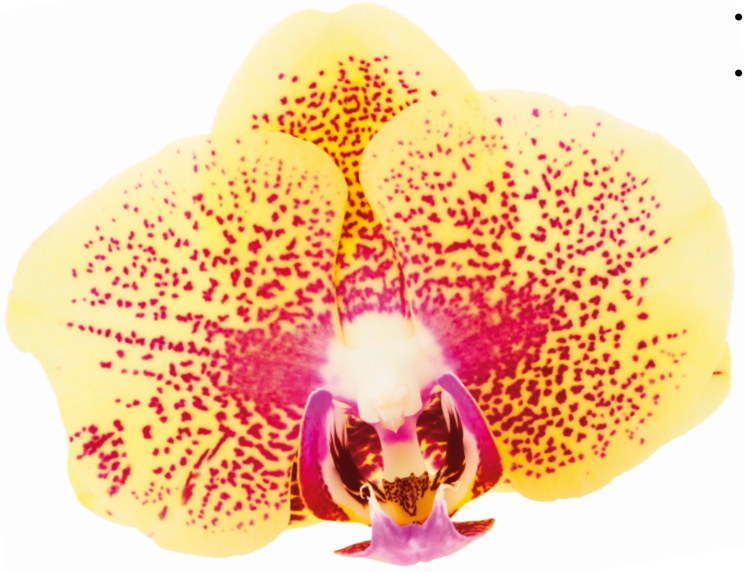
Céline Laurent-Reig

ECE2

Prépa-maths

Cours et exercices corrigés

- Cours complet et détaillé
- Points méthodes
- Exercices corrigés et applications
- Concours blancs



ellipses

Références sciences

Prépa-maths

Cours et exercices corrigés
ECE2

Céline Laurent-Reig

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-036666
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2020
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La classe préparatoire ECE est une filière d'excellence et d'ambition. Pendant deux ans, elle va vous faire acquérir un niveau élevé de connaissances ainsi que des compétences multiples dans le but de réussir les concours d'entrée aux grandes écoles de commerce.

Les épreuves de mathématiques que vous allez présenter sont composées de plusieurs exercices ou problèmes destinés à tester vos connaissances en la matière, ainsi que vos capacités à modéliser, à raisonner et votre aptitude à rédiger.

L'apprentissage et l'acquisition des connaissances sont d'abord primordiaux pour réussir : ce livre vous offre un **cours complet et détaillé** des notions de deuxième année ECE et est la suite complémentaire du premier tome *Prépa-maths* dédié au programme de première année. Tous les résultats sont commentés, illustrés et, lorsque cela est possible, démontrés : ce cours a été conçu ainsi pour vous permettre d'assimiler et de comprendre au mieux les notions et d'approfondir vos compétences. Des « **Points méthodes** » récurrents mettent en avant les techniques et savoir-faire indispensables à retenir. De nombreux **exemples et applications** éclairent et indiquent la mise en œuvre des notions. Il est important de savoir refaire ces exemples par vous-même.

Ensuite cet ouvrage vous propose **neuf concours blancs**. Il s'agit de vrais sujets de différentes écoles qui vous engagent dans un processus de modélisation de situations concrètes et mathématiques et de réinvestissement du cours pour les résoudre. C'est le meilleur entraînement en vue des concours. Tous les sujets sont corrigés à la fin du manuel. Ces corrigés vous présentent également la rédaction et les arguments attendus à chaque réponse.

Le premier concours blanc mobilise une grande partie des connaissances acquises pendant votre première année et vous permet ainsi de faire le point et de **bien démarrer la deuxième année**. Les autres concours blancs sont **progressifs tout au long des chapitres**. Ils permettent d'abord d'assimiler les nouvelles notions des chapitres dont ils font suite et reviennent également sur les notions des chapitres précédents et sur celles de première année afin de les consolider complètement au cours de l'année.

Ce livre a été écrit avec la volonté de vous accompagner pendant toute votre deuxième année et de vous amener à la réussite aux concours. Je dédie ce livre à Vincent, Françoise, Gilles, Anne-Charlotte, Paul, Anne-Marie et Liza et je tiens à remercier Marie-Gwenael Hamon pour sa relecture précieuse et pertinente. Je termine par mille pensées pour Claude.

Table des matières

Concours blanc n° 0 9

Chapitre 1. Espaces vectoriels 13

Chapitre 2. Applications linéaires 27

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes 47

Chapitre 4. Compléments sur les suites et les séries 63

Concours blanc n° 1 79

Chapitre 5. Compléments sur les fonctions 85

Chapitre 6. Intégrales généralisées à un intervalle quelconque 97

Chapitre 7. Couples de variables aléatoires discrètes 111

Concours blanc n° 2 127

Concours blanc n° 3 131

Chapitre 8. Suites de variables aléatoires discrètes 135

Chapitre 9. Fonctions de deux variables 143

Chapitre 10. Compléments sur les variables aléatoires 155

Concours blanc n° 0

(d'après EDHEC, 2018)

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que A n'est pas inversible.
2. Déterminer les vecteurs $v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $Av = 7v$.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = AM$.

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$. On la notera (A_3, A_4).

b) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3, E_4 puis donner une base de $\mathrm{Im}\, f$: on la notera (A_1, A_2).

5. Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2 :

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant face à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant pile à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais face.

1. a) Déterminer $P([X = 1])$.

b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ P([X = n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $P([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X-1)$ admet une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. a) Montrer que pour tout entier j supérieur ou égal à 2 :

$$P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$$

b) Montrer que pour tout entier i supérieur ou égal à 2 :

$$P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$$

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $P([X + Y = 1]) = \frac{2}{3}$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 3 :

$$[X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n-1]) \cup ([X = n-1] \cap [Y = 1])$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P([X + Y = n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder pile par 1 et face par 0.

a) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=grand(1,1,'uin',……,……)
x=1
if piece==0
      then lancer=grand(1,1,'uin',……,……)
      while lancer==0
            lancer=……
            x=……
      end
elseif piece==1
      then x=……
end
disp(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3 :

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}\mathrm{e}^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de cet exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On considère la variable aléatoire Y définie par :

$$Y = \frac{X^2}{2a}$$

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
b) On rappelle qu'en Scilab l'instruction `grand(1,1,'exp',m)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle d'espérance m. Écrire un script Scilab demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

Problème :

On considère la fonction f qui à tout réel x associe :

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : Étude de f
1. a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x réel.
c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que f est impaire.
b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Partie 2 : Étude d'une suite
On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n \mathrm{d}t$.

4. a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.
5. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
6. a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?
7. a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Chapitre 1.
Espaces vectoriels

Nous allons revoir la notion d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels : n'hésitez pas à relire le chapitre 15 du tome 1 de *Prépa-maths*. Nous avions alors travaillé surtout sur des espaces de matrices. Nous allons maintenant découvrir de nouveaux ensembles sous cette nomenclature d'espaces vectoriels.

I Espaces et sous-espaces vectoriels

I.1 Définitions

Définition 1 : On appelle $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{R}$-ev) tout ensemble E muni de deux opérations : une addition qui à tout couple (u, v) d'éléments de E associe $u + v$ élément de E et une multiplication par un réel qui à tout couple (λ, u) d'un réel et d'un élément de E associe $\lambda \times u$ (ou λu) élément de E telles que pour tous u, v, w éléments de E et pour tous λ, μ réels

a) $u + v = v + u$ b) $u + (v + w) = (u + v) + w$

c) il existe un vecteur nul 0_E vérifiant : $\forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$.

d) il existe pour chaque $u \in E$, un élément appelé symétrique ou opposé de u noté $-u$ et vérifiant $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$.

e) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ f) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

g) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ h) $1 \times u = u$

Les éléments u de E sont appelés des vecteurs et les réels λ des scalaires.

Définition 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $F \subset E$.

F est un sous-espace vectoriel (en abrégé ss-ev) de E lorsque $0_E \in F$ et F est stable par l'addition et la multiplication par un réel.

C'est-à-dire $0_E \in F$ et pour tous u et v éléments de F et pour tout λ réel, $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$ (ou de façon équivalente $u + \lambda v \in F$).

I.2 Exemples de référence

a) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev. En effet il est muni d'une addition et d'une multiplication entre réels vérifiant toutes les conditions de la définition. Son vecteur nul est le zéro réel 0 et l'opposé de x réel est $-x$.

b) Soit n un entier naturel non nul et E_1, E_2, … , E_n des $\mathbb{R}$-ev.
Alors leur produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, ensemble qui regroupe tous les n-uplets $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ avec $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$, … , $u_n \in E_n$, est un $\mathbb{R}$-ev avec les opérations suivantes : on définit, pour tout λ réel, pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et pour tout $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, l'addition par

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

et la multiplication par un réel par $\lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$.
En particulier $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ encore noté $\mathbb{R}^n$, ensemble de tous les n-uplets de réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, est un $\mathbb{R}$-ev.
Son vecteur nul est $(0,0,\ldots,0)$ et l'opposé de $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

c) Soit D une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $E = \mathbb{R}^D$ des applications définies sur D et à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-ev. Son vecteur nul est l'application constante égale à 0 notée f_0 et l'opposé de f appartenant à E est l'application $-f$.
En particulier l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vues comme des applications définies sur $D = \mathbb{N}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

d) Soit n et p deux entiers non nuls. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev. De plus la matrice nulle dont tous les coefficients sont nuls notée $0_{n,p}$ est le vecteur nul et la matrice $-A$ est l'opposé de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n et du polynôme nul, et $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble de tous les polynômes, sont des $\mathbb{R}$-ev.
Leur vecteur nul est le polynôme nul (par convention de degré $-\infty$) et l'opposé du polynôme P est $-P$.

Exemple 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dans chacun des cas suivants.
a- F est le sous-ensemble des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ dans E espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$.
b- $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}[X]$ espace vectoriel des polynômes.
c- F est le sous-ensemble des suites convergentes dans E espace vectoriel des suites réelles.

a- L'application constante nulle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le vecteur nul de E appartient bien à F.
Soit f et g deux applications de F et λ un réel. En particulier f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f + \lambda g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme, c'est-à-dire $f + \lambda g$ appartient aussi à F.
Au final F est un ss-ev de E.

b- Le polynôme constant nul associe l'image 0 à 0 donc le vecteur nul de E appartient bien à F.

Soit P et Q deux polynômes de F et λ un réel. En particulier $P(0) = 0$ et $Q(0) = 0$. On obtient $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$. Donc $P + \lambda Q \in F$.
Au final F est un ss-ev de E.

c- La suite constante nulle converge vers 0 donc le vecteur nul de E appartient bien à F.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F et λ un réel. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel m. D'où par limite d'un produit et d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lambda v_n = l + \lambda m$ et $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite convergente de F.
Au final F est un ss-ev de E.

I.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n scalaires.
Le vecteur $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$.
On note $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ le sous-ensemble de E qui regroupe toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Remarque : En particulier pour $n = 1$, une combinaison linéaire de u_1 est un vecteur de la forme λu_1 avec λ scalaire et $\mathrm{Vect}(u_1)$ est le sous-ensemble de tous les vecteurs λu_1 avec λ scalaire quelconque.
De la même façon, pour $n = 2$, une combinaison linéaire de u_1, u_2 est un vecteur de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ avec λ_1, λ_2 scalaires et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est le sous-ensemble de tous les vecteurs $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ avec λ_1, λ_2 scalaires quelconques.

Propriété 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E
Alors $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Il est appelé sous-espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Exemple 2 : Montrer que les sous-ensembles F sont des ss-ev de E dans chaque cas suivant en les écrivant sous la forme d'un ss-ev engendré.
a- E est le $\mathbb{R}$-ev des suites réelles et F est le sous-ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
b- $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X]\ , \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

a- Les suites appartenant à F sont toutes les suites récurrentes du second ordre d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$. Cette équation admet deux racines 2 et -3. Ainsi
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2(-3)^n$
$\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$
D'où $F = \mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et F est un ss-ev de E.

b- Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ avec a, b, c réels.

$P \in F \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 at^2 + bt + c\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right]_0^1 = 0$
$\Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \Leftrightarrow P = aX^2 + bX - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = a\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(X - \frac{1}{2}\right)$
D'où $F = \mathrm{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$ et F est un ss-ev de E.

II Famille de vecteurs

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$-ev et F un ss-ev de E.

II.1 Famille génératrice

Définition 4 : Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ n vecteurs de E et $u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs de E.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est dite génératrice de E lorsque $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est dite génératrice de F lorsque $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Exemple 3 : On reprend l'exemple 2.
a- La famille $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est génératrice de F.
b- La famille $\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$ est génératrice de F.

Exemples de référence : a) La famille (1) constituée du seul réel 1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On construit dans $\mathbb{R}^n$ les n-uplets suivants :
$e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), e_3 = (0,0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)$
Ces n n-uplets constituent une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. La famille des $n \times p$ matrices élémentaires $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On rappelle que E_{ij} est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficient sont nuls sauf celui situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne qui vaut 1.

d) La famille des $(n+1)$ polynômes $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ où X^k représente l'application polynomiale qui à tout x réel associe x^k pour $k \in \mathbb{N}$. La famille de tous les polynômes X^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque : Les familles génératrices ne sont pas uniques. En effet soit (e_1, e_2) une famille génératrice de E : ainsi $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et tout vecteur u de E s'écrit donc comme combinaison linéaire de e_1, e_2, c'est-à-dire $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ avec λ_1 et λ_2 scalaires. Mais on peut encore écrire $u = \frac{\lambda_1}{2}(2e_1) + \frac{\lambda_2}{3}(3e_2)$: d'où $E \subset \mathrm{Vect}(2e_1, 3e_2)$. Or comme on a

immédiatement $\text{Vect}(2e_1, 3e_2) \subset E$, au final $E = \text{Vect}(2e_1, 3e_2)$ et $(2e_1, 3e_2)$ est une autre famille génératrice de E. Plus généralement si une famille est génératrice, alors la famille composée des mêmes vecteurs multipliés par des scalaires non nuls est encore génératrice.
Cette remarque est aussi valable pour les familles génératrices de F.

II.2 Famille libre

Définition 5 : Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E.
La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est dite libre lorsque pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on vérifie l'implication :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ \dots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$$

Sinon la famille est dite liée.

Remarques : 1/ Une famille liée vérifie la négation de cette définition : c'est-à-dire il existe n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ \dots + \lambda_n u_n = 0_E$ et tels qu'il existe au moins un $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $\lambda_k \neq 0$.
2/ Soit u un vecteur de E.
La famille constituée du seul vecteur (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
Attention ceci n'est valable que pour les familles constituées d'un seul vecteur.
3/ Soit u et v deux vecteurs de E.
La famille $(u, v, 0_E)$ est liée car on a $0 \times u + \ 0 \times v + 2 \times 0_E = 0_E$. Plus généralement si une famille compte le vecteur nul parmi ses vecteurs, elle est liée.
De même la famille (u, v, u) est liée car $1 \times u + \ 0 \times v + (-1) \times u = 0_E$. En effet si une famille comporte deux fois le même vecteur, elle sera liée.
Enfin la famille $(u, v, 2u + \ 3v)$ est liée car $(-2) \times u + (-3) \times v + (2u + \ 3v) = 0_E$. Si une famille comporte un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de cette famille, elle sera aussi liée.

Exemple 4 : Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.
a- $((1,1,2), (2,1,1), (-1,0,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
b- $(f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x, f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^x)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
c- $(X + 1, 2X^2 - X, X^3 - 3X + 2)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

a- Soit trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On résout :
$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,1,1) + \lambda_3(-1,0,1) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

En particulier $-(1,1,2) + (2,1,1) + (-1,0,1) = (0,0,0)$
Donc $((1,1,2),(2,1,1),(-1,0,1))$ est une famille liée.

b- Soit deux scalaires λ_1, λ_2. On résout $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 x \mathrm{e}^x = 0$$

En particulier pour $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$.
Ensuite pour $x = 1$, on doit vérifier $\lambda_1 \mathrm{e} + \lambda_2 \mathrm{e} = 0$. Comme on a déjà $\lambda_1 = 0$, on obtient $\lambda_2 \mathrm{e} = 0$, d'où $\lambda_2 = 0$
Donc $(f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x, f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^x)$ est une famille libre.

c- Soit trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On obtient par identification des coefficients :
$\lambda_1(X+1) + \lambda_2(2X^2 - X) + \lambda_3(X^3 - 3X + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda_3 X^3 + 2\lambda_2 X^2 + X(\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3) + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $(X+1, 2X^2 - X, X^3 - 3X + 2)$ est une famille libre.

II.3 Base

Définition 6 : Une base de E est une famille libre et génératrice de E.
Une base de F est une famille libre et génératrice de F.

Exemple 5 : Montrer que les sous-ensembles suivants sont des ss-ev de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de chacun d'eux.

a- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2y + 3z = 0\}$
b- $G = \{(a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) \in \mathbb{R}^3, a, b, c \text{ réels}\}$

a- $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow -x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 3z \Leftrightarrow (x,y,z) = (2y+3z, y, z)$
$\Leftrightarrow (x,y,z) = y(2,1,0) + z(3,0,1)$
Donc $F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(3,0,1))$.
En particulier F est un ss-ev de $\mathbb{R}^3$ et $((2,1,0),(3,0,1))$ est une famille génératrice de F.
Ensuite soit deux scalaires λ_1, λ_2. On résout :
$\lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(3,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (2\lambda_1 + 3\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $((2,1,0),(3,0,1))$ est une famille libre. Au final il s'agit d'une base de F.

b- $(a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) \in G$

$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(1,3,8)$

Donc $G = \text{Vect}((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$. En particulier G est un ss-ev de $\mathbb{R}^3$ et $((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$ est une famille génératrice de G.

Maintenant soit trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On résout :

$\lambda_1(1,1,4) + \lambda_2(1,-1,0) + \lambda_3(1,3,8) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, 4\lambda_1 + 8\lambda_3) = (0,0,0)$

C'est-à-dire
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

Ici on obtient par exemple pour $\lambda_3 = 1$: $-2(1,1,4) + (1,-1,0) + (1,3,8) = (0,0,0)$.

La famille $((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$ est donc liée. Ce n'est pas une base de G.

Pour déterminer néanmoins une base de G, on va écarter certains vecteurs tout en gardant le caractère famille génératrice mais en essayant de tomber sur une famille libre. Pour ce faire, on va s'appuyer sur la combinaison linéaire qui nous a permis de conclure que la famille est liée.

On a montré que : $-2(1,1,4) + (1,-1,0) + (1,3,8) = (0,0,0)$.

On en déduit en particulier que $(1,3,8) = 2(1,1,4) - (1,-1,0)$.

Nous allons alors essayer la famille $((1,1,4),(1,-1,0))$ comme base pour G.

On a d'abord :

$(a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) \in G$

$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(1,3,8)$

$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(2(1,1,4) - (1,-1,0))$

$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = (a+2c)(1,1,4) + (b-c)(1,-1,0)$

Cette dernière relation nous permet seulement de dire que $G \subset \text{Vect}((1,1,4),(1,-1,0))$: en effet, attention ici on ne reconnait pas forcément toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs $(1,1,4),(1,-1,0)$ à cause des coefficients $a+2c$ et $b-c$. Or comme dans ce cas on a $G = \text{Vect}((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$, on a aussi $\text{Vect}((1,1,4),(1,-1,0)) \subset G$.

Donc $G = \text{Vect}((1,1,4),(1,-1,0))$ et $((1,1,4),(1,-1,0))$ est encore une famille génératrice de G.

Ensuite soit deux scalaires λ_1, λ_2.

$$\lambda_1(1,1,4) + \lambda_2(1,-1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $((1,1,4),(1,-1,0))$ est une famille libre. Au final il s'agit d'une base de G.

Propriété 2 : Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ n vecteurs de E.
$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si pour tout $u \in E$, il existe n uniques scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.
Dans ce cas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemples de référence : a) La famille (1) est constituée d'un seul vecteur non nul, donc elle est libre. Il s'agit d'une base de $\mathbb{R}$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}$.
Un réel x a pour coordonnées lui-même x dans cette base.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les n n-uplets suivants constituent une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$:
$$e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), e_3 = (0,0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)$$
Ils forment immédiatement une famille libre : il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a pour coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans cette base canonique.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a vu que la famille des $n \times p$ matrices élémentaires $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On montre aisément qu'elle est libre : il s'agit donc d'une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On l'appelle la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ a pour coordonnées ses coefficients a_{ij} dans cette base.

d) De même, on a vu que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. On obtient par identification des coefficients :
$$\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \dots + \lambda_n X^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$
Ainsi $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est aussi une famille libre. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
De même la famille de tous les polynômes X^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Un polynôme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ a pour coordonnées ses coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

III Dimension

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$-ev et F un ss-ev de E. Nous allons définir un nouvel outil, la dimension, qui sera redoutablement efficace pour étudier nos ev. Sa théorie repose sur le résultat suivant qui est admis.

III.1 Théorie de la dimension

Théorème 1 : Soit n un entier naturel non nul.
Si E admet une base constituée de n vecteurs, alors toute autre base de E admet également n vecteurs.

Ce théorème nous assure que si E admet une base avec un nombre fini de vecteurs, toutes ses autres bases auront ce même nombre fini de vecteurs. Ce résultat induit la définition suivante.

Définition 7 : Pour E non réduit au vecteur nul, E est dit de dimension finie lorsque il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.
Dans ce cas, tous les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce cardinal commun est appelé dimension de E et est noté $\dim E$.
De plus par convention, $E = \{0_E\}$ est dit aussi de dimension finie et $\dim\ \{0_E\} = 0$.

Définition 8 : Deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie sont dits isomorphes lorsque ils ont même dimension.

Exemples de référence : a) La famille (1) est une base de $\mathbb{R}$. Elle contient un seul vecteur : donc $\mathbb{R}$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{R} = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ comprend n vecteurs. Donc $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{R}^n = n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ contient $n \times p$ matrices élémentaires. Donc $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie avec $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = n \times p$.

d) De même, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme elle compte $n+1$ vecteurs, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$
Par contre on peut montrer que toutes les bases de $\mathbb{R}[X]$ ont un nombre infini de vecteurs : $\mathbb{R}[X]$ n'est ainsi pas de dimension finie.

III.2 Conséquences

La théorie de la dimension donne plein d'utilisation pratique pour l'étude de nos espaces vectoriels et, en premier lieu, pour l'étude de leurs familles de vecteurs. Le résultat suivant est admis.

Propriété 3 : Soit E un ev de dimension finie avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs de E.
a) Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre, alors $p \leq n$.
De plus si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre et si $p = n$, alors la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base de E.
b) Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice de E, alors $p \geq n$.
De plus si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice de E et si $p = n$, alors la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base de E.

Exemple 6 : Montrer que les familles suivantes sont des bases de E.
a- $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ dans $E=\mathbb{R}^3$
b- $(1,X+1,X^2+X+1)$ dans $E=\mathbb{R}_2[X]$

a- On regarde d'abord le caractère libre ou lié de la famille.
Soit trois scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. On résout :
$\lambda_1(-1,1,1)+\lambda_2(1,-1,1)+\lambda_3(1,1,-1)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \; L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ 2\lambda_2 = 0 \; L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{cases}$$

Donc $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une famille libre.
Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une famille libre de trois vecteurs, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$.

b- Soit trois scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. On obtient par identification des coefficients :
$\lambda_1\times 1+\lambda_2(X+1)+\lambda_3(X^2+X+1)=0$
$\Leftrightarrow \lambda_3X^2+X(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $(1,X+1,X^2+X+1)$ est une famille libre.
Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 et que $(1,X+1,X^2+X+1)$ est une famille libre de trois vecteurs, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

III.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Nous allons pouvoir également appliquer la théorie de la dimension aux ss-ev en s'appuyant sur le résultat suivant.

Propriété 4 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et F un ss-ev de E.
Alors F muni de la restriction des lois de E à lui-même est un $\mathbb{R}$-ev.

Définition 9 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et F un ss-ev de E.
F est dit de dimension finie lorsque le $\mathbb{R}$-ev F est de dimension finie. Sa dimension est alors notée $\dim F$.

Exemple 7 : On reprend l'exemple 5.
a- $((2,1,0),(3,0,1))$ est base de F : donc F est de dimension finie et $\dim F=2$.
b- $((1,1,4),(1,-1,0))$ est une base de G : donc G est de dimension finie et $\dim G=2$.

Le résultat suivant est important et est encore permis par la théorie de la dimension.

Propriété 5 : Tout ss-ev F de E ev de dimension finie est encore de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

IV Rang

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$-ev.

IV.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 10 : Soit $u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs de E.
On appelle rang de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ l'entier noté $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ défini par
$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Remarque : $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ étant une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, ce ss-ev engendré est en effet de dimension finie et d'après la propriété 3 :
$$\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq p$$
D'où on vérifiera toujours : $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq p$.
De plus si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre, alors elle devient une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et ainsi $\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p$.
D'où si $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre, on vérifie $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p$.

Exemple 8 : Déterminer le rang de $((1,-1,2),(0,1,1),(1,0,3))$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

On cherche la dimension de $F = \mathrm{Vect}((1,-1,2),(0,1,1),(1,0,3))$.
$((1,-1,2),(0,1,1),(1,0,3))$ est une famille génératrice de F. On regarde si elle en constitue également une base.
On peut ici remarquer que $(1,0,3) = (1,-1,2) + (0,1,1)$: donc la famille est liée et n'est pas une base de F.
Comme dans l'exemple 5 b-, nous allons essayer de montrer que $((1,-1,2),(0,1,1))$ est une base de F.
On a immédiatement $\mathrm{Vect}((1,-1,2),(0,1,1)) \subset F$. Ensuite toute combinaison linéaire de $(1,-1,2),(0,1,1),(1,0,3)$ de la forme $\lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,0,3)$ avec λ_1, λ_2, λ_3 réels vérifie :
$\lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,0,3)$
$= \lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3((1,-1,2) + (0,1,1))$
$= (\lambda_1 + \lambda_3)(1,-1,2) + (\lambda_2 + \lambda_3)(0,1,1)$
Donc $F \subset \mathrm{Vect}((1,-1,2),(0,1,1))$.

Au final $F = \text{Vect}((1,-1,2),(0,1,1))$ et $((1,-1,2),(0,1,1))$ est une famille génératrice de F. On laisse montrer au lecteur qu'elle est libre. $((1,-1,2),(0,1,1))$ est ainsi une base de F. Donc F est de dimension 2 et $\text{rg}((1,-1,2),(0,1,1),(1,0,3)) = 2$.

IV.2 Rang d'une matrice

Définition 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $C_1, C_2, \dots, C_p$ les p colonnes de A.
On appelle rang de A l'entier noté $\text{rg}(A)$ et égal au rang de $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
C'est-à-dire $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)$.

Le rang d'une matrice peut être également déterminé de façon équivalente à l'aide des matrices échelonnées par lignes (voir chapitre 7 du tome 1 de *Prépa-maths*).

Définition 12 : Une matrice non nulle est dite échelonnée par lignes lorsque :
- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles.
- à partir de la 2e ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.
On appelle pivot chaque premier coefficient non nul à partir de la gauche des lignes non nulles.

Remarque : La forme générale d'une matrice échelonnée par lignes est la suivante :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1p} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2p} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_{rr} & \dots & c_{rp} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec n, p, r entiers non nuls et $(c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p \\ i \le j}}$ une famille de nombres réels.

Propriété 6 : Le rang d'une matrice échelonnée par lignes est égal au nombre de ses pivots.

Démonstration : Soit $A' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1p} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2p} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_{rr} & \cdots & c_{rp} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ une matrice échelonnée avec $(c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p \\ i\leq j}}$ une famille de nombres réels.

On effectue la démonstration pour $c_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. On cherche alors le rang de $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, C_r = \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, C_p = \begin{pmatrix} c_{1p} \\ c_{2p} \\ \vdots \\ c_{rp} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire la dimension de $F = \text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)$. On va monter que $(C_1, C_2, \ldots, C_r)$ est une base de F.

On peut montrer aisément que $(C_1, C_2, \ldots, C_r)$ est une famille libre.

Puis comme $c_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la matrice carrée $A'_r = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1r} \\ 0 & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2r} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{rr} \end{pmatrix}$ est associée à un système de Cramer. On obtient que pour tout $k \in [\![r+1, p]\!]$, il existe une unique solution $X'_{r,k} = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{rk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{rk} \end{pmatrix} = A'_r X'_{r,k}$. On complète avec des zéros chaque $X'_{r,k}$ en une matrice X'_k de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $X'_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_k = A' X'_k$.

Ceci signifie que $C_k = x_{1k} C_1 + x_{2k} C_2 + \cdots + x_{rk} C_r$, autrement dit que C_k est combinaison linéaire de $C_1, C_2, \ldots, C_r$. D'où $F \subset \text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_r)$.

Comme on a immédiatement $\text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_r) \subset F$, on obtient $F = \text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_r)$ et $(C_1, C_2, \ldots, C_r)$ est une famille génératrice de F.

Au final $(C_1, C_2, \ldots, C_r)$ est une base de F qui est ainsi de dimension r. Ceci signifie que A' est de rang r, c'est-à-dire le nombre de ses pivots.

Le rang d'une matrice échelonnée est ainsi facile à lire. À l'aide des opérations élémentaires sur les lignes et de la méthode du pivot de Gauss, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ non nulle peut se ramener à ce type de matrice et son rang est alors donné par la propriété suivante.

Propriété 7 : Toute matrice A non nulle est équivalente à une matrice échelonnée par lignes, c'est-à-dire on peut passer de l'une à l'autre par une famille finie d'opérations élémentaires sur leurs lignes.
De plus si A est équivalente à deux matrices échelonnées par lignes, alors ces deux matrices ont même rang et le rang de A est égal à ce rang commun.

Exemple 9 : Déterminer le rang des matrices suivantes.

a- $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A \sim_L \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1 \end{matrix} \sim_L \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow 2L_3 + 5L_2$$

A est une matrice carrée de rang 3.

b- $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$B \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_1 \end{matrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_2 \end{matrix}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

B est de rang 3.

c- $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{pmatrix}$

$$C \sim_L \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \sim_L \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

C est de rang 2.

Chapitre 2.
Applications linéaires

Nous allons revoir la notion d'application linéaire et surtout la confronter avec notre nouvel outil qu'est la dimension.
On considère dans tout ce chapitre E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et n, p et q trois entiers naturels non nuls.

I Généralités

I.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 : Soit $f: E \to F$ une application définie sur E et à valeurs dans F.
f est une application linéaire lorsque pour tous u, v vecteurs de E et pour tout λ réel, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (ou encore de façon équivalente $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$).
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F.

Exemple de référence : On considère l'application identité sur E définie de la façon suivante.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \to & E \\ & u & \mapsto & u \end{array}$$

On a aisément pour tous u, v vecteurs de E et pour tout λ scalaire :
$\mathrm{Id}_E(u+v) = u + v = \mathrm{Id}_E(u) + \mathrm{Id}_E(v)$ et $\mathrm{Id}_E(\lambda u) = \lambda u = \lambda \mathrm{Id}_E(u)$
Donc Id_E est une application linéaire.

Propriété 1 : Soit $f: E \to F$ une application linéaire. Alors :
a) $f(0_E) = 0_F$
b) Pour tout u vecteur de E, $f(-u) = -f(u)$.

Exemple 1 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a- $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et λ un réel.
On a $P + \lambda Q$ dérivable comme produit et somme et
$f(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = f(P) + \lambda f(Q)$

Donc f est linéaire.

b- g : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et λ un réel. On vérifie :
$g((u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = g((u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{2n} + \lambda v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$
$= (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = g((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \lambda g((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$
Donc g est linéaire.

c- h : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$ avec n, p entiers naturels non nuls et ${}^tM$ matrice transposée de M

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel.
$h(M + \lambda M') = {}^t(\lambda M + \lambda M') = {}^tM + \lambda {}^tM' = h(M) + \lambda h(M')$
Donc h est linéaire.

Définition 2 : Soit $f: E \to F$ une application.
f est un endomorphisme de E lorsque f est linéaire et $E = F$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes de E.
f est un isomorphisme de E dans F lorsque f est linéaire et f est bijective de E dans F.
f est un automorphisme de E lorsque f est un endomorphisme de E et f est bijective de E dans E.

Remarque : Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme, il convient de vérifier deux points : premièrement f est linéaire ; deuxièmement les ensembles de départ et d'arrivée pour f sont les mêmes.

Exemple 2 : Montrer que l'application suivante est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

$$\varphi: P \mapsto X^2P' - 2XP$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et λ un réel.
On a $P + \lambda Q$ dérivable comme produit et somme et
$\varphi(P + \lambda Q) = X^2(P + \lambda Q)' - 2X(P + \lambda Q) = X^2P' + \lambda X^2Q' - 2XP - 2\lambda XQ$
$= X^2P' - 2XP + \lambda(X^2Q' - 2XQ) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$
Donc φ est linéaire.
De plus soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ avec a, b et c réels. Alors :
$\varphi(P) = X^2P' - 2XP = X^2(2aX + b) - 2X(aX^2 + bX + c)$
$= 2aX^3 + bX^2 - 2aX^3 - 2bX^2 - 2cX = -bX^2 - 2cX$
D'où $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
Au final φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Propriété 2 : Soit $f: E \to F$ une application linéaire et $g: F \to G$ une application linéaire.
Alors $g \circ f: E \to G$ est une application linéaire.

Démonstration : Pour tous u, v vecteurs de E et pour tout λ réel,

$$\begin{aligned} g \circ f(u+\lambda v) &= g\big(f(u+\lambda v)\big) \\ &= g(f(u)+\lambda f(v)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= g(f(u)) + \lambda g(f(v)) \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ &= g \circ f(u) + \lambda g \circ f(v) \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est une application linéaire.

Propriété 3 : Soit $f: E \to F$ un isomorphisme.
Alors son application réciproque $f^{-1}: F \to E$ est un isomorphisme.
De plus $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Démonstration : Soit r et s deux vecteurs de F et λ un réel. On veut montrer que $f^{-1}(r+\lambda s) = f^{-1}(r) + \lambda f^{-1}(s)$.
Comme f est bijective de E dans F, il existe u et v deux vecteurs uniques de E tels que $f(u) = r$ et $f(v) = s$. Ainsi $f^{-1}(r) = u$, $f^{-1}(s) = v$ et $f^{-1}(r) + \lambda f^{-1}(s) = u + \lambda v$.
De plus comme f est linéaire, on vérifie $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v) = r + \lambda s$. Ceci signifie que $f^{-1}(r+\lambda s) = u + \lambda v$.
Au final on obtient $f^{-1}(r+\lambda s) = u + \lambda v = f^{-1}(r) + \lambda f^{-1}(s)$.
Donc f^{-1} est une application linéaire. Comme elle est également bijective de F dans E, il s'agit d'un isomorphisme.
Les deux dernières égalités de la propriété sont des égalités connues de bijection.
En particulier si $f: E \to E$ est un automorphisme de E, alors son application réciproque $f^{-1}: E \to E$ est encore un automorphisme de E.

Propriété 4 : Soit $f: E \to F$ un isomorphisme et $g: F \to G$ un isomorphisme.
Alors $g \circ f: E \to G$ est isomorphisme et son application réciproque $(g \circ f)^{-1}$ est un isomorphisme.
De plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration : La propriété 2 donne $g \circ f$ linéaire. De plus on sait que la composée de deux applications bijectives est encore bijective. Donc $g \circ f$ est bien un isomorphisme.
La propriété 3 donne alors $(g \circ f)^{-1}$ isomorphisme.
La dernière égalité est une égalité de référence de la bijection.

Les résultats précédents vont se décliner de la façon suivante pour les endomorphismes.

Propriété 5 : Soit $f: E \to E$ un endomorphisme. On définit les applications suivantes :
$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad f^1 = f \qquad f^2 = f \circ f \qquad \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n$
Alors pour $n \in \mathbb{N}$, f^n est un endomorphisme de E.
De plus si f est un automorphisme, alors f^{-1} est un automorphisme et, pour $n \in \mathbb{N}$, f^n est un automorphisme de E avec $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

Propriété 6 : $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Démonstration : $\mathcal{L}(E,F)$ est muni des deux opérations suivantes.
Soit $f: E \to F$ et $g: E \to F$ deux applications linéaires et λ un réel.
On définit l'application $f+g: E \to F$ qui à tout $u \in E$ associe le vecteur $f(u)+g(u)$: elle est immédiatement encore linéaire.
De même on définit l'application $\lambda f: E \to F$ qui à tout $u \in E$ associe le vecteur $\lambda f(u)$, qui est également linéaire.
Ces deux opérations vérifient toutes les conditions pour que $\mathcal{L}(E,F)$ soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; à savoir pour toutes applications linéaires f, g, h définies sur E et à valeurs dans F et pour tous λ, μ réels :

$f+g=g+f$ $\quad$ $f+(g+h)=(f+g)+h$ $\quad$ $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$
$\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$ $\quad$ $(\lambda\mu)f=\lambda(\mu f)$ $\quad$ $1\times f=f$

De plus l'application constante égale à 0 notée f_0 vérifie $f+f_0=f_0+f=f$ et l'application $-f$ vérifie $f-f=-f+f=f_0$.
En particulier $\mathcal{L}(E)$ est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

I.2 Noyau et image

Définition 3 : Soit $f: E \to F$ une application linéaire.
On appelle noyau de f le sous-ensemble de E noté $\mathrm{Ker}\, f$ regroupant tous les vecteurs $u \in E$ tels que $f(u)=0_F$.
On appelle image de f le sous-ensemble de F noté $\mathrm{Im}\, f$ regroupant tous les vecteurs $v \in F$ pour lesquels il existe au moins un vecteur $u \in E$ tel que $v=f(u)$.

Propriété 7 : Soit $f: E \to F$ une application linéaire.
$\mathrm{Ker}\, f$ est un ss-ev de E et $\mathrm{Im}\, f$ est un ss-ev de F.

Démonstration : $f(0_E)=0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}\, f$.
Soit $u \in \mathrm{Ker}\, f$, $u' \in \mathrm{Ker}\, f$ et λ un réel : en particulier $f(u)=f(u')=0_F$.
Alors $f(u+\lambda u')=f(u)+\lambda f(u')=0_F+\lambda 0_F=0_F$: donc $u+\lambda u' \in \mathrm{Ker}\, f$.
$\mathrm{Ker}\, f$ est bien un ss-ev de E.
À nouveau $0_F=f(0_E)$ donc $0_F \in \mathrm{Im}\, f$.
Soit $v \in \mathrm{Im}\, f$, $v' \in \mathrm{Im}\, f$ et λ un réel : en particulier il existe $u \in E$ et $u' \in E$ tels que $f(u)=v$ et $f(u')=v'$.
On obtient $u+\lambda u' \in E$ et $f(u+\lambda u')=f(u)+\lambda f(u')=v+\lambda v'$.
C'est-à-dire $v+\lambda v' \in \mathrm{Im}\, f$.
$\mathrm{Im}\, f$ est bien un ss-ev de F.

Exemple 3 : On reprend les applications linéaires de l'exemple 1 et on détermine leur noyau et leur image.
a- $\mathrm{Ker}\, f$ est le ss-ev des vecteurs $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $f(P)=P'=0$, le polynôme nul.