

Mathématiques

IUT 2^e année

Thierry Alhalel

Professeur à l'IUT de Blagnac

Florent Arnal

Professeur à l'IUT de Bordeaux

Laurent Chancogne

Professeur à l'INP de Bordeaux

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



DES MÊMES AUTEURS DANS LA MÊME COLLECTION :

Mathématiques IUT 1^{re} année

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Malakoff, 2018
ISBN 978-2-10-078001-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1. Probabilités	1
1.1 Généralités	1
1.1.1 Dénombrement	1
1.1.2 Probabilités	3
1.2 Variables aléatoires discrètes	6
1.2.1 Généralités	6
1.2.2 Espérance, variance et écart-type	8
1.2.3 Somme de deux variables aléatoires	11
1.3 Lois usuelles discrètes	12
1.3.1 Loi de Bernoulli	12
1.3.2 Loi binomiale	13
1.3.3 Loi de Poisson	15
1.3.4 Loi hypergéométrique	17
1.4 Variables aléatoires continues	18
1.5 Lois continues usuelles	22
1.5.1 Loi uniforme	22
1.5.2 Loi normale	24
1.5.3 Loi exponentielle	28
1.6 Exercices	30
 Chapitre 2. Statistiques	 41
2.1 Séries statistiques à 1 variable	41
2.2 Covariance d'une série à 2 variables	44
2.3 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés	44
2.4 Ajustement exponentiel par la méthode des moindres carrés	48
2.5 Statistiques inférentielles	49
2.5.1 Distribution d'échantillonnage des moyennes	49
2.5.2 Tests de conformité d'une moyenne	51
2.6 Exercices	53

Chapitre 3. Graphes (non orientés)	61
3.1 Introduction	61
3.2 Premières notions et notations	62
3.3 Chaînes, cycles et connexité	64
3.4 Graphes eulériens	65
3.5 Codage d'un graphe	66
3.6 Coloration d'un graphe	68
3.7 Exemples d'optimisations dans un graphe	70
3.7.1 Exemple de recherches de chaînes optimales	70
3.7.2 Arbres	72
3.7.3 Arbres couvrants	73
3.8 Exercices	75
 Chapitre 4. Arithmétique	 85
4.1 Division euclidienne	85
4.2 Nombres premiers	86
4.2.1 Test de primalité	86
4.2.2 Décomposition en facteurs premiers	88
4.3 Congruences	89
4.4 PGCD	90
4.5 Résolution d'équations diophantiennes (exemples)	93
4.5.1 Résoudre dans $\mathbb{Z}$: (E) $9x + 15y = 11$	93
4.5.2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$: (E) $9x + 15y = 18$	93
4.6 Les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	93
4.7 Application à la « cryptographie » (système RSA)	94
4.7.1 Principe du R.S.A. (Rivest, Shamir, Adleman)	94
4.7.2 Pourquoi $(M^e)^d = M[n]$?	95
4.8 Exercices	96
 Chapitre 5. Séries numériques	 105
5.1 Introduction	105
5.2 Notion de convergence et de divergence	106
5.3 Séries de Riemann	107
5.4 Critère de Cauchy et D'Alembert	108
5.5 Critère de comparaison	109
5.6 Convergence absolue et semi convergence	110
5.7 Exercices	111

Chapitre 6. Séries de Fourier	119
6.1 Introduction	119
6.1.1 Rappels	119
6.1.2 Séries trigonométriques	120
6.2 Séries de Fourier	120
6.2.1 Définitions	120
6.2.2 Cas des fonctions paires ou impaires	121
6.3 Développement en série de fourier d'une fonction périodique	122
6.4 Exercices	123
 Chapitre 7. Transformées de Laplace et Fourier	 131
7.1 Généralités sur la transformée de Laplace	131
7.1.1 Généralités	131
7.1.2 Transformées de Laplace de fonctions usuelles	133
7.1.3 Propriétés des transformées de Laplace	134
7.2 Applications de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles	136
7.3 Généralités sur la transformée de Fourier	138
7.4 Exercices	140
 Chapitre 8. Séries entières et transformée en Z	 145
8.1 Séries entières	145
8.1.1 Introduction	145
8.1.2 Domaine de convergence	145
8.1.3 Détermination pratique du rayon de convergence	146
8.1.4 Propriétés des séries entières	147
8.1.5 Développement en séries entières des fonctions usuelles	149
8.2 Transformée en Z	150
8.2.1 Définitions	150
8.2.2 Propriétés de la transformée en Z	152
8.2.3 Transformées usuelles	154
8.2.4 Recherche d'originaux	154
8.3 Exercices	155
 Chapitre 9. Diagonalisation de matrices	 161
9.1 Vecteurs propres et valeurs propres	161
9.2 Polynôme caractéristique	162

9.3	Diagonalisation	164
9.4	Trigonalisation	165
9.5	Théorème de Cayley-Hamilton	166
9.6	Application : calcul de la puissance d'une matrice	167
9.7	Exercices	168
Chapitre 10. Dérivées partielles et opérateurs vectoriels		179
10.1	Notion de fonctions réelles de plusieurs variables	179
10.2	Dérivées partielles	180
10.3	Différentielles et dérivées totales	182
10.4	Dérivation vectorielle, opérateur nabla et vecteur gradient	183
10.5	Opérateurs divergent et rotationnel	185
10.6	Opérateur Laplacien	186
10.7	Exercices	186
Chapitre 11. Calcul des incertitudes		191
11.1	Introduction au calcul et à la présentation des incertitudes	191
11.2	Propagation des incertitudes : une introduction	192
11.3	Calcul des incertitudes en quadrature (moderne)	193
11.4	Incertitude de type A et de type B : généralités	197
11.5	Calcul des incertitudes de type A	197
11.6	Calcul des Incertitudes systématiques (de type B)	200
Chapitre 12. Intégrales multiples et applications		203
12.1	Rappels sur le calcul des aires planes par intégration	203
12.2	Calcul du volume des solides de révolution	204
12.3	Coordonnées cylindriques et sphériques	206
12.4	Intégrales doubles et triples	207
12.5	Application des intégrales multiples	208
12.6	Exercices	209
Chapitre 13. Le calcul numérique des intégrales		217
13.1	La méthode des rectangles.....	217
13.1.1	Principe de la méthode et code C.....	217
13.1.2	Code python	221
13.2	La méthode des trapèzes.....	222

13.2.1 Principe de la méthode et code C.....	222
13.2.2 Code python	224
13.3 Le cas des intégrales multiples	225
13.4 La méthode de MonteCarlo : évaluation d'une intégrale.....	225
13.4.1 Mise en jambes et principe de l'algorithme : cas d'une intégrale simple.	225
13.4.2 Code python	229
13.4.3 Un exemple : le cas des intégrales doubles	229
13.4.4 Code python pour l'intégrale double	232
Chapitre 14. Exercices de révision	235
Questions tirées du concours 2016.....	235
Thème : Algèbre linéaire	235
Questions tirées du concours 2015	236
Thème : Algèbre linéaire	236
Questions tirées du concours 2014.....	236
Thème : Algèbre linéaire	236
Questions tirées du concours 2013	237
Thème : Algèbre linéaire, (Suites)	237
Correction	238
Questions tirées du concours 2012	245
Probabilités	245
Séries de Fourier	246
Questions tirées du concours 2015	246
Probabilités	246
Correction	248
Annexe A. Rappels de géométrie vectorielle.....	253
A.1 Produit scalaire de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$	253
A.2 Produit vectoriel	254
A.3 Produit mixte	255
A.4 Double produit vectoriel	255
A.5 Exercices	256
Annexe B. Table de la loi normale centrée réduite	259
B.1 Loi normale centrée réduite	259
B.2 Table pour des grandes valeurs de t	260

Objectifs

- Effectuer un dénombrement et en déduire une probabilité.
- Distinguer une loi de probabilité discrète et une loi continue.
- Modéliser un problème au travers d'une loi adaptée.
- Approximer une loi par une autre.
- Calculer et interpréter une espérance, une variance.

1.1 GÉNÉRALITÉS

1.1.1 Dénombrement

Définition 1.1

Soit E un ensemble fini.

Le cardinal de E , noté $\text{card}(E)$, est le nombre d'éléments de E .

Propriété 1.1

Soient E et F deux ensembles finis. On a :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Si, de plus, E et F sont disjoints ($E \cap F = \emptyset$) alors

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$$

Propriété 1.2

Soient E et F deux ensembles finis.

Le cardinal de $E \times F = \{(x; y) \text{ où } x \in E \text{ et } y \in F\}$ est tel que :

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$



La propriété précédente permet de dénombrer les tirages correspondants à des tirages successifs (ou dans lesquels la notion d'ordre est sous-jacente...).

Exercice 1.1

On prélève successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules vertes et une boule noire.

- a. Dénombrer les tirages avec une boule rouge puis une boule verte.*
- b. Dénombrer les tirages avec une boule rouge et une boule verte.*

Solution :

a. Dénombrer les tirages avec une boule rouge puis une boule verte revient à déterminer le cardinal de l'ensemble $R \times V$ où R correspond à l'ensemble constitué par les boules rouges et V correspond à l'ensemble des boules vertes.

On a : $\text{card}(R \times V) = \text{card}(R) \times \text{card}(V) = 3 \times 2 = 6$.

b. Dans ce second cas, il faut prendre en compte la position de la boule rouge (ou verte). Il s'avère qu'il y a deux positions envisageables pour la boule rouge donc le nombre de tirages avec une boule rouge et une boule verte est $2 \times 3 \times 2 = 12$.

Propriété 1.3

Soient E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tel que $p \leq n$.

Le nombre de sous-ensembles de E ayant p éléments est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Les parties à p éléments de E sont également appelées combinaisons de E à p éléments.



Les combinaisons sont utilisées lorsqu'on est confronté à des situations dans lesquelles l'ordre d'apparition d'un élément n'a pas d'importance...

Exercice 1.2

On prélève simultanément trois boules dans une urne contenant quatre boules rouges, trois boules vertes et une boule noire.

- a. Dénombrer les tirages avec trois boules rouges.*
- b. Dénombrer les tirages avec deux boules rouges et une boule verte.*

Solution

a. On souhaite dénombrer les tirages avec trois boules rouges parmi quatre donc il

y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages possibles.

b. Dans cette question, on peut choisir deux boules parmi quatre rouges et une boule parmi les trois vertes. Il y a donc $\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$ tirages possibles.



$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Plus généralement, on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

1.1.2 Probabilités

Définition 1.2

Une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance est appelée expérience aléatoire.

Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une issue.

L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire est appelé univers noté Ω .

Toute partie de l'univers est appelée un événement.

Ω est appelé « événement certain » ; $\emptyset$ est appelé « événement impossible ».

Un événement qui ne contient qu'une éventualité est un événement élémentaire.

Définition 1.3

Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils n'ont aucune éventualité commune.
- L'événement constitué de toutes les éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A est appelé l'événement contraire de A , noté $\bar{A}$.

Définition 1.4

Soit Ω un ensemble fini et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

L'application $p : P(\Omega) \rightarrow [0;1]$ est une probabilité sur Ω si :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour tous A et B de $P(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$
- $p(\Omega) = 1$.



La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A .

La somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent l'univers Ω est égale à 1.

Exercice 1.3

On fait tourner une roue de loterie dont les numéros sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

On note p_i la probabilité de l'événement $\{i\}$.

On suppose que : $p_1 = p_6 = 0,2$; $p_5 = 0,3$ et $p_2 = p_3 = p_4$.

Calculer la probabilité de l'événement A : « on obtient un nombre pair ».

Solution

$A = \{2;4;6\}$ et les événements $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$ sont deux à deux incompatibles.

On a donc : $P(A) = p_2 + p_4 + p_6$. De plus, $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$ donc $p_2 = p_4 = 0,1$ donc

$P(A) = 0,4$.

Propriété 1.4

Soient A et B deux événements de l'univers Ω , on a :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Définition 1.5

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.

Propriété 1.5

En situation d'équiprobabilité, on a, pour tout événement A d'un univers Ω fini :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exercice 1.4

On lance deux dés non truqués. Calculer la probabilité des événements A : "on obtient un double 6" et B : "on obtient une somme égale à 5".

Solution

Pour être en situation d'équiprobabilité, on est amené à considérer l'univers Ω comme un ensemble de 36 couples. Ainsi : $P(A) = \frac{1}{36}$.

De plus $B = \{(1;4), (4;1), (2;3), (3;2)\}$ donc $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Définition 1.6 : probabilité conditionnelle

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et B un événement de probabilité non nulle.

On appelle probabilité de A sachant B le nombre, noté $P_B(A)$, défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$$

Propriété 1.6 : formule des probabilités totales

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et A, B deux événements de probabilité non nulle. On a :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \text{ soit } P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\bar{B}}(A)P(\bar{B}).$$

Exercice 1.4

Une célèbre marque produit des objets de très bonne qualité, avec une probabilité de panne de 0,01.

Malheureusement, des contrefaçons de mauvaise qualité ont été mises sur le marché et elles occupent 20 % du marché. Ces contrefaçons ont une probabilité de panne de 0,1.

- a. Si on achète cet objet, quelle est la probabilité qu'il ne fonctionne pas ?
- b. Si on achète un produit défectueux, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une contrefaçon ?

Solution

On note D l'événement : « le produit est défectueux » et V l'événement : « le produit n'est pas une contrefaçon ».