \chi_A(x)$ et $\chi_A(x) = 1 - \chi_{\bar{A}}(x) = 0$.
   - Si $x \notin A$ alors $\chi_A(x) = 0$ et $\chi_{\bar{A}}(x) = 1$ et donc $\chi_A(x) = \chi_A(x) \times \chi_A(x)$ et $\chi_A(x) = 1 - \chi_{\bar{A}}(x) = 0$.

   On a donc $\chi_A(x) \times \chi_A(x) = \chi_A(x) = (1 - \chi_{\bar{A}})(x)$ pour tout x de E d'où $\chi_A \times \chi_A = \chi_A = 1 - \chi_{\bar{A}}$.
   - Si $x \in A \cap B$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$ et donc, on constate qu'on a bien : $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$.
   - Si $x \in B \backslash A$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = 0$ et $\chi_B(x) = 1$ et donc de nouveau, on a : $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$.
   - Si $x \in A \backslash B$... cas similaire !
   - Si $x \in E \backslash (A \cup B)$ alors on a encore $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$ car $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$.

   On peut donc finalement bien conclure que $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$ car ces deux applications ont même image. On procède à la même découpe pour $\chi_{A\cup B}$.
3. En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{((A\triangle B)\backslash C)\cup(C\backslash(A\triangle B))} \\ &= \chi_{(A\triangle B)\backslash C} + \chi_{C\backslash(A\triangle B)} - \chi_{((A\triangle B)\backslash C)\cap(C\backslash(A\triangle B))} \end{aligned}$$

   Or : $\chi_{((A\triangle B)\backslash C)\cap(C\backslash(A\triangle B))} = \chi_\emptyset$ et $\chi_\emptyset : x \mapsto 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{(A\triangle B)\backslash C} + \chi_{C\backslash(A\triangle B)} \\ &= \chi_{(A\triangle B)\cap \bar{C}} + \chi_{C\cap\overline{(A\triangle B)}} \\ &= \chi_{A\triangle B}(1 - \chi_C) + \chi_C(1 - \chi_{A\triangle B}) \text{ d'après la question 2} \end{aligned}$$

   De la même manière :

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A\chi_{\bar{B}} + \chi_B\chi_{\bar{A}} = \chi_A(1 - \chi_B) + \chi_B(1 - \chi_A) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

   et donc :

$$\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_C\chi_B + 4\chi_A\chi_B\chi_C$$

   On fait la même chose pour $\chi_{A\triangle(B\triangle C)}$ et on se rend compte qu'on a la même chose. Comme $\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle(B\triangle C)}$, d'après la question 1, on peut donc affirmer que : $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

1.3 Applications

Dans ce chapitre, on vous demandera de prouver qu'on a une injection/surjection/bijection et on vous demandera de jouer un peu avec la notion de fonction réciproque. Quelques détails :

- **Comment montrer qu'on a une injection :** Comme le suggère la définition même d'une injection, les deux grandes techniques pour montrer que f est injective sont les suivantes :
  1. **Première technique : résolution de l'équation** $y = f(x)$. On prend y un élément quelconque de l'espace d'arrivée puis on s'intéresse à l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x élément de l'espace de départ (x est l'inconnue, y est fixé) et on montre que, pour n'importe quel y, cette équation a au plus une solution (donc 0 ou 1 à chaque fois).
  2. **Deuxième technique : on part de** $f(x) = f(x')$. On prend x et x' deux éléments de l'espace de départ tels que $f(x) = f(x')$. On prouve qu'on a automatiquement $x = x'$. Si tel est le cas, on pourra alors conclure que f est injective.

  Ne pas hésiter aussi à représenter f si f est une fonction numérique d'une variable réelle, vous lirez sur le graphe le nombre d'antécédent pour tout point de l'espace d'arrivée. À noter aussi que la composée de deux injections est une injection ainsi que la grande utilité des injections : si on a une injection f entre deux ensembles E et F, il est alors équivalent de prouver $x = x'$ (avec x et x' deux éléments de E) et $f(x) = f(x')$. Pour comparer des éléments de E, il suffit donc d'utiliser f et comparer ceux de F.
- **Comment montrer qu'on a une surjection :** Pour montrer que f est surjective, on résout l'équation $y = f(x)$ où y est un élément quelconque fixé de l'ensemble d'arrivée et où x est l'inconnue et appartient à l'ensemble de départ. Montrer que f est une surjection revient à prouver que cette équation a toujours au moins une solution (au moins... donc si vous en trouvez 1, 2 ou 10, ça rentre dans le cadre... c'est juste 0 qu'on ne veut pas !). Ne pas hésiter aussi de nouveau à représenter f si f est une fonction numérique d'une variable réelle, vous lirez sur le graphe si chaque point de l'espace d'arrivée est atteint au moins une fois. Souvenez-vous aussi que la composée de deux surjections est une surjection. À noter aussi la grande utilité des surjections : si on a une surjection f entre deux ensembles E et F, tous les éléments de F peuvent s'écrire sous la forme $f(x)$ avec x dans E. On relie par cette méthode les éléments de E et ceux de F.
- **Comment montrer qu'on a une bijection :** Voici les trois grandes techniques pour montrer que f est bijective :
  1. **Première technique : injection et surjection**. C'est la méthode de base. On montre que f est injective puis que f est surjective.
  2. **Deuxième technique : résolution de l'équation** $y = f(x)$. On résout l'équation $y = f(x)$ où y est un élément quelconque fixé de l'ensemble d'arrivée et où x est l'inconnue et appartient à l'ensemble de départ. Montrer que f est une bijection revient à prouver que cette équation a toujours exactement une solution.

3. **Troisième technique : en cherchant la réciproque**. Si on explicite une fonction g telle que $g \circ f = id_G$ et $f \circ g = id_F$ alors on peut affirmer que f est bijective (et g est sa réciproque au passage).

Ne pas hésiter aussi de nouveau à représenter f si f est une fonction d'une variable réelle, vous lirez sur le graphe si chaque point de l'espace d'arrivée est atteint précisément une fois, pensez aussi dans ce cas au théorème de la bijection continue. Souvenez-vous aussi que la composée de deux bijections est une bijection.

- **Comment exprimer la réciproque :** Cela peut être immédiat par composition car on sait que, si f et g sont bijectives et si $f \circ g$ existe alors $f \circ g$ est bijective et sa réciproque est $g^{-1} \circ f^{-1}$. Autre chose à noter avant de faire de façon classique, si on trouve g telle que $g \circ f = id_G$ et $f \circ g = id_F$ alors on peut affirmer que f est bijective et f^{-1} est g. La plupart du temps, pour expliciter une réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x élément du départ et où y est un élément fixé de l'espace d'arrivée. On trouve une unique solution x qu'on exprime en fonction de y. On a donc : $y = f(x) \Leftrightarrow x = h(y)$ avec h une fonction qui s'avère être la réciproque cherchée !Attention, ne parlez pas de la réciproque tant que vous n'avez pas prouvé son existence !

Colle 4

Soit E un ensemble non vide et f, g et h des applications de E dans E.

1. Démontrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective et $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
2. En déduire que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective $\Rightarrow g, f$ et h bijectives.
3. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\Rightarrow f, g$ et h bijectives.

Pensez à bien exploiter les propriétés vues dans la première question dans les questions 2 et 3. Pour la première question, on attend une démonstration (même si c'est dans votre cours). Relisez ce qu'on a écrit sur les façons de faire pour prouver qu'on a une injection, surjection.

1. Ça fait partie de votre cours mais visiblement, ici, on nous demande de le redémontrer alors on s'exécute. On suppose $g \circ f$ injective. Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. On a alors, en composant par g, $g(f(x)) = g(f(x'))$ soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ et donc $x = x'$ car $g \circ f$ est injective. Donc $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. f est donc injective. On suppose maintenant $g \circ f$ surjective. Soit y un élément de E, il existe donc un x dans E tel que $(g \circ f)(x) = y$. On peut écrire cela sous la forme suivante : $g(f(x)) = y$. y a donc un antécédent par g, c'est $f(x)$. g est donc bien surjective.
2. On suppose $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives et $f \circ h \circ g$ surjective.

   On ne va pas résoudre d'équation, on exploite la première question. Pensez toujours à relier les questions entre elles !

D'après 1), on a donc f injective, h injective et f surjective. f est donc bijective, on introduit f^{-1}. f^{-1} est bijective donc en particulier surjective et donc, par composition, $f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$ est surjective i.e. $h \circ g$ est surjective et donc h est surjective. Or h est injective donc h est bijective. h^{-1} existe donc et, par composition, $h^{-1} \circ (h \circ g)$ est surjective et donc g est surjective. Or $g \circ f \circ h$ est injective donc $(g \circ f \circ h) \circ h^{-1} \circ f^{-1}$ l'est et donc g est injective.

3. On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. $g \circ f$ est donc surjective donc g l'est (toujours d'après 1)) et $h \circ g$ est injective donc g l'est (toujours d'après 1)). g est donc bijective, et, par composition, f, qui est $g^{-1} \circ (g \circ f)$, l'est ainsi que h qui est $(h \circ g) \circ g^{-1}$.

Colle 5

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \mapsto \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right) \end{cases}$.
   (a) Montrer que h est bijective et expliciter h^{-1}.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ telles que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(h(x)) - af(x) = e^x$.
2. Soit $f : x \mapsto ax + b + |x|$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit bijective puis trouver alors f^{-1}.

Pour la première question, ne procédez pas en deux temps. Démontrez que h est bijective en explicitant sa réciproque. Pensez à faire intervenir h^{-1} dans la suite. Pour la deuxième question, débarrassez vous de la valeur absolue en distinguant les cas. utilisez le théorème de la bijection continue (théorème appelé théorème de la valeur intermédiaire en terminale). Dérivez si vous le pouvez !

1.(a) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{2\})^2$. On a :

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} = y \Leftrightarrow x(2-y) = -2y+1 \Leftrightarrow x = h(y)$$

Donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{2\})^2, h(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$. (Remarque : on peut bien exclure 2 du domaine de recherche car $\dfrac{2x-1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow 0 = -4+1$, ce qui est faux !). Tout élément y de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ a donc un unique antécédent par h, c'est $h(y)$. h est donc bijective et h^{-1} est h (On peut d'ailleurs vérifier que $h \circ h = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}\setminus\{2\})}$).

(b) Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. On suppose que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, on a : $f(h(x)) - af(x) = e^x$. Posons $y = h(x)$, on a donc $f(y) - af(h^{-1}(y)) = e^{h^{-1}(y)}$, soit $f(y) - af(h(y)) = e^{h(y)}$ car $h = h^{-1}$ et donc, pour tout y de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(y) - af(h(y)) = e^{h(y)}$. Fixons x un

élément de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Comme x et y sont des variables muettes, on en déduit :

$$f(h(x)) - af(x) = e^x \text{ et } f(x) - af(h(x)) = e^{h(x)}$$

et donc $(1-a^2)f(x) = e^{h(x)} + ae^x$, soit, comme $1-a^2 \neq 0$, le résultat suivant :

$$f(x) = \frac{e^{h(x)} + ae^x}{1-a^2} = \frac{\exp\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right) + a\exp(x)}{1-a^2}.$$

Réciproquement, cette fonction vérifie la condition imposée.

2. f est par somme continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a :

$$f : x \mapsto \begin{cases} (a+1)x + b \text{ si } x \geqslant 0 \\ (a-1)x + b \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et donc } f' : x \mapsto \begin{cases} (a+1) \text{ si } x > 0 \\ (a-1) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On est mieux quand on se débarrasse de la valeur absolue !

Du signe de f', on en déduit les variations de f.

Cas $a < -1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	b	↘	$-\infty$

Cas $|a| < 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	b	↗	$+\infty$

Cas $a > 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	b	↗	$+\infty$

On vous laisse faire les tableaux des cas $a = 1$ et $a = -1$.

Ainsi f n'est pas injective si $|a| \leqslant 1$ puisqu'on voit que les éléments de $]b, +\infty[$ sont atteints deux fois). f n'est donc pas bijective si $|a| \leqslant 1$ et f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (appliquez le théorème de la bijection continue grâce à la stricte monotonie et la continuité) si et seulement si $a < -1$ ou $a > 1$. On va maintenant expliciter la réciproque. On suppose $a > 1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + b + x \text{ si } x \geqslant 0 \\ y = ax + b - x \text{ si } x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \begin{cases} \dfrac{y-b}{a+1} \text{ si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{y-b}{a-1} \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{car } a+1 \neq 0 \text{ et } a-1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \begin{cases} \dfrac{y-b}{a+1} \text{ si } y \geqslant b \\ \dfrac{y-b}{a-1} \text{ si } y \leqslant b \end{cases} \quad \text{car } a > 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f^{-1} : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{y-b}{a+1} \text{ si } y \geqslant b \\ \dfrac{y-b}{a-1} \text{ si } y \leqslant b \end{cases}$. On vous laisse faire le cas $a < -1$ et obtenir de la même façon que : $f^{-1} : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{y-b}{a+1} \text{ si } y \leqslant b \\ \dfrac{y-b}{a-1} \text{ si } y \geqslant b \end{cases}$

CHAPITRE 2

RÉCURRENCE, SOMME ET PRODUIT FINIS

2.1 Récurrence

On souhaite démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier n est vraie au-delà d'un certain entier n_0 fixé (qui est souvent 0 ou 1). Pour faire une récurrence, on commence par énoncer clairement la proposition $\mathcal{P}(n)$ que l'on va démontrer (c'est l'étape 1, l'introduction). La suite du raisonnement dépend du type de récurrence que l'on va mener. Dès qu'on voit une propriété dépendant d'un entier, on peut se poser la question de la récurrence. Avant de vous lancer dans une récurrence, essayez toujours le calcul direct (c'est-à-dire prouver directement votre propriété en utilisant une proposition du cours ou en effectuant un calcul) qui a l'avantage d'être plus rapide ! Si le calcul direct n'aboutit pas et qu'on peut enchaîner logiquement $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n)$ apporte une information cruciale sur $\mathcal{P}(n+1)$) alors on peut envisager une récurrence faible. On retrouvera souvent ce raisonnement tout au long de ce livre. Notez par avance un certain nombre de cas classiques où les récurrences interviendront :

- **Suites :** Très très souvent ! Notamment lors de la recherche du terme général ou pour des histoires de croissance...
- **Dérivabilité :** Typiquement quand on veut calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction.
- **Intégration :** Quand on a une suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on veut expliciter. Il est alors classique de mêler intégration par parties et récurrence.
- **Matrices :** La récurrence intervient surtout pour le calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ des matrices.
- **Polynômes :** Quand on a une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on veut évaluer le degré ou la parité.
- **Probabilité :** La récurrence peut intervenir en probabilité quand on étudie une expérience qui se passe en plusieurs étapes et qu'on a besoin de savoir ce qui s'est passé avant pour pouvoir parler de la $n^{\text{ième}}$ étape (n tirages sans remise par exemple).

Pour **mener une récurrence faible**, on démontre (on ne se contente pas de l'écrire) que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (Initialisation), on prouve ensuite que notre propriété est héréditaire (cela veut dire qu'on fixe n un entier quelconque supérieur à n_0 et que l'on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, on montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie). On termine par la conclusion, il suffit de rappeler que l'on a prouvé que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$, on conclut en disant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence. C'est la récurrence la plus classique.
Pour **mener une récurrence double**, on démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (Initialisation), on prouve ensuite que, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies avec n un entier supérieur à n_0 alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. On conclut en rappelant que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$, on peut donc dire que $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout entier n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence double.
Pour **mener une récurrence forte**, on démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie puis on fixe n un entier supérieur à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1)$, $\cdots$, $\mathcal{P}(n)$ vraies. On montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie. On conclut en rappelant que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n_0)$, $\cdots$, $\mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(n+1)$, on peut donc dire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence forte.

Colle 1

1. Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 2\cos(a) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\cos(a)u_{n+1} - u_n.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2\cos(na)$.

2. Expliciter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

3. Expliciter $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} u_k.$$

Une récurrence double pour la question 1, une récurrence simple pour la question 2, et enfin ne récurrence forte pour la question 3. Pour la première question, vous aurez besoin de la formule de $\cos(a+b)$, pour la question 3 de la formule sur les sommes géométriques. Questions 2 et 3, on ne vous dit pas ce qu'il faut démontrer, il faut donc intuiter une formule en calculant les premiers termes...

1. Pour tout entier naturel n, on appelle donc $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse : "$u_n = 2\cos(na)$". On sait que $u_0 = 2$ et $2\cos(0 \times a) = 2$, $\mathcal{P}_0$ est donc vraie. $2\cos(1 \times a) = 2\cos(a)$ et u_1 est $2\cos(a)$, $\mathcal{P}_1$ est donc vraie. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies pour un certain entier naturel n. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2\cos(a)u_{n+1} - u_n \\ &= 2\cos(a) \times 2\cos((n+1)a) - 2\cos(na) \text{ d'après } \mathcal{P}_n \text{et } \mathcal{P}_{n+1} \\ &= 4\cos(a)\left(\cos(na)\cos(a) - \sin(na)\sin(a)\right) - 2\cos(na) \\ &= 2(2\cos^2(a) - 1)\cos(na) - 4\cos(a)\sin(a)\sin(na) \\ &= 2\cos(2a)\cos(na) - 2\sin(2a)\sin(na) \\ &= 2\cos((2+n)a). \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie si $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ le sont. On a donc prouvé que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies et que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$. $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence (double).

2. Pour tout n entier naturel, on appelle $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n = (n+1)^2"$$

> On a calculé les premiers termes pour intuiter cette formule...

$u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit n un entier naturel. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, on a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2n + 3 + (n+1)^2 \\ &= 2n + 3 + n^2 + 2n + 1 \\ &= n^2 + 4n + 2^2 \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$. $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on appelle $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n = 2^{n-1} ".$$

> On a calculé les premiers termes pour intuiter cette formule...

Comme $u_1 = u_0$, on a $u_1 = 1$. Or $2^{1-1} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit m un certain entier naturel non nul. on suppose que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$,..., $\mathcal{P}(m)$ sont toutes vraies. On a :

$$\begin{aligned}
u_{m+1} &= u_0 + \sum_{k=1}^{m} u_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \text{ d'après } \mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(m) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \text{ en décalant les indices} \\
&= 1 + \frac{1-2^m}{1-2} \text{ (cf. cours sur les suites géométriques)} \\
&= 2^m.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(m+1)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(m)$ le sont. $\mathcal{P}(1)$ est vraie et, pour tout entier n naturel non nul, $\mathcal{P}(1)$, $\cdots$, $\mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(n+1)$. $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n non nul d'après le principe de récurrence forte.

2.2 Sommes classiques

Pour les sommes, vous devez savoir :

- **Couper les sommes en deux :**

$$\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) + \sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{n} (a_k + x_k) \text{ et } \left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) + \sum_{k=q+1}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k.$$

- **Mettre en facteur** (Signalons au passage que λ est un complexe ne doit pas dépendre de k !) :

$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \times \left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right)$$

- **Faire un changement d'indice** (On a posé $j = k + m$ avec m entier fixé, positif ou négatif) :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m}$$

en particulier $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{n+1} a_{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p-1}^{n-1} a_{k+1}$.

mais **vous devez surtout maîtriser les sommes classiques !** Les voici :

- **Somme géométriques :** Soit q un complexe différent de 1, on sait que :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- **Somme d'Euler :** $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ à maîtriser !
- **Formule du binôme de Newton :** Quand se mêlent des histoires de somme et de coefficient binômial on s'attend probablement à utiliser la formule du binôme de Newton qui affirme que :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

avec z_1 et z_2 des complexes. Si vous n'avez pas pile la formule du binôme de Newton, pensez à faire des décalages d'indice et aussi, si un k vous gêne, à utiliser la formule du pion $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) = \frac{n}{p}\left(\begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array}\right)$.

- **Somme télescopique :** On cherche à calculer $\sum_{k=p}^{n} a_k$ et on trouve des $u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{n+1}$ tels que, pour tout k de $[\![p, n]\!]$, on ait $a_k = u_{k+1} - u_k$. On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p.$$

Il suffit d'expliciter les termes et de barrer tous ceux qui s'éliminent tout simplement !

Petite remarque, notez qu'il est classique de retenir les formules de somme géométrique et de somme arithmétique sous la forme suivante :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

$$\sum_{k=p}^{n} g_k = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison différente de 1.

Colle 2

Soit n un entier supérieur à 2.

1.(a) Pour tout entier k de $[\![2, n]\!]$, relier $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-2}{k-2}$.

(b) En déduire $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

2. On pose $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. On n'utilisera pas l'explicitation de B_n qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.

(a) Exprimer D_n en fonction de C_n.

(b) Trouver une relation entre D_n, C_n et B_n basée sur le développement de $(k+1)^3$ et en déduire B_n.

Le binôme de Newton règne en maître dans la première question, il faut juste se mettre dans les conditions précises de ce théorème. On a donc besoin de se débarrasser de $k(k-1)$: Observez le dénominateur de $\binom{n}{k}$! Techniques à utiliser pour la deuxième question : changement d'indice et linéarité de la somme. Pour expliciter B_n, comparer les deux expressions trouvées pour D_n.

1.(a) Soit k un entier de $[\![2, n]\!]$. De $n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-2-k+2)!}$, on déduit :

$$n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = \frac{k(k-1)n!}{k(k-1)(k-2)!(n-k)!} = k(k-1)\binom{n}{k}.$$

C'est une généralisation de la formule du pion.

(b) On en déduit en utilisant à la fin la formule du binôme de Newton que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}1^j 1^{n-2-j} \\ &= n(n-1)(1+1)^{n-2} \\ &= n(n-1)2^{n-2}.\end{aligned}$$

De la relation $k(k-1)+k=k^2$ valable pour tout réel k, on en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\right)\\ &= \left(0+0+\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\right) + \left(0+\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\right)\\ &= n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n(n-1)2^{n-2} + n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j 1^{n-1-j}\\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.\end{aligned}$$

Vous noterez qu'on a utilisé la formule du pion et celle du binôme de Newton.

2. (a) Un petit changement d'indice au début :

$$D_n = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = C_n - 1 + (n+1)^3.$$

(b) Comme $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$ d'après la formule du binôme de Newton, d'où :

$$\begin{aligned}D_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \sum_{k=1}^{n} 1\\ &= C_n + 3B_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n.\end{aligned}$$

D'où : $C_n - 1 + (n+1)^3 = C_n + 3B_n + \dfrac{3n(n+1)}{2} + n$ ce qui nous donne ce résultat déjà connu :

$$B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.3 Sommes sur certains indices, sommes doubles

On s'intéresse d'abord à des sommes ne comportant que des indices pairs ou que des indices impairs. Pour les expliciter, l'idée est de compléter afin d'avoir tous les indices. On vous rappelle que :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \phi(2k) + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \phi(2k+1) = \sum_{k=0}^{n} \phi(k)$$

Cette formule n'a de sens que si vous utilisez précisément la même fonction pour les pairs et les impairs ! Une astuce classique que l'on utilise si on a, non pas

une somme mais une différence, consiste à exploiter le fait que $(-1)^{2k}$ est 1 et $(-1)^{2k+1}$ est -1, on en déduit :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\phi(2k)-\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\phi(2k+1)=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}(-1)^{2k}\phi(2k)+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}(-1)^{2k+1}\phi(2k+1)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\phi(k).$$

Parlons maintenant des double sommes. Pour calculer une double somme, on commence en général par expliciter la somme à l'intérieur puis on la somme. Quand cette double somme est délicate à calculer, on peut, pour déplacer un peu le problème, tenter d'intervertir les deux sommations. Quand les indices d'une double somme ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut intervertir sans problème les deux sommations :

$$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}\right).$$

Quand l'indice interne d'une double somme dépend de l'autre, on prend des précautions, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}a_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}\right)\quad\text{et}\quad\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}a_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}\right).$$

Pour retrouver, par exemple, le premier résultat, dites-vous que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}a_{i,j}\right)$ peut se traduire en termes indices par $1\leqslant j\leqslant i\leqslant n$. Si on veut que i devienne l'indice externe, on écrit ses variations maximales : $1\leqslant i\leqslant n$ et on laisse la notion de dépendance au niveau du nouvelle indice interne : $1\leqslant j\leqslant i$. On obtient donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}\right)$. On vous laisse faire le même raisonnement pour la deuxième somme !

Colle 3

1. Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$. Expliciter S_n.
2. On pose maintenant $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k} \right)$ avec n un entier naturel non nul. Expliciter S_n.
3. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose finalement :

   $S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n)$.

   Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ij \right)$ avec $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ et en déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

Pour la première question, pas de souci si vous pensez à introduire la somme T_n sur les indices impairs et expliciter $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. La deuxième question ne pose pas de difficulté, il suffit simplement d'intervertir les sommations. La troisième question est délicate. Vous savez expliciter $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ij \right)$ et σ_n. En étant bien organisé, en pensant à écrire aussi S_n sous forme d'une double somme, vous devriez trouver le $\frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}$ qu'on vous propose !

1. On pose donc : $T_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= \left(\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \right) + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\ &= 2^n \text{ d'après la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

On va utiliser une astuce classique : pairs+impairs, pairs- impairs. Cela donne deux égalités avec deux inconnues !

On a aussi :

$$\begin{aligned}S_n - T_n &= \left(\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}(-1)^{2k}\binom{n}{2k}\right) + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(-1)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k}\\ &= (1-1)^n \text{ d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Bref, on a $S_n + T_n = 2^n$ et $S_n - T_n = 0$ d'où S_n et T_n valent 2^{n-1}.

2. i et k ne jouant pas des rôles symétriques, intervertir les sommations peut donner de nouvelles informations. $\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k}$ est bien délicate à calculer, échangeons alors :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{k}{2} \text{ car } \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2k}\\ &= \frac{n\times(n+3)}{4}.\end{aligned}$$

3. De $S_n = (1\times 2 + 1\times 3 + \cdots + 1\times n) + (2\times 3 + \cdots + 2\times n) + \cdots + ((n-1)\times n)$, on déduit :

$$\begin{aligned}S_n &= \left(\sum_{i=2}^{n}(1\times i)\right) + \left(\sum_{i=3}^{n}(2\times i)\right) + \cdots + \left(\sum_{i=n}^{n}((n-1)\times i)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n}(j\times i)\right).\end{aligned}$$

On va échanger les sommes, les indices, décomposer :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} ij\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} ni\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \left(\sum_{i=j+1}^{n} ij\right)\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} ni\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right)\right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n} ij\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} ni\end{aligned}$$

Poursuivons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij &= \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i}^{n-1} ij\right)\right) + S_n + \sum_{j=1}^{n} nj \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j}^{n-1} ji\right)\right) + S_n + \sum_{j=1}^{n} nj \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j}^{n} ji\right)\right) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} nj\right) + S_n + \sum_{j=1}^{n} nj \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n} ji\right)\right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^2\right) + S_n + n^2 \\
&= S_n + S_n + \sigma_n
\end{aligned}$$

Rappelons maintenant que $\sigma_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, rappelons aussi que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$2S_n + \sigma_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$ donne alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2+3n-4n-2)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}.
\end{aligned}$$

2.4 Et les produits ?

Vous n'avez pas grand chose dans votre cours sur le produit, trois idées pour vous en sortir :

- **Couper le produit en deux :**

$$\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) \times \prod_{k=p}^{n} x_k = \prod_{k=p}^{n} (a_k \times x_k) \text{ et } \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \prod_{k=q+1}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{n} a_k$$