

Marcel Grangé

Calcul différentiel

Cours et exercices

2^e édition



Calcul différentiel

Cours et exercices

Références sciences

Calcul différentiel

Cours et exercices

2^e édition révisée et augmentée

Marcel Grangé



Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-096837
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Dans sa deuxième édition, comme dans la première, cet ouvrage traite en quatre chapitres du calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés. Cette deuxième édition est revue et augmentée de quelques résultats et d'exercices prolongeant le cours. La plupart des concepts et résultats abordés sont classiques et standards, mais nous avons tenté de les présenter sans cacher les difficultés qu'ils comportent parfois. De notre point de vue, évacuer la dimension finie est salutaire pour bien comprendre les fondements du calcul différentiel *intrinsèque*, et précisément permet de *mieux apprécier* l'intérêt de se placer *parfois* en dimension finie.

Au premier chapitre est définie tout d'abord la notion d'application différentiable entre espaces vectoriels normés, bien que ce soit dans le cadre des espaces affines dirigés par un espace vectoriel normé qu'il aurait fallu se placer, mais au prix d'une présentation trop lourde. Les premiers résultats attendus sont démontrés dans la première section. La deuxième section est dévolue au théorème des accroissements finis, présenté sous deux formes apparemment différentes, théorème capital pour tout le développement du calcul différentiel. Enfin la troisième est consacrée à l'intégrale d'une application continue définie sur un segment de $\mathbb{R}$, et son rapport indubitable avec la différentiation, car en fin de compte « une fonction doit être la primitive de sa dérivée ».

Le deuxième chapitre, intitulé « *L'équation $f(y) = x$* », rassemble les théorèmes de base de la théorie *locale* du calcul différentiel, la seule abordée ici. Le théorème local d'inversion en est la clé de voûte. À cet égard, la section 2.4. montre comment il serait possible de déboucher sur l'immense domaine qu'est la géométrie différentielle.

L'inévitable troisième chapitre est le plus désagréablement technique, mais pour différentier plusieurs fois il convient d'être bien assuré. Nous avons volontairement privilégié la différentielle seconde car l'essentiel des difficultés est là, comme le théorème de Schwarz sans lequel la différentiation multiple serait assez difficile. La fin de ce chapitre traite de propriétés élémentaires des fonctions convexes une ou plusieurs fois différentiables ; le dernier théorème, sur la minoration d'une fonction convexe, met une nouvelle fois en lumière la puissance du calcul différentiel dans certains aspects géométriques.

Le quatrième chapitre, sur les équations différentielles, est le plus long. Il a pour but d'asseoir les principaux résultats de ce qui est véritablement une théorie qui nécessiterait plusieurs ouvrages. Nous nous sommes donc attachés à présenter les choses de manière à ce que le lecteur accède au contenu basique qu'un honnête mathématicien (en herbe) ne doit pas ignorer, et puisse consulter effectivement les ouvrages de plus haut niveau sur ce sujet, par exemple sur les équations différentielles linéaires. Par ailleurs nous avons cherché à faire comprendre en quoi les « recettes » que le lecteur a pu rencontrer ici ou là, ne sont pas dénuées de fondements. Enfin nous terminons ce chapitre en se plaçant, comme au deuxième « tout près de la géométrie différentielle », en abordant les équations aux dérivées partielles semi-linéaires du premier ordre, dans le même esprit que les équations différentielles, à savoir celui du problème de Cauchy.

Cet ouvrage est né du contact pendant neuf ans avec les candidats à l'Agrégation de Mathématiques, et du cours de calcul différentiel en Licence 3 de mathématiques fondamentales assuré pendant quatre ans.

Il m'est agréable de remercier Yves Dupain, Chantal Menini et Marc Polzin, mes collègues, pour d'utiles conversations, et critiques constructives. Le lecteur souhaitant connaître des *indications* sur les exercices proposés peut s'adresser à :

marcel.grange@math.u-bordeaux1.fr ou marcel.grange@numericable.fr

Table des matières

1	Différentiabilité	7
1.1	Notations et rappels	7
1.2	Applications différentiables	9
1.2.1	Premières définitions	9
1.2.2	Études de cas particuliers importants	14
1.2.3	Propriétés algébriques de la différentiation	16
1.2.4	Applications de plusieurs variables	19
1.2.4.1	Généralités incontournables	19
1.2.4.2	Le gradient	21
1.2.5	Matrices jacobiniennes	22
1.3	Théorèmes des accroissements finis	23
1.3.1	État des lieux	23
1.3.2	Le théorème des accroissements finis	23
1.3.3	Théorème de la moyenne	26
1.3.4	Influence du théorème des accroissements finis classique	28
1.3.5	Cinq applications du théorème des accroissements finis	29
1.3.5.1	Majoration du reste	29
1.3.5.2	Applications de différentielle nulle	30
1.3.5.3	Critère de différentiabilité d'une application partiellement différentiable	31
1.3.5.4	Suites d'applications différentiables	33
1.3.5.5	Image d'une application différentiable	35
1.4	Formule intégrale des accroissements finis	36
1.4.1	Intégrale d'une application continue à une variable réelle	36
1.4.2	Cinq propriétés de l'intégrale d'une application continue	40
1.4.2.1	Linéarité de l'intégrale	40
1.4.2.2	Norme de l'intégrale et relation d'ordre	40
1.4.2.3	Relation de Chasles	41
1.4.2.4	Transformation linéaire de l'intégrale	42

1.4.2.5	L'intégrale à valeurs dans un espace de dimension finie	43
1.4.3	Primitive d'une application continue	43
1.4.4	Continuité et différentiabilité sous le signe intégral	44
1.5	Exercices	47
2	L'équation $f(y) = x$	55
2.1	Difféomorphismes	55
2.1.1	Définitions	55
2.1.2	Observations	56
2.2	Théorème local d'inversion	58
2.3	Théorème des fonctions implicites	62
2.4	Submersions et théorème du rang constant	64
2.5	Théorème des extrema liés	70
2.6	Théorème local de division	72
2.7	Exercices	74
3	Différentiabilité d'ordre supérieur	77
3.1	Différentielle seconde	77
3.1.1	Premières définitions	77
3.1.2	Le théorème de Schwarz	79
3.1.3	Le théorème de Taylor-Young	82
3.1.4	Exemples d'applications deux fois différentiables	87
3.1.5	Conditions du second ordre pour les extrema et les extrema liés	92
3.1.6	Applications de plusieurs variables	95
3.1.6.1	Différentielles partielles secondes	95
3.1.6.2	Le hessien, le laplacien	99
3.1.6.3	Influence du théorème des accroissements finis	100
3.2	Différentielle d'ordre quelconque	102
3.2.1	Premières définitions	102
3.2.2	La différentielle d'ordre n et son calcul	104
3.2.3	Action « tronquée » d'une différentielle multiple	106
3.2.4	Le théorème de Schwarz	107
3.2.5	Le théorème de Taylor-Young	108
3.2.6	Exemples d'applications n -fois différentiables	110
3.2.7	Applications de plusieurs variables	112
3.3	Théorèmes de Taylor	115
3.3.1	Le point de vue Taylor-Lagrange	115
3.3.2	Influence du théorème des accroissements finis classique	116
3.3.3	Le point de vue « formule intégrale »	118
3.4	Fonctions convexes	118

3.4.1	Convexité et continuité	118
3.4.2	Convexité et différentiabilité	121
3.5	Exercices	125
4	Équations différentielles	133
4.1	Généralités	133
4.2	Les solutions maximales	136
4.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard	138
4.4	Existence et unicité de la solution maximale	142
4.5	Le théorème d'Arzela-Peano	147
4.6	Le théorème des bouts des solutions	149
4.7	Comparaison des solutions	152
4.8	Condition initiale et paramètre	159
4.8.1	Continuité par rapport à la condition initiale et au paramètre	160
4.8.2	Différentiabilité par rapport à la condition initiale	162
4.8.3	Le flot	167
4.8.4	Différentiabilité par rapport à la condition initiale et au paramètre	168
4.9	Équations différentielles linéaires	169
4.9.1	Considérations générales et théorème du résolvant	169
4.9.2	Que faire lorsqu'il y a un second membre ?	173
4.9.3	Que dire lorsque l'application A est constante ?	174
4.9.4	Cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie	175
4.9.5	Que dire lorsque l'application A est constante et l'espace vectoriel E de dimension finie ?	181
4.9.5.1	Complexification du couple (E, A)	182
4.9.5.2	Complexification de l'équation différentielle linéaire	182
4.9.5.3	Conclusion	183
4.10	Équations différentielles linéaires d'ordre entier	183
4.10.1	Quelques généralités	183
4.10.2	L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n	185
4.10.3	Le wronskien	186
4.10.4	Structure des zéros d'une solution	187
4.10.5	Comment effectuer la méthode de variation des constantes dans le cas de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n	187
4.10.6	Que dire si les fonctions coefficients a_j sont constantes	190
4.11	Quelques équations aux dérivées partielles	193
4.11.1	Définition des équations aux dérivées partielles étudiées	193
4.11.2	Quatre propriétés du flot d'un champ de vecteur	194

4.11.3	Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations aux dérivées partielles semi-linéaires	200
4.12	Exercices	204
Bibliographie		219
Index		221

Chapitre 1

Différentiabilité

Le principal objet du calcul différentiel est d'évaluer la *différence*

$$f(x+h) - f(x)$$

accroissement d'une application f définie au voisinage d'un point x d'un espace normé E , à valeurs dans un espace normé F . Si l'application f était la restriction d'une application linéaire, l'accroissement $f(x+h) - f(x)$ vaudrait $f(h)$, et tout serait dit ! De ce fait, la grande idée du calcul différentiel est de déterminer s'il est possible de trouver, en chaque point x où l'application f est définie, une *application linéaire* L_x telle que l'accroissement $f(x+h) - f(x)$ soit « à peu près » l'accroissement de L_x , c'est-à-dire $L_x(h)$. En fait on exige que l'application linéaire L_x soit continue, de manière à que différentiabilité entraîne continuité. Il est bon de préciser l'expression « à peu près » employée ci-dessus, selon un point de vue déjà adopté pour les fonctions réelles d'une variable réelle, qu'on pourrait exprimer ainsi : au voisinage « très proche » d'un point, une « bonne » courbe est « à peu près » confondue avec la droite tangente en ce point (du latin *tangere* : toucher), ainsi l'application linéaire L_x « mesure » la dose de proportionnalité dans l'accroissement de l'application f .

Souvent certains préconisent de choisir les espaces normés de dimension finie, mais cette hypothèse n'apporte aucune simplification significative, et peut même masquer l'essence d'un concept ou d'un résultat. Aussi, dans cet ouvrage est développé le calcul différentiel dans le cadre des espaces normés, ou espaces de **Banach**, selon le cas. Cependant, il est parfois précisé que tel ou tel espace normé est de dimension finie lorsque cela est pertinent.

1.1 Notations et rappels

Ce qui suit concerne tous les chapitres.

1. Tous les espaces normés considérés sont réels (sauf mention expresse du contraire). Rappelons qu'un espace normé réel est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, muni d'une norme. Notons que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace normé réel de dimension 2, la norme étant le module. Plus généralement tout espace normé complexe est aussi un espace normé réel.

Dans un espace normé on dispose des notions classiques de topologie : **ouvert**, **fermé**, **intérieur**, **adhérence**, **suite convergente**, **continuité** des applications entre parties d'espaces normés, partie **compacte**, partie **connexe**, etc.

On dispose aussi des notions classiques de structure uniforme : **suite de Cauchy**, partie **complète**, **uniforme continuité** d'une application entre parties d'espaces normés, enfin la notation choisie pour la boule ouverte de centre x et de rayon r est $B(x, r)$ et pour la boule fermée de centre x et de rayon r est $\bar{B}(x, r)$.

Un **espace de Banach** est un espace normé complet. Rappelons qu'un espace normé de dimension finie est complet et que sur un tel espace toutes les normes sont équivalentes. Sur un espace normé on dispose d'une notion utile de partie **bornée**, de **suite bornée**.

Enfin on rappelle que **dans un espace de Banach, tout série absolument convergente est convergente, et que la norme de la somme d'une telle série est inférieure ou égale à la somme de la série des normes**.

2. Étant donnés deux espaces normés désignés par E et F on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel normé formé des *applications linéaires continues* de E dans F . Lorsque l'espace normé de départ E **est de dimension finie**, toute application linéaire de E dans un espace normé F est continue.

Lorsque l'espace normé de départ E **n'est pas** de dimension finie et F **n'est pas** $\{0\}$, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ **n'est pas** réduit à $\{0\}$, et loin de là car *pour tout x de E , $x \neq 0$, il existe une forme linéaire continue φ sur E vérifiant $\varphi(x) \neq 0$* : ce fait, ici admis, relève du théorème de Hahn-Banach.

Un **isomorphisme de l'espace normé E sur l'espace normé F** est une bijection linéaire bi-continue et l'inverse d'un isomorphisme L est noté L^{-1} . L'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $Isom(E, F)$.

La norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, dite **norme subordonnée** (à celles de E et F), est définie comme suit

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|$$

Si K appartient à $\mathcal{L}(E, F)$ et L à $\mathcal{L}(F, G)$, alors $L \circ K$, souvent noté LK , appartient à $\mathcal{L}(E, G)$ et on a l'inégalité : $\|LK\| \leq \|L\| \|K\|$

3. La notion de *produit cartésien fini d'espaces normés* est supposée connue, ainsi que la notion d'*application n -linéaire continue* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{M} F$ entre espaces normés, et sa norme, dite **norme subordonnée** (à celles de $E_1, \dots, E_n$ et F), est définie

comme suit

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sup_{x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0} \frac{\|M(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} = \sup_{\|x_1\|=1, \dots, \|x_n\|=1} \|M(x_1, \dots, x_n)\| \\ &= \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1} \|M(x_1, \dots, x_n)\| \end{aligned}$$

Si les espaces normés E_j sont de dimension finie, toute application n -linéaire du produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans un espace normé F est continue. Par ailleurs, étant donné un espace normé E on note E^n le produit cartésien

$$\overbrace{E \times \cdots \times E}^n$$

4. Une application f d'un ensemble X dans un ensemble Y pourra être notée indifféremment

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \text{ou} \quad f : X \longrightarrow Y$$

5. Enfin, lorsqu'une application f , à valeurs dans un espace normé F , est définie sur un ouvert épointé $U \setminus \{a\}$ d'un espace normé E , où le point a appartient à $\overline{U}$, et possède une limite en a , le symbole $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ désigne cette limite.

1.2 Applications différentiables

1.2.1 Premières définitions

Définition 1.1. Soient deux espaces normés E et F , une application $\Omega \xrightarrow{f} F$ définie sur un ouvert non vide Ω de E , et un point x de Ω . On dit que l'application f est **différentiable en x** s'il existe une *application linéaire continue* L_x de E dans F telle qu'on ait

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \|h\|^{-1} (f(x+h) - f(x) - L_x(h)) = 0$$

condition qui peut s'écrire aussi

$$f(x+h) - f(x) = L_x(h) + \|h\| \varepsilon_x(h)$$

où l'application ε_x , notée aussi ε_x^f , est définie dans l'ouvert épointé $(-x + \Omega) \setminus \{0\}$, et possède la propriété

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \varepsilon_x(h) = 0$$

Proposition 1.2. Propriété d'unicité.

Si dans les conditions ci-dessus l'application f est différentiable en x relativement aux applications linéaires continues L_1 et L_2 , alors $L_1 = L_2$.

Démonstration. Soit $u \in E$, par différence on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \neq}} t^{-1} (L_1(tu) - L_2(tu)) = 0$$

c'est-à-dire l'égalité $(L_1 - L_2)(u) = 0$ parce que les applications linéaires L_1 et L_2 sont homogènes, et cela pour tout vecteur u , donc $L_1 = L_2$. $\square$

Définition 1.3. L'application linéaire continue L_x est appelée *application linéaire tangente en x* , ou **différentielle de f en x** .

Certains s'obstinent à l'appeler « dérivée de f en x », ce que nous ne faisons pas, eu égard au concept de dérivée directionnelle, présenté plus loin.

La différentielle est dorénavant notée $Df(x)$, et on préfère écrire $Df(x) \cdot h$ au lieu de $Df(x)(h)$.

Fait 1.4. Le cas particulier $E = \mathbb{R}$

La condition de différentiabilité s'écrit

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \neq}} h^{-1} (f(x+h) - f(x)) = L_x(1)$$

On dit que l'application f est **dérivable en x** , de **dérivée** $L_x(1)$, qui est un vecteur de F qu'on note $f'(x)$, parfois même $\dot{f}(x)$ en Mécanique.

Démonstration. En effet, dans ce cas on a l'égalité $L_x(h) = hL_x(1)$; ainsi la condition de différentiabilité s'écrit

$$h^{-1} (f(x+h) - f(x)) = L_x(1) + h^{-1} |h| \varepsilon_x(h)$$

$\square$

Remarque 1.5.

1. Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$ on a donc

$$f'(x) = Df(x) \cdot 1$$

On confond souvent, sans que cela soit nécessaire, la dérivée $f'(x)$ et la différentielle $Df(x)$; le fait que l'application $L \mapsto L(1)$ soit une isométrie surjective de l'espace normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ sur l'espace normé F légitime cet abus.

2. Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$ et $\Omega = J$ intervalle non vide et non nécessairement ouvert, il est commode d'introduire les concepts de **dérivée-à-gauche** et de **dérivée-à-droite**, dont les définitions vont d'elles-mêmes : la dérivée-à-gauche en l'extrémité droite de J , ou la dérivée-à-droite en l'extrémité gauche de J .

3. Si l'espace de départ E est de dimension finie, il n'est pas nécessaire de supposer dans la définition 1 que l'application linéaire $L_x = Df(x)$ est continue, car la continuité est, dans ce cas, *automatique*.

4. L'application f est différentiable en x et de différentielle $Df(x) = L$ est un énoncé qui dépend a priori des normes dont sont munis les espaces vectoriels E et F , mais en réalité *ne dépend que de la classe d'équivalence de chaque norme pour la relation « équivalence des normes »*. Autrement dit les définitions, propositions, faits et remarques précédents ne changent pas lorsqu'on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes. De plus, si les deux espaces vectoriels E et F sont de dimension finie, l'énoncé « l'application f est différentiable en x et de différentielle $Df(x) = L$ » ne dépend que des structures vectorielles de E et F , car dans ce cas particulier toutes les normes sont équivalentes.

Proposition 1.6.

Dans les conditions de la définition 1.1 l'application f est continue au point x .

Démonstration. On a l'inégalité

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\| \left(\|Df(x)\| + \|\varepsilon_x(h)\| \right)$$

Lorsque le vecteur h tend vers 0, le membre de droite de cette inégalité tend évidemment vers 0. □

Remarque 1.7.

Si dans la définition 1.1 on ne suppose pas l'application linéaire L_x continue, mais supposant l'application f continue en x , alors l'application linéaire L_x est continue. En effet

$$\|L_x(h)\| \leq \|f(x+h) - f(x)\| + \|h\| \|\varepsilon_x(h)\|$$

Supposant l'application f différentiable en x comme dans la définition 1, on dispose des « objets »

*le vecteur $Df(x) \cdot h$ appartenant à l'espace normé F
le vecteur $Df(x)$ appartenant à l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$*

éventuellement d'un autre « objet » quand l'application f est différentiable en *tout* point x de l'ouvert Ω , ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 1.8. Soient deux espaces normés E et F , une application $\Omega \xrightarrow{f} F$ définie sur un ouvert non vide Ω de E . Si l'application f est différentiable en *tout* point x de l'ouvert Ω , on dit que l'application f est **différentiable dans Ω** . Apparaît alors la *nouvelle application*

$$\Omega \xrightarrow{Df} \mathcal{L}(E, F)$$

appelée **l'application différentielle de f** . Lorsque l'application Df est continue sur Ω on dit que l'application f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω** .

On veillera à ne pas confondre Df , $Df(x)$ et $Df(x) \cdot h$

Déterminer Df revient à déterminer tous les $Df(x)$, et déterminer $Df(x)$ revient à déterminer tous les $Df(x) \cdot h$. C'est pourquoi le fait suivant a toute son importance.

Fait 1.9.

Lorsqu'une application f est différentiable en x on a

$$Df(x) \cdot h = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} t^{-1} (f(x+th) - f(x))$$

Démonstration. En effet, l'expression

$$t^{-1} (f(x+th) - f(x)) = Df(x) \cdot h + t^{-1} |t| \|h\| \varepsilon_x(th)$$

tend vers le vecteur $Df(x) \cdot h$ lorsque t tend vers 0. □

Ce fait permet de *calculer* $Df(x)$ si l'on sait *déjà* que l'application f est différentiable en x , ou bien de *conjecturer* ce que doit être $Df(x)$ si l'on cherche à prouver que l'application f est différentiable en x . Néanmoins la limite ci-dessus peut exister sans que l'application f soit différentiable. Aussi, il n'est pas sans intérêt d'introduire la définition qui suit.

Définition 1.10. Soient deux espaces normés E et F , une application $\Omega \xrightarrow{f} F$ définie sur un ouvert non vide Ω de E , et un point x de Ω . lorsque la limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} t^{-1} (f(x+th) - f(x))$$

existe, on l'appelle **dérivée de f en x dans la direction h** , et on la désigne par $\partial_h f(x)$. On emploie parfois l'expression « **dérivée directionnelle** ».

Il est bon d'observer que si la dérivée directionnelle $\partial_h f(x)$ existe, alors pour tout scalaire $\lambda \neq 0$ la dérivée directionnelle $\partial_{\lambda h} f(x)$ existe aussi et

$$\partial_{\lambda h} f(x) = \lambda \partial_h f(x)$$

Fait 1.11.

Si l'application f est différentiable en a , lorsque l'espace normé E est de dimension finie et muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, pour tout $h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j$ de E on a la formule

$$Df(a) \cdot h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j \partial_{e_j} f(a)$$

Démonstration. L'égalité $Df(a) \cdot h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j Df(a) \cdot e_j$ résume la preuve. $\square$

Cependant, toutes les dérivées directionnelles de f en x peuvent exister, sans que l'application f soit différentiable en x , ni même que l'application $h \mapsto \partial_h f(x)$ soit linéaire. Toutefois, la linéarité de l'application $h \mapsto \partial_h f(x)$ n'implique pas non plus la différentiabilité de f au point x . L'exemple 1.12 ci-dessous illustre ces phénomènes.

Exemple 1.12.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1} x^2 y & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Les dérivées directionnelles $\partial_{(u,v)} f(0, 0)$ existent toutes, mais $(u, v) \mapsto \partial_{(u,v)} f(0, 0)$ n'est pas linéaire. Notons que la fonction f est continue en $(0, 0)$.

2. $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^2)^{-1} x^3 y & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Les dérivées directionnelles $\partial_{(u,v)} f(0, 0)$ sont nulles, ainsi $(u, v) \mapsto \partial_{(u,v)} f(0, 0)$ est linéaire, mais la fonction f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. Notons que l'application f est continue en $(0, 0)$.

3. $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^2)^{-1} x^3 |y|^{\frac{3}{2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La fonction f est différentiable sur E , et l'application Df n'est pas continue en $(0, 0)$, mais est continue en tout autre point.

4. $E = \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(t^{-1}) dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur E , et la fonction f' n'est pas continue en $x = 0$, mais est continue en tout autre point.

Proposition 1.13.

Soit une fonction réelle f définie et différentiable sur un ouvert Ω d'un espace normé E . Si la fonction f admet au point a de Ω un maximum ou un minimum, alors $Df(a) = 0$.

Démonstration. Le signe de la quantité $t^{-1}(f(a+th) - f(a))$ ne dépend que du signe de t . Donc le signe du nombre réel $Df(a) \cdot h$ ne dépend pas de h , ce qui impose à la forme linéaire $Df(a)$ d'être nulle. $\square$

Corollaire 1.14. Théorème de Darboux

Soit une fonction réelle f définie et dérivable sur un intervalle non vide J de $\mathbb{R}$. Alors le sous-ensemble $f'(J)$ est un intervalle.

Démonstration. Soient u et v appartenant à $f'(J)$ vérifiant $u < v$, et w appartenant à $]u, v[$. Il existe a et b dans J tels qu'on ait $u = f'(a)$ et $v = f'(b)$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer $a < b$. Considérons la fonction g définie sur J par

$$g(x) = f(x) - wx$$

On a $g'(a) = f'(a) - w < 0$ et $g'(b) = f'(b) - w > 0$. Pour tout accroissement $h > 0$, assez petit

$$\begin{cases} g(a+h) - g(a) = h(g'(a) + o(1)) \\ g(b-h) - g(b) = h(-g'(b) + o(1)) \end{cases}$$

D'où l'on tire que pour tout accroissement $h > 0$, assez petit

$$g(a+h) < g(a) \quad \text{et} \quad g(b-h) < g(b)$$

Ainsi on obtient que le minimum de la fonction continue g restreinte au segment $[a, b]$ est strictement inférieur et à $g(a)$ et à $g(b)$, minimum atteint en un point c appartenant donc à $]a, b[$. Mais alors on a $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = w$. $\square$

1.2.2 Études de cas particuliers importants

Proposition 1.15.

1. Une application constante est différentiable dans l'ouvert où elle est définie, et son application différentielle est l'application nulle.

2. Une application linéaire continue $E \xrightarrow{L} F$ entre espaces normés est différentiable dans E , et pour tout x de E

$$DL(x) = L$$

3. Une application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \xrightarrow{B} F$ entre espaces normés est différentiable dans $E_1 \times E_2$, et

$$DB(x_1, x_2) \cdot (h_1, h_2) = B(h_1, x_2) + B(x_1, h_2)$$

C'est aussi le cas d'une application n -linéaire continue $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{M} F$, et

$$DM(x_1, \cdots, x_n) \cdot (h_1, \cdots, h_n) = \sum_{1 \leq j \leq n} M(x_1, \cdots, h_j, \cdots, x_n)$$

Démonstration. **1.** est immédiat car toute différence $f(x+h) - f(x)$ vaut 0, et **2.** aussi car la différence $L(x+h) - L(x)$ vaut $L(h)$.

3. Vu la bilinéarité de l'application B , on a

$$B(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - B(x_1, x_2) = (B(h_1, x_2) + B(x_1 + h_2)) + B(h_1, h_2)$$

La linéarité et la continuité de l'application $(h_1, h_2) \mapsto B(h_1, x_2) + B(x_1 + h_2)$ sont claires, et le reste est « bon »

$$\|B(h_1, h_2)\| \leq \|B\| \|h_1\| \|h_2\| \leq \|B\| \|(h_1, h_2)\|^2$$

où par exemple, $\|(h_1, h_2)\| = \max(\|h_1\|, \|h_2\|)$. Le cas d'une application n -linéaire est rigoureusement semblable. De plus, on observe que le reste est « mieux » que $o(\|h\|)$ puisqu'il est $O(\|h\|^2)$, avec $h = (h_1, \dots, h_n)$ où par exemple $\|h\| = \max_{1 \leq j \leq n} \|h_j\|$. $\square$

Proposition 1.16.

Étant donné un espace de **Banach** E , l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E est un ouvert non vide de l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$, l'application inverse $\mathcal{J}$, définie sur $GL(E)$ par $\mathcal{J}(T) = T^{-1}$, est différentiable dans $GL(E)$, et on a

$$D\mathcal{J}(T) \cdot H = -T^{-1}HT^{-1}$$

Démonstration. **1.** I désignant l'identité de E , pour tout A de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|A\| < 1$, l'endomorphisme $I + A$ appartient à $GL(E)$ et son inverse est la somme de la série absolument convergente

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$$

En effet, la multiplication à droite par A étant continue, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n \right) (I + A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A^n = I$$

De même on obtient

$$(I + A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n \right) = I$$

2. Soit T appartenant à $GL(E)$, et soit un accroissement H , qu'on peut supposer de norme déjà assez petite, précisément $\|T^{-1}\| \|H\| < 1$, de sorte que $I + T^{-1}H$ appartient à $GL(E)$. On a

$$\begin{aligned} (T + H)^{-1} - T^{-1} &= (I + T^{-1}H)^{-1} T^{-1} - T^{-1} = \left((I + T^{-1}H)^{-1} - I \right) T^{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}H)^n T^{-1} = (-T^{-1}HT^{-1}) + \left(\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}H)^n T^{-1} \right) \end{aligned}$$

Comme la norme de la somme d'une série absolument convergente est inférieure ou égale à la série des normes, on obtient la majoration de la norme du reste

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}H)^n T^{-1} \right\| \\ & \leq \|H\|^2 \left(\|T^{-1}\|^3 \sum_{n=2}^{\infty} \|H\|^{n-2} \|T^{-1}\|^{n-2} \right) = \|H\|^2 \|T^{-1}\|^3 \left(1 - \|H\| \|T^{-1}\| \right)^{-1} \end{aligned}$$

D'où immédiatement la conclusion. On constate encore que le reste est « mieux » que $o(\|H\|)$ puisqu'il est $O(\|H\|^2)$. Ce phénomène s'éclairera au chapitre 3. $\square$

1.2.3 Propriétés algébriques de la différentiation

Proposition 1.17.

Soient deux espaces normés E et F , deux applications $\Omega \xrightarrow{f} F$ et $\Omega \xrightarrow{g} F$ définies sur un ouvert non vide Ω de E , différentiables en un point a de Ω , et un nombre réel λ . Alors l'application $f + \lambda g$, définie par $(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$, est différentiable en a et

$$D(f + \lambda g)(a) = Df(a) + \lambda Dg(a)$$

Démonstration. Elle se résume aux égalités successives

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(a + h) - (f + \lambda g)(a) &= (f(a + h) - f(a)) + \lambda(g(a + h) - g(a)) \\ &= \left(Df(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_a^f(h) \right) + \lambda \left(Dg(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_a^g(h) \right) \\ &= (Df(a) + \lambda Dg(a)) \cdot h + \|h\| (\varepsilon_a^f(h) + \lambda \varepsilon_a^g(h)) \end{aligned}$$

et au constat

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (\varepsilon_a^f(h) + \lambda \varepsilon_a^g(h)) = 0$$

$\square$

Proposition 1.18.

Soient trois espaces normés E , F et G , un ouvert U de E , un ouvert V de F , deux applications $U \xrightarrow{f} V$ et $V \xrightarrow{g} G$. Si f est différentiable en x et g différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

Démonstration. On transforme l'accroissement $(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)$ en prenant la précaution de prolonger l'application $\varepsilon_{f(x)}^g$ en $k=0$ par la valeur 0, qui pour $k \neq 0$ est définie par

$$\varepsilon_{f(x)}^g(k) = \|k\|^{-1} \left(g(f(x)+k) - g(f(x)) - Dg(f(x)) \cdot k \right)$$

de sorte qu'il est possible d'écrire les égalités

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) \\ &= Dg(f(x)) \cdot \left(Df(x) \cdot h + \|h\| \varepsilon_x^f(h) \right) + \|f(x+h) - f(x)\| \varepsilon_{f(x)}^g(f(x+h) - f(x)) \\ &= \left(Dg(f(x)) \circ Df(x) \right) \cdot h + R(h) \end{aligned}$$

Par suite la norme $\|R(h)\|$ du reste est majorée par

$$\|h\| \|Dg(f(x))\| \|\varepsilon_x^f(h)\| + \|h\| \left(\|Df(x)\| + \|\varepsilon_x^f(h)\| \right) \|\varepsilon_{f(x)}^g(f(x+h) - f(x))\|$$

Comme f est continue en x et $\varepsilon_{f(x)}^g$ prolongée par la valeur 0, on peut conclure car

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \neq}} \varepsilon_{f(x)}^g(f(x+h) - f(x)) = 0$$

□

Corollaire 1.19.

Dans les conditions de la proposition 1.18, si les applications f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Démonstration. Elle est immédiate car les composées d'applications continues sont continues. □

Corollaire 1.20.

Soit une fonction numérique $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide Ω d'un espace normé E , différentiable en un point a de Ω et vérifiant $f(a) \neq 0$. Alors la fonction inverse $\frac{1}{f}$ est définie dans un voisinage ouvert de a , est différentiable en a , et

$$D\frac{1}{f}(a) = -f(a)^{-2} Df(a)$$

Démonstration. On applique les propositions 1.16 et 1.18, en n'oubliant pas l'isométrie surjective canonique entre $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, qui échange $GL(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^*$. □

Corollaire 1.21.

Étant donnés trois espaces normés E , F et G , un ouvert Ω de E , et deux applications $\Omega \xrightarrow{f} F$ et $\Omega \xrightarrow{g} G$, pour que les applications f et g soient différentiables en un point a de Ω , il faut et il suffit que l'application

$$(f, g) : \Omega \longrightarrow F \times G \quad (f, g)(x) = (f(x), g(x))$$

le soit en ce point. De plus pour tout accroissement h de E

$$D(f, g)(a) \cdot h = (Df(a) \cdot h, Dg(a) \cdot h)$$

Démonstration. La condition est nécessaire. On a successivement

$$\begin{aligned} (f, g)(a+h) - (f, g)(a) &= (f(a+h) - f(a), g(a+h) - g(a)) \\ &= (Df(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_a^f(h), Dg(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon_a^g(h)) \\ &= (Df(a) \cdot h, Dg(a) \cdot h) + \|h\| (\varepsilon_a^f(h), \varepsilon_a^g(h)) \end{aligned}$$

et l'on constate $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (\varepsilon_a^f(h), \varepsilon_a^g(h)) = 0$

La condition est suffisante. Notant P_F et P_G les projections linéaires canoniques de $F \times G$ sur F et G respectivement, on a les égalités $f = P_F \circ (f, g)$ et $g = P_G \circ (f, g)$, qui permettent de conclure grâce aux propositions 1.15 et 1.18. $\square$

Corollaire 1.22.

Soient quatre espaces normés E , F , G et H , deux applications $\Omega \xrightarrow{f} F$ et $\Omega \xrightarrow{g} G$ différentiables en un point a de l'ouvert Ω de E , et une application bilinéaire continue $F \times G \xrightarrow{B} H$.

Alors l'application $B(f, g)$ définie sur Ω par $B(f, g)(x) = B(f(x), g(x))$, à valeurs dans H , est différentiable en a et pour tout accroissement h de E on a

$$DB(f, g)(a) \cdot h = B(Df(a) \cdot h, g(a)) + B(f(a), Dg(a) \cdot h)$$

Démonstration. Elle est la conséquence immédiate du corollaire précédent, des propositions 1.15 et 1.18, car l'application $B(f, g)$ est composée de l'application (f, g) et de l'application bilinéaire continue B . $\square$

Corollaire 1.23.

Soient deux fonctions numériques $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et $\Omega \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ définies sur un ouvert non vide Ω d'un espace normé E , différentiables en un point a de Ω . alors la fonction produit fg , définie par $fg(x) = f(x)g(x)$ est différentiable en a et

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

Démonstration. Le corollaire 1.22 avec $F = G = H = \mathbb{R}$ et $B(t, s) = ts$. $\square$