

Vidian Rousse | Nicolas Blanc

MATHS

BCPST 1

**EXERCICES
INCONTOURNABLES**

3^e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083946-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Outils de bases

1 Calcul algébrique	7
2 Nombres complexes et trigonométrie	27
3 Dénombrement	47

Algèbre

4 Systèmes linéaires	67
5 Matrices	77
6 Géométrie	105
7 Polynômes	125
8 Espaces vectoriels et applications linéaires	145

Analyse

9 Nombres réels et suites réelles	179
10 Limites et continuité des fonctions d'une variable	205
11 Dérivation des fonctions d'une variable réelle	225
12 Développements limités et études de fonctions	249
13 Intégration des fonctions sur un segment	269
14 Équations différentielles	299
15 Fonctions de deux variables	319

Probabilités

16	Statistique descriptive	333
17	Espaces probabilisés	345
18	Variables aléatoires finies	363
 Index		 405

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de première année BCPST de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques et d'algorithmique par le biais d'exercices. Chacun est suivi d'une correction détaillée et commentée dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en quatre parties et dix-huit chapitres, consacrés chacun à une partie du programme avec respect de la séparation en deux semestres. Au sein d'un même chapitre, les exercices ont été choisis de façon à passer en revue toutes les capacités attendues autour des notions à connaître. Ces capacités sont listées à la fin de chaque chapitre avec un renvoi explicite aux questions et exercices dans lesquels elles sont utilisées. Les principales formules sont également rappelées au sein de chaque capacité. En BCPST, l'informatique joue un rôle important et indissociable des mathématiques. Nous avons donc également intégré des questions de programmation en Python quand l'exercice pouvait s'y prêter.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement :

- la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements au brouillon (nous nous sommes en particulier autorisés une plus grande liberté dans la façon de formuler les idées et le sens profond de certaines notions parfois au mépris d'une certaine rigueur mathématique mais toujours dans un souci pédagogique),
- de la rédaction finale, rigoureuse et précise.

Cette dernière étape est signalée dans le texte par la présence d'un liseré gris sur la



gauche et d'un . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Par ailleurs, nous avons souhaité mettre en exergue les

idées réutilisables en les rédigeant sur un fond grisé et indiqué par un . De même,

la présence d'une difficulté courante est signalée par un .

L'index présent en fin d'ouvrage fournit des renvois aux principales notions aussi bien vers la liste de capacités du chapitre dont elles dépendent que vers leurs utilisations explicites dans d'autres chapitres.

Enfin, comme l'usage le veut l'expression "si et seulement si" sera parfois abrégée en "ssi".

Partie 1

Outils de bases

Outils de bases

1 Calcul algébrique 7

Semestre 1

1.1 : Techniques de sommation de base	7
1.2 : Séparation pairs/impairs	12
1.3 : La somme des premiers cubes I	13
1.4 : Sommes télescopiques	16
1.5 : Formule du binôme et moments de la loi binomiale	18
1.6 : La formule de Vandermonde I	21
Liste des capacités attendues	24

2 Nombres complexes et trigonométrie 27

Semestre 1

2.1 : Autour de la formule d'Al-Kashi	27
2.2 : Identité de Lagrange et inégalité de Cauchy-Schwarz	29
2.3 : Complexes de module 1	30
2.4 : Équations sur $\mathbb{C}$	31
2.5 : Racines 5-ièmes et constructibilité du pentagone	34
2.6 : Système d'équations sur $\mathbb{C}$	35
2.7 : Équations trigonométriques I	37
2.8 : Équations trigonométriques II	39
2.9 : Linéarisation et applications	42
Liste des capacités attendues	45

3 Dénombrement 47

Semestre 1

3.1 : Q.C.M. et structure de données	47
3.2 : Combinaisons avec répétitions	48
3.3 : Autour de la formule du crible	51
3.4 : Formules de Vandermonde et du binôme de Newton	54

3.5 : Tirages avec et sans remise	56
3.6 : Comment vider une urne ?	60
Liste des capacités attendues	62

Calcul algébrique

On rappelle le vocabulaire élémentaire associé aux sommes $\sum_{k=m}^n u_k$ et aux produits

$\prod_{k=m}^n u_k$ d'un nombre fini de termes :

- k est l'*indice* de la somme ou du produit,
- m et n sont les *bornes* respectivement *inférieure* et *supérieure* de la somme ou du produit,
- u_k est le *terme général* de la somme ou du produit.

Exercice 1.1 : Techniques de sommation de base

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme u_0 .

Calculer $\sum_{k=m}^n u_k$.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme u_0 .

Calculer $\sum_{k=m}^n u_k$ et $\prod_{k=m}^n u_k$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Écrire une fonction Python d'en-tête `def produit_impairs(n)` qui calcule le produit des n premiers entiers naturels impairs.

4. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$.

1. Il y a plusieurs façons naturelles de procéder :

- la suite est arithmétique donc son terme général s'écrit $u_k = u_0 + kr$ et on est ainsi ramené à une somme d'entiers consécutifs ;



$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n u_k &= \sum_{k=m}^n (u_0 + kr) = u_0 \sum_{k=m}^n 1 + r \sum_{k=m}^n k \\
 &= u_0(n-m+1) + r \left[\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{m-1} k \right] \\
 &= (n-m+1)u_0 + r \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} \right] \\
 &= (n-m+1)u_0 + \frac{n^2 + n - m^2 + m}{2} r \\
 &= (n-m+1)u_0 + \frac{(n+m)(n-m+1)}{2} r.
 \end{aligned}$$

- on peut alternativement utiliser l'expression $u_k = u_m + (k-m)r$ pour se ramener directement à la somme des premiers entiers ;



$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n [u_m + (k-m)r] &= u_m \sum_{k=m}^n 1 + r \sum_{k=m}^n (k-m) \\
 &= u_m(n-m+1) + r \sum_{k'=0}^{n-m} k' \\
 &\quad \text{(avec le changement d'indice } k' = k-m) \\
 &= (n-m+1)u_m + r \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \\
 &= (n-m+1)(u_0 + mr) + r \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \\
 &= (n-m+1)u_0 + r \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

- on peut encore utiliser la démarche du jeune Gauss* en ajoutant la somme inconnue à elle-même mais en ordonnant les termes dans l'autre sens

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & \cdots & + & k & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
 n & + & n-1 & + & \cdots & + & n+1-k & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
 \end{array}$$

ce qui lui a permis d'obtenir rapidement que $2 \sum_{k=1}^{100} k = 100 \times (100+1)$.



Avec les changements d'indice $k' = k-m$ et $k'' = n-k$, on a

$$\sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k'=0}^{n-m} u_{m+k'} + \sum_{k''=0}^{n-m} u_{n-k''} = \sum_{k=0}^{n-m} (u_{m+k} + u_{n-k}).$$

*. Carl Friedrich Gauss (1777-1865), le *Prince des mathématiciens*, a ouvert la voie à de nombreux domaines des mathématiques. Il racontait lui-même cette anecdote pour construire sa légende.

On remarque alors que $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + kr + u_n - kr = u_m + u_n$ est indépendant de k , d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n u_k &= (n-m+1) \frac{u_m + u_n}{2} = (n-m+1) \frac{u_0 + mr + u_0 + nr}{2} \\ &= (n-m+1)u_0 + r \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}. \end{aligned}$$

2. Pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, il y a encore plusieurs façons naturelles de procéder :

- la suite est géométrique donc son terme général s'écrit $u_k = u_0 q^k$ et on est ainsi ramené à la somme connue $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$;



$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n u_k &= \sum_{k=m}^n u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=m}^n q^{k-m} \\ &= u_m \sum_{k'=0}^{n-m} q^{k'} \quad (\text{avec le changement d'indice } k' = k - m) \\ &= u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} = u_0 q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

- on peut aussi reprendre l'idée de Gauss et voir comment la relation $u_{k+1} = qu_k$ permet d'obtenir une équation algébrique du premier degré d'inconnue la somme cherchée.



d'où

$$\begin{aligned} q \sum_{k=m}^n u_k &= \sum_{k=m}^n u_{k+1} = \sum_{k'=m+1}^{n+1} u_{k'} = \sum_{k=m}^n u_k + u_{n+1} - u_m, \\ \sum_{k=m}^n u_k &= \frac{u_m - u_{n+1}}{1 - q} = \frac{u_m - qu_n}{1 - q} = \frac{u_0 q^m - qu_0 q^n}{1 - q} = u_0 q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Quant au produit des termes consécutifs de la même suite géométrique, le problème se déplace dans l'exposant et se ramène à la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.



$$\prod_{k=m}^n u_k = \prod_{k=m}^n (u_0 q^k) = u_0^{n-m+1} q^{\left(\sum_{k=m}^n k\right)} = u_0^{n-m+1} q^{\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}}.$$

3. Le produit fait penser à la définition d'une factorielle mais seuls les termes impairs sont présents :

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2k-1) \times (2k) \times \cdots \times (2n-1) \times (2n) = (2n)!$$

$$1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1) \times \cdots \times (2n-1) = \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

Les termes pairs manquants donnent eux :

$$2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n) = \underbrace{[2 \times \cdots \times 2]}_{n \text{ fois}} [1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n].$$



$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{\left(\prod_{k=1}^n 2\right) \left(\prod_{k=1}^n k\right)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

L'implémentation en **Python** du calcul du produit se fait naturellement à l'aide d'une boucle **for**, il y a plusieurs possibilités selon que l'on calcule le terme général du produit à part ou non.

```
1 def produit_impairs(n): #
2     P=1                 #
3     for k in range(2,n+1): #
4         P=P*(2*k-1)      #
5     return P             #
```

```
1 def produit_impairs(n): #
2     P,I=1,3              #
3     for k in range(1,n): #
4         P,I=P*I,I+2      #
5     return P             #
```



```
1 def produit_impairs(n): #
2     P=1                 #
3     for k in range(3,2*n,2): # pour chaque impair entre 3 et 2n-1
4         P=P*k           #
5     return P            #
```

4. On commence par écrire la somme double comme deux sommes simples imbriquées ;



$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |i-j| \right)$$

puis on découpe la somme intérieure selon le signe de la différence $i-j$ pour pouvoir "éliminer" la valeur absolue ;



$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{i-1} (i-j) + 0 + \sum_{j=i+1}^n (j-i) \right]$$

en les écrivant en développé, on constate que les deux sommes sont connues

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i-1} (i-j) &= (i-1) + (i-2) + \cdots + 2 + 1, \\ \sum_{j=i+1}^n (j-i) &= 1 + 2 + \cdots + (n-i-1) + (n-i); \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j'=1}^{i-1} j' + \sum_{j''=1}^{n-i} j'' \right] \\ &\quad \text{(avec les changements d'indice } j' = i-j \text{ et } j'' = j-i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(i-1)i}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \right]\end{aligned}$$

on regroupe alors selon les puissances de i et on conclut par linéarité de la somme.



$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^n \left[i^2 - (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} n^2 (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [2n+1 - 3(n+1) + 3n] = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Quant à la seconde somme, on choisit de sommer en premier (la somme extérieure) sur j qui varie donc selon $1 \leq j \leq n$ (à ce stade, i n'existe pas encore) i.e. $\sum_{j=1}^n$, une fois j fixé, on somme sur i qui varie donc selon $1 \leq i \leq j$ (la contrainte concernant j a déjà été prise en compte précédemment) i.e. $\sum_{i=1}^j$.



$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n (2^j - 1) \quad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n 2^{j-1} - \sum_{j=1}^n 1 \quad \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= 2 \frac{1-2^n}{1-2} - n = 2^{n+1} - n - 2.\end{aligned}$$

Exercice 1.2 : Séparation pairs/impairs

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ et $I_n = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1}$.

En considérant $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$, calculer les deux sommes P_n et I_n .

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$.

1. Écrivons les sommes en développé pour visualiser ce qui se passe :

$$P_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2k} + \dots + \binom{2n}{2n}$$

$$I_n = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2k-1} + \dots + \binom{2n}{2n-1}$$

$$P_n + I_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \dots + \binom{2n}{2k-1} + \binom{2n}{2k} + \dots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}$$

$$P_n - I_n = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \dots - \binom{2n}{2k-1} + \binom{2n}{2k} - \dots - \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}.$$



On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$P_n + I_n = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

$$P_n - I_n = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} = (1-1)^{2n} = 0.$$

$$\text{D'où } P_n = I_n = \frac{1}{2} 2^{2n} = 2^{2n-1}.$$

2. Là encore, écrivons la somme en développé :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 = 0^2 - 1^2 + 2^2 - \dots - (2p-1)^2 + (2p)^2 - \dots - (2n-1)^2 + (2n)^2$$

pour constater qu'il y a des simplifications entre deux termes consécutifs puisque $(2p)^2 - (2p-1)^2 = [2p+2p-1][2p-(2p-1)] = 4p-1$.



Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{p=1}^n (2p)^2 - \sum_{p=1}^n (2p-1)^2 \\ &= \sum_{p=1}^n (4p-1) = 4 \sum_{p=1}^n p - \sum_{p=1}^n 1 \\ &= 2n(n+1) - n = n(2n+1). \end{aligned}$$

Exercice 1.3 : La somme des premiers cubes I

On se propose de calculer $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par quatre* méthodes différentes et indépendantes.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Calculer $(k+1)^4 - k^4$, en déduire que

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n$$

et retrouver l'expression de S_n .

3. a. Justifier que $(n+1-k)^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2k + 3(n+1)k^2 - k^3$.

b. En déduire que

$$S_n = n(n+1)^3 - 3(n+1)^2 \sum_{k=1}^n k + 3(n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - S_n$$

et retrouver l'expression de S_n .

4. a. En calculant de deux façons $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2$, montrer que

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i.$$

b. Retrouver alors l'expression de S_n .

1. Le résultat est donné dans l'énoncé, le raisonnement par récurrence est bien possible, encore faut-il indiquer clairement l'hypothèse de récurrence.



Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion " $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ".

Pour l'initialisation, $S_1 = \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ d'une part et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$ d'autre part donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Pour l'hérédité, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2 [(n+1) + 1]^2}{4} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Finalement, par principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

*. On trouvera une cinquième méthode dans l'exercice 7.2 en page 131.

2. On commence par développer pour visualiser la simplification.



D'après la formule du binôme de Newton,

$$(k+1)^4 - k^4 = (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Le terme général de S_n apparaît dans le membre de droite, on va donc sommer cette égalité pour $1 \leq k \leq n$ pour faire apparaître S_n .



En sommant cette égalité, pour k variant entre 1 et n , on obtient

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4] = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1).$$

D'où, par télescopage dans le membre de gauche et par linéarité de la somme dans le membre de droite,

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n.$$

En isolant S_n , on conclut que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - 1 - n - 4 \sum_{k=1}^n k - 6 \sum_{k=1}^n k^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1) \right] \\ &= \frac{n+1}{4} \left[(n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1) \right] \\ &= \frac{n+1}{4} \left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - 2n^2 - n \right] \\ &= \frac{n+1}{4} (n^3 + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

3.a. On reconnaît les coefficients de la formule du binôme, il suffit donc de bien découper $n+1-k$ en $(n+1)-k$.



D'après la formule du binôme de Newton,

$$(n+1-k)^3 = [(n+1)-k]^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2k + 3(n+1)k^2 - k^3.$$

3.b. Là encore, on reconnaît à droite le terme général de S_n et on somme donc l'égalité.



Par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k)^3 = (n+1)^3 n - 3(n+1)^2 \sum_{k=1}^n k + 3(n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - S_n.$$

On doit aussi reconnaître S_n dans le membre de gauche ce qu'on constate en écrivant la somme en développée $\sum_{k=1}^n (n+1-k)^3 = n^3 + (n-1)^3 + \dots + 2^3 + 1^3$ et qui incite donc à faire un changement d'indice par symétrie.



En outre, avec le changement d'indice $j = n + 1 - k$, $\sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^3 = S_n$ donc

$$\begin{aligned}
 S_n &= n(n+1)^3 - 3(n+1)^2 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - S_n \\
 \Leftrightarrow 2S_n &= \frac{n(n+1)^2}{2} [2(n+1) - 3(n+1) + (2n+1)] \\
 \Leftrightarrow S_n &= \frac{n(n+1)^2}{4} [- (n+1) + (2n+1)] \\
 \Leftrightarrow S_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

4.a. Il s'agit évidemment d'écrire la somme double comme deux sommes imbriquées avec les deux ordres possibles de sommation.



D'une part,

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j j^2 \right) = \sum_{j=1}^n (j^2 \times j) = S_n$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} j^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(i-1)i(2i-1)}{6} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6}(2i^3 - 3i^2 + i) \right].
 \end{aligned}$$

D'où, par linéarité de la somme,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i.$$

4.b. Il ne reste plus qu'à extraire S_n de l'égalité précédente et utiliser là encore les sommes connues des premiers entiers et premiers carrés.



En regroupant toutes les occurrences de S_n dans le membre de gauche,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{3}S_n &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6} \frac{n(n+1)}{2} \\
 \Leftrightarrow S_n &= \frac{3}{4} \frac{n(n+1)}{6} \left[n(2n+1) + \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2} \right] \\
 \Leftrightarrow S_n &= \frac{n(n+1)}{4} \frac{n(2n+1) + n}{2} \\
 \Leftrightarrow S_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Exercice 1.4 : Sommes télescopiques

1. Calculer $\sum_{i=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ pour $n \geq 2$.

2. a. Déterminer des constantes réelles a , b et c telles que

$$\forall k \geq 3, \quad \frac{1}{k(k^2 - 4)} = \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2}.$$

b. En déduire une expression simple de la somme $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k^2 - 4)}$ pour $n \geq 7$.

1. Il faut transformer l'écriture du terme général pour mettre en évidence la forme $a_{i+1} - a_i$ (utilisée ici avec $a_i = \ln i - \ln(i-1)$).



On a, pour $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) &= \ln \frac{i^2 - 1}{i^2} = \ln \frac{(i+1)(i-1)}{i^2} = \ln(i+1) - 2 \ln i + \ln(i-1) \\ &= [\ln(i+1) - \ln i] - [\ln i - \ln(i-1)]. \end{aligned}$$

Par télescopage, on en déduit

$$\sum_{i=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = [\ln(n+1) - \ln n] - [\ln 2 - \ln(2-1)] = \ln \frac{n+1}{2n}.$$

2.a. Comme mentionné dans l'énoncé, on demande de trouver a , b et c mais pas forcément d'expliquer comment. On procède donc au brouillon en partant de l'égalité à atteindre et en réduisant le second membre au même dénominateur

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k^2 - 4)} &= \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2} = \frac{ak(k+2) + b(k-2)(k+2) + c(k-2)k}{(k-2)k(k+2)} \\ &= \frac{a(k^2 + 2k) + b(k^2 - 4) + c(k^2 - 2k)}{k(k^2 - 4)} = \frac{(a+b+c)k^2 + 2(a-c)k - 4b}{k(k^2 - 4)}. \end{aligned}$$

La comparaison des termes de même degré (en k) du numérateur fait dire qu'il suffit d'avoir $a + b + c = 0$, $a - c = 0$ et $-4b = 1$ qu'on résout très simplement : $b = -\frac{1}{4}$ et

$$a = c = -\frac{b}{2} = \frac{1}{8}.$$

Ces nombres obtenus au brouillon sont alors injectés dans le second membre et la réduction au même dénominateur montre l'égalité avec le membre de gauche.



Pour $k \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{8(k-2)} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{8(k+2)} &= \frac{k(k+2) - 2(k-2)(k+2) + (k-2)k}{8(k-2)k(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k - 2(k^2 - 4) + k^2 - 2k}{8k(k^2 - 4)} = \frac{1}{k(k^2 - 4)} \end{aligned}$$