

TEORIA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E PROPAGAÇÃO DE ONDAS

César Augusto Dartora
Armando Heilmann

TEORIA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E PROPAGAÇÃO DE ONDAS

César Augusto Dartora

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Departamento de Engenharia Elétrica - DELT

Grupo de Sistemas de Propagação de Sinais - SPS

Armando Heilmann

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Departamento de Engenharia Elétrica - DELT

Grupo de Sistemas de Propagação de Sinais - SPS

Grupo de Fenômenos da Eletricidade Atmosférica- FEA

1 ª edição

Copyright © 2021
Todos os direitos reservados
Proibido a cópia parcial ou integral, por qualquer meio ou processo, especialmente nos sistemas gráficos, fotográficos, reprográficos, fonográficos, videográficos, internet, e-book, sem autorização do autor. Vedada a memorização e/ou recuperação total ou parcial em qualquer sistema de processamento de dados e a inclusão de qualquer parte da obra em qualquer programa juscibernético. A violação dos direitos autorais é punível como crime (art. 184 e parágrafos, do Código Penal, conforme a Lei n^o 10.695. de 07.01.2013) com pena de reclusão, de dois a quatro anos, e multa, conjuntamente com busca a apreensão e indenização diversas (artigo 102. 103 parágrafo único, 104. 105. 106 e 107 itens 1. 2 e 3 da Lei n^o 9.610. de 19.06.1998. Lei dos Direitos Autorais). Os autores acreditam que todas as informações aqui apresentadas estão corretas e podem ser utilizadas para qualquer fim legal. Entretanto, não existe qualquer garantia, explícita ou implícita, de que o uso de tais informações conduzirá sempre ao resultado esperado. Os nomes de páginas de internet e empresas, que eventualmente possam ser mencionados, foram utilizados somente com o propósito de ilustrar os exercícios e conceitos, não tendo qualquer vínculo com o livro, não garantido a sua existência nem divulgação.
Publicação independente
Créditos da capa: License: CC0 Public Domain -
https : //www.pinterest.com.au

NOTA PARA ESTA EDIÇÃO

As figuras, quando não citado a fonte, são de autoria do próprio autor e pesquisador deste livro. Algumas imagens utilizadas neste livro foram obtidas a partir do uso do IDL, *PowerPoint* ou *CorelDRAW* X3. Imagens ou figuras que não são próprias do autor e pesquisador desta obra, foram retiradas de *sites* de acesso público (citado a fonte).

Sobre os Autores

César Augusto Dartora

Possui graduação em Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica pela Universidade de Passo Fundo (2000), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (2002) e doutorado em Física pela Universidade Estadual de Campinas (2005). Atualmente é Professor Associado no Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Paraná. Tem experiência na área de Física, com ênfase na grande área de Física da Matéria Condensada e também em Óptica e Propagação de Ondas, atuando principalmente nos seguintes temas: Equações de Maxwell, Mecânica Quântica, Nanomagnetismo e Física Mesoscópica, Óptica e Teoria de Difração, Teoria Quântica de Campos e Aplicações na Física da Matéria Condensada.

Armando Heilmann

Bacharel/licenciado em Física (Universidade Federal do Paraná), mestre em Ciências Atmosféricas (Universidade de São Paulo - USP, no Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG)), doutor em Ciências Geodésicas UFPR, ênfase em Dinâmica Orbital, Pós-Doutorado (Sistema Meteorológico do Paraná) (2012-2013) em Processos Eletrostáticos e Eletromagnéticos de Descargas Atmosféricas Aplicados à Meteorologia e (2013-2014) em Eletricidade Atmosférica e Monitoramento de Campo Elétrico Quase-Estático Atmosférico Local. Membro da *Electrostatics Society of America* e integrante do *CRT Wilson Institute for Atmospheric Electricity*, atualmente é docente do Departamento de Engenharia Elétrica - DELT/UFPR, membro do Centro de Inovação em Engenharia Elétrica - CIEL/DELT e colegiado de curso no DELT. Um dos líderes do grupo de pesquisa em Sistemas de Propagação de Sinais - DEL/UFPR e coordenador do grupo de Fenômenos da Eletricidade Atmosférica FEA/UFPR. Como pesquisador participa de projetos $P\&D$, colaborações internacionais com o *INESC TEC* (Portugal), *Atmospheric Electrodynamical Coupling - ACATMOS* do projeto LEONA (*Transient Luminous Event and Thunderstorm High Energy Emission Collaborative Network*) - na América Latina, atuando nas áreas de pesquisa: Eletricidade Atmosférica, Mapeamento de Descargas Atmosféricas, Processo de Eletrificação das Descargas Atmosféricas, Propagação e Monitoramento de Ondas Eletromagnéticas em Baixas Frequências, Detecção de Relâmpagos em "*Low Frequencies*"e "*Short-Range*", Efeitos Locais das Tempestades com Raios, Perturbação Eletromagnética (Antenas e Fenômenos Elétricos na Alta Atmosfera) na Dinâmica Orbital de Satélites.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dartora, C. A., Heilmann, A.

Teoria do Campo Eletromagnético e Propagação de Ondas. 1ª. Edição. - Curitiba, 2021.

ISBN: 978-65-00-24655-1



Sumário

Sumário **i**

I Relações Vetoriais **3**

1 Introdução **11**
1.1 O Espectro Eletromagnético e Suas Aplicações 16
1.2 Referências Deste Capítulo 22

2 Fundamentos Matemáticos **23**
2.1 Partículas e Campos 23
2.2 Propriedades e Operações com Escalares e Vetores 28
2.2.1 Propriedades básicas de escalares 28
2.2.2 Propriedades básicas da soma de vetores 28
2.2.3 Produtos vetoriais e suas propriedades 29
2.2.4 Vetores unitários 32
2.3 Sistemas de Coordenadas e Transformações entre Sistemas 33
2.3.1 Coordenadas retangulares (x, y, z) 33
2.3.2 Coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) 34
2.3.3 Coordenadas esféricas (r, θ, φ) 36
2.3.4 Transformações entre coordenadas 37
2.4 Calculo Vetorial Diferencial e Integral: Teoremas 42
2.4.1 Diferenciação de vetores 43
2.4.2 Integração de vetores 43
2.4.3 O operador nabla 45
2.4.4 Derivada direcional: gradiente 45
2.4.5 Fluxo de um vetor, divergência e teorema de Gauss 46
2.4.6 Circulação de um vetor, rotacional e teorema de Stokes . . 49
2.4.7 Outras identidades importantes 52
2.5 Números Complexos e Fasores 53
2.6 As Operações com Números Complexos 55
2.6.1 A adição e a subtração 55
2.6.2 A divisão de dois números complexos 56
2.6.3 A forma polar de números complexos 56

2.6.4 A forma exponencial de números complexos 57
2.6.5 A multiplicação e a divisão de números complexos na forma exponencial 60
2.6.6 Elevando um complexo na forma exponencial a uma potência 60
2.6.7 As raízes de um número complexo $z = re^{i\alpha}$ 61
2.7 Referências Deste Capítulo 61

3 As Equações de Maxwell 63
3.1 Equações de Maxwell em Forma Diferencial e Integral 64
3.2 Significado Físico das Equações de Maxwell 66
3.3 Leis de Conservação e o Vetor de Poynting 73
3.3.1 Consistência das equações e a equação de continuidade . . 74
3.3.2 Teorema de Poynting em meios lineares, homogêneos e isotrópicos 75
3.4 Equações de Maxwell no Regime Harmônico (Forma Fasorial) . . 82
3.5 Potenciais Eletromagnéticos de Lorentz 83
3.6 Os Potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ e Condições de Calibre 84
3.7 Solução Formal das Equações de Ondas dos Potenciais 87
3.7.1 Solução de ϕ e $\mathbf{A}$ no calibre de Lorentz pelo método das funções de Green 89
3.8 Potenciais Eletromagnéticos no Regime Harmônico 92
3.9 Referências Deste Capítulo 95

4 Potenciais Eletromagnéticos 101
4.1 Os Potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ e Condições de Calibre 102
4.2 Solução Formal das Equações de Ondas dos Potenciais 105
4.3 Potenciais Eletromagnéticos no Regime Harmônico 107
4.4 Teoria da Radiação e Considerações Sobre o Vetor de Poynting . . 110
4.5 Referências Deste Capítulo 114

5 Ondas Planas Uniformes 116
5.1 As Equações de Onda 117
5.1.1 Solução de ondas planas uniformes 121
5.1.2 Uma abordagem alternativa: A solução da equação de ondas no vácuo 128
5.2 Análise da Propagação de Ondas em Meios Materiais 133
5.2.1 Meios dielétricos ideais ou meios sem perdas ($\sigma = 0$) . . . 135
5.2.2 Meios dielétricos reais ou com pequenas perdas($\sigma << \omega\varepsilon$) 136
5.2.3 Meio condutor ($\sigma >> \omega\varepsilon$) 138
5.2.4 Meios com perdas e condutividade da ordem $\sigma \sim \omega\varepsilon$ . . . 140
5.3 Ondas Planas no Espaço Recíproco 141

5.4 Representação Geral da Polarização de Ondas Eletromagnéticas . 142
5.4.1 Polarização linear 144
5.4.2 Polarização circular 145
5.5 Condições de Contorno e Interfaces Planas Entre Meios 151
5.5.1 A incidência normal 153
5.5.2 Incidência oblíqua 156
5.6 Um Exemplo de Propagação em Meios Anisotrópicos 164
5.6.1 Efeito de rotação de Faraday 168
5.7 A Equação de Ondas em Meio Dielétrico Isotrópico e Não-Homogêneo170
5.8 Referências Deste Capítulo 171

6 Linhas de Transmissão - Guias de Onda 176
6.1 Principais Tipos de Guias de Onda 178
6.1.1 Formas de abordagem para o estudo de propagação de ondas181
6.2 A Decomposição Transversal-Longitudinal 182
6.3 Conceitos Fundamentais Sobre Análise Modal 186
6.3.1 Tipos de modos 186
6.3.2 Equações para modos TE ou TM no regime harmônico . . 189
6.4 Análise dos Modos TEM na Linha de Transmissão 190
6.4.1 Equações do telegrafista ou de linhas de transmissão . . . 193
6.4.2 Uma dedução alternativa das equações do telegrafista: O modelo de parâmetros distribuídos 195
6.4.3 Solução das equações do telegrafista 197
6.5 Modo TEM em um Guia Coaxial 201
6.6 Guias de Ondas Metálicos: Propagação de energia e atenuação . . 204
6.6.1 Modos TE em guia metálico 204
6.6.2 Modos TM em guia metálico 205
6.6.3 Propagação da energia e perdas 206
6.6.4 Guia metálico retangular 209
6.6.5 Demonstração: Ausência de modos TEM em um guia oco . 213
6.6.6 Guia metálico de seção circular 215
6.7 Cavidade Ressonante 218
6.8 Referências Deste Capítulo 221

7 Antenas 228
7.1 O Dipolo Elétrico 228
7.2 O Regime Quase-Estático 239
7.3 Características Básicas de Antenas 241
7.3.1 Principais tipos de antenas 242
7.3.2 Regiões de campo e campos de radiação 248
7.3.3 Elemento diferencial de ângulo sólido $d\Omega$ 250

7.3.4 Potência total radiada 253
7.3.5 O radiador isotrópico ideal 254
7.3.6 Função diretividade angular e diagramas de radiação . . . 254
7.3.7 Eficiência de radiação e ganho de antena 258
7.3.8 Potência efetiva radiada isotropicamente - EIRP 259
7.3.9 Largura de feixe (Beamwidth) 260
7.3.10 Área de abertura efetiva A_{ef} 261
7.3.11 Polarização de antena 262
7.3.12 A fórmula de Friis 263
7.3.13 Cálculo da amplitude de pico do campo elétrico 266
7.3.14 A equação do radar 267
7.4 Impedância de Antena 268
7.4.1 Considerações sobre ruído em antenas 272
7.5 Referências Deste Capítulo 273

SINOPSE

Este livro oferece aos estudantes de graduação em engenharia e física uma visão mais detalhada dos fundamentos da teoria eletromagnética e do rigor matemático desta teoria aplicado na propagação de ondas eletromagnéticas. A apresentação da teoria de maneira sucinta, permite aos leitores explorar os detalhes matemáticos e os conceitos inerentes à cronologia da qual foi desenvolvido toda a teoria eletromagnética. A obra inicia com uma introdução sobre o espectro eletromagnético passando para os fundamentos matemáticos das partículas e campos. As propriedades e operações básicas são importantes para a correta manipulação das equações da teoria eletromagnética, por isso é despendido um capítulo inteiro para este assunto, incluindo a descrição detalhada dos principais sistemas de coordenadas e suas transformações. Muitas descrições e modelos matemáticos no eletromagnetismo são melhor representadas primeiro na forma diferencial e depois na forma integral. Sobre isto são apresentadas as premissas que oferecem capacitação e maturidade algébrica para tratar da teoria de campos eletromagnéticos.

A existência de ondas eletromagnéticas é apresentada como um processo sequencial de sucessivas induções mútuas de campos elétricos e magnéticos variando no espaço e no tempo, especialmente definidas pelas equações de Maxwell. Veremos que estas equações são válidas sempre e em toda parte, exceto nos pontos onde as propriedades do material de meios eletromagnéticos mudem de modo abrupto de um valor para outro. Os potenciais eletromagnéticos, na sequência, oferecem subsídios para o cálculo dos vetores campo elétrico e magnético, o que por sua vez, permite um melhor entendimento do Teorema de Poynting.

Uma aplicação da teoria de campos eletromagnéticos ocorre no estudo da propagação de ondas, portanto, um estudo sobre as ondas planas uniformes, em

diferentes meios de propagação, recebe destacada atenção nesta obra.

A implicação mais importante das equações de Maxwell para o campo eletromagnético é o conceito de ondas eletromagnéticas que podem existir no espaço livre e em meios materiais e que desta forma, podem representar um meio de transmissão de energia e de informação sobre uma distância, ou seja, trataremos das ondas eletromagnéticas guiadas. Veremos que estas ondas podem se propagar por um sistema composto de condutores e dielétricos, cujo sistema de propagação ocorre através de linhas de transmissão e guias de onda. A teoria de campos eletromagnéticos aplicado a linhas de transmissão permite compreender processos físicos que caracterizam a propagação, incluindo a atenuação ao longo de uma linha de transmissão.

Um condutor que é percorrido por uma corrente variando rapidamente no tempo, irradia energia eletromagnética no espaço ao seu redor, no entanto, existem circunstâncias no qual é desejável obter máxima irradiação eletromagnética em determinada direção e frequência. Para isto, são considerados sistemas com partes dielétricas denominadas antenas. Por isso, a última parte desta obra destina uma discussão sobre as muitas aplicações de antenas, no âmbito do estudo da irradiação eletromagnética e seus fundamentos matemáticos.

O diferencial desta obra

(A) Exposição objetiva, completa e organizada do material, prezando pelo equilíbrio entre aplicabilidade e profundidade.

(B) Flexibilidade de abordagem dos capítulos para diferentes cursos.

(C) Desdobramento das passagens matemáticas entre a teoria e o modelo final, equacionamento particionado passo a passo.

(D) Exercícios contextualizados para aplicações imediata dos conceitos e modelos matemáticos.

(E) Destaque das principais equações e modelos matemáticos.

(F) Indicação de referência por capítulo oferecendo oportunidade de aprofundamento do conteúdo em auto estudo.

Parte I

Relações Vetoriais

I - Álgebra de Vetores

(1) $$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + (A_2 \pm B_2)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2} + (A_3 \pm B_3)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{3}$$

(2) $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

(3) $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1}(A_2B_3 - A_3B_2) + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2}(A_3B_1 - A_1B_3) + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{3}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

(4) $$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta$$

(5) $$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

(6) $$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

(7) $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

(8) $$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

(9) $$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D}$$

II - Operações Vetoriais em Sistemas Coordenados Usuais

Coordenadas Retangulares (x, y, z)**:**

(10) $$\text{grad}\ \Phi = \nabla\Phi = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

(11) $$\text{div}\ \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(12)
$$\text{rot}\ \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

(13) $$\nabla^2\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi$$

(14) $$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \nabla^2 A_x + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \nabla^2 A_y + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \nabla^2 A_z$$

Coordenadas Cilíndricas (ρ, φ, z)**:**

(15) $$\nabla \Phi = \hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

(16) $$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(17)
$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

(18) $$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

(19) $$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Observe que nestas coordenadas
$\nabla^2 \mathbf{A} \neq \hat{\mathbf{a}}_\rho \nabla^2 A_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \nabla^2 A_\varphi + \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \nabla^2 A_z$**.**

Coordenadas Esféricas (r, θ, φ)**:**

(20) $$\nabla \Phi = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\mathbf{a}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

(21) $$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

(22) $$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \frac{\hat{\mathbf{a}}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] + \\ + \frac{\hat{\mathbf{a}}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

(23) $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

(24) $$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$$

III - Identidades Vetoriais

(25) $$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi$$

(26) $$\nabla\cdot\nabla\Phi = \nabla^2\Phi$$

(27) $$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla\cdot\mathbf{A}$$

(28) $$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Psi\nabla^2\Phi + \Phi\nabla^2\Psi + 2\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi$$

(29) $$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$$

(30) $$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = \nabla\Phi \times \mathbf{A} + \Phi\nabla \times \mathbf{A}$$

(31) $$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

(32) $$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

(33) $$\nabla \times \nabla\Phi = 0$$

(34) $$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

Teorema de Gauss

(35) $$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Teorema de Stokes

(36) $$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Identidades de Green Escalares

(37) $$\int_V \left(\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Psi\nabla^2\Phi\right) dV = \oint_S \Psi\nabla\Phi \cdot d\mathbf{S}$$

(38) $$\int_V \left(\Psi\nabla^2\Psi - \Phi\nabla^2\Psi\right) dV = \oint_S (\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi) \cdot d\mathbf{S}$$

Identidades de Green Vetoriais

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B})\, dV = \int_V [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}]\, dV$$

(39)

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B})\, dV = \oint_S \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B})\, dV = \oint_S [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{S}$$

Outras Identidades

(40) $$\int_V \nabla\Phi\, dV = \oint_S \Phi\, d\mathbf{S}$$

(41) $$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS \qquad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$$

(42) $$\int_S \mathbf{n} \times \nabla\Phi \, dS = \oint_C \Phi \, d\mathbf{l}$$

(43) $$\nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{R})$$

onde $\delta^3(\mathbf{R}) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$
é a função delta de Dirac em 3 dimensões e $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

(44) $$\nabla \cdot \mathbf{R} = 3 \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) = 0$$

(45) $$\nabla(R) = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

(46) $$\nabla'(R) = -\frac{\mathbf{R}}{R}$$

(47) $$\nabla \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \nabla' \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

onde ∇ opera em $\mathbf{r}$ e ∇' em $\mathbf{r}'$, $\mathbf{R} = \mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}'$.
Na notação utilizada acima, os vetores são denotados por letras em negrito, enquanto escalares por letras gregas.

Constantes Úteis

Velocidade da luz no vácuo - $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2.998 \times 10^8$m/s.

Permissividade dielétrica do vácuo - $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

Permeabilidade magnética do vácuo - $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

Impedância do Espaço livre - $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.7\ \Omega$

Módulo da carga do elétron - $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

Constante de Planck - $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}$ J.s

Constante de Boltzmann - $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K

Número de Avogadro - $N_0 = 6.023 \times 10^{23}$ /mol

Massa de repouso do elétron - $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg = 0.511 MeV/c^2

Massa de repouso do próton - $m_p = 1.672 \times 10^{-27}$ kg = 938.3 MeV/c^2

Massa de repouso do nêutron - $m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ kg = 939.6 MeV/c^2

Magnéton de Bohr - $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9.27 \times 10^{24}$ A.m^2 (ou J/Tesla)

Raio de Bohr - $a_0 = 4\pi\varepsilon_0/(m_e e^2) = 5.29 \times 10^{-11}$ m

Energia de Bohr - $E_1 = -m_e e^4/[(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2] = -2.17 \times 10^{-18}$ J = -13.6 eV

Comprimento de onda Compton do Elétron - $\lambda_C = h/m_e c = 1.43 \times 10^{-12}$ m

Constante de estrutura fina - $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c) = 1/137$

1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J ou 1 J$= 6.242 \times 10^{18}$ eV

Capítulo

1 INTRODUÇÃO

Pode-se afirmar de modo seguro que a tarefa fundamental da Física é compreender as leis que governam todos os fenômenos naturais, permitindo ao campo da Engenharia a aplicação do conhecimento acumulado à solução de problemas práticos, visando promover conforto e melhoria das condições de vida das pessoas na sociedade moderna, através de projetos de construção civil e saneamento, meios de transporte, desenvolvimento de dispositivos mecânicos, elétricos e eletrônicos, concepção de equipamentos para uso doméstico, na medicina, em aplicações militares e tantos outros sistemas.

A Física, por ser uma ciência empírica, ampara-se no método científico, que consiste na formulação de teorias cujas hipóteses científicas, segundo Karl Popper, são dotadas de uma propriedade fundamental, a falseabilidade ou refutabilidade. Uma hipótese falseável é aquela para a qual a realização de testes experimentais adequados permitem demonstrar se a hipótese é verdadeira ou falsa, dadas as condições do experimento, podendo a hipótese eventualmente ser refutada. Diz-se que uma teoria científica é corroborada pelo experimento, mas nunca que ela é absolutamente verdadeira, uma vez que pode haver algum experimento futuro que venha a refutá-la parcialmente, sob a luz de novos resultados.

Desse modo, o papel do cientista é propor teorias contendo uma série de hipóteses e postulados científicos, de tal sorte que a teoria geral permita fazer previsões e derivar conclusões particulares, passíveis dos mais variados testes experimentais. Uma teoria é aproximadamente válida (corroborada) se suas previsões são confirmadas pela experiência sob certas condições, não significando a validade de modo

geral, ou seja, a teoria pode não ser mais válida se as condições experimentais são alteradas.

Em outras palavras, a teoria científica permite uma aproximação assintótica das verdadeiras leis naturais, possuindo limites de validade. Uma teoria científica bem sucedida sob determinadas condições, poderá se mostrar falha em condições mais gerais ou extremas e nesse caso uma nova teoria se faz necessária, mas esta deverá ser bem sucedida tanto nas novas condições quanto nas situações em que a teoria antiga obteve sucesso.

Cada nova teoria científica deve aprimorar as anteriores, de tal forma que nos aproxima mais e mais da forma final das leis naturais. Os dados experimentais conhecidos previamente providenciam as preciosas dicas para o cientista na tarefa de propor teorias científicas.

A teoria eletromagnética é talvez a mais bem sucedida teoria da Física, com aplicações em praticamente todas as áreas da Ciência Básica e da Tecnologia, tendo se tornado o exemplo paradigmático da ciência moderna. Um pouco da história dessa fantástica jornada será contada a seguir. Os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos são conhecidos e estudados desde a Antiguidade e no princípio foram tratados como ramos distintos das ciências naturais e não como aspectos resultantes de uma mesma teoria.

O magnetismo é conhecido desde aproximadamente 900 A.C. quando Magnus, um pastor de ovelhas grego, percebeu que o seu cajado metálico era atraído pelas pedras da região denominada Magnésia. Os gregos também já conheciam algumas propriedades elétricas, descritas em 600 A.C. por Tales de Mileto. Em especial, sabia-se que o material âmbar, denominado *elektron* em grego, era capaz de atrair objetos leves depois de ter sido atritado a uma flanela, num processo hoje conhecido como eletrização por atrito. A hipótese atomística, considerada por Richard Feymann a mais importante de toda a ciência, segundo a qual a matéria é constituída por átomos, foi proposta originalmente ainda em 480 A.C. por Leucipo de Mileto e Demócrito de Abdera.

Como sabemos, a verificação dessa hipótese só foi possível na Idade Contemporânea. Em 295 A.C. Eucilhes publicou um tratado sobre os fenômenos ópticos conhecidos até então. Sabe-se que desde 121 D.C. os chineses conheciam propriedades magnéticas e sabiam que uma barra de ferro poderia ser imantada na presença de um ímã natural, mas o efeito da bússola só foi descrito em 1088 por Shen Kua Yao. Como sabemos, a bússola foi essencial para a navegação e a descoberta do "Novo Mundo", expandindo não somente os horizontes geográficos como também os conhecimentos da humanidade.

A Idade Média foi particularmente pobre em descobertas científicas, sobretudo aquelas relacionadas ao eletromagnetismo, pelo menos no mundo ocidental. Na Idade Moderna uma nova era para a ciência é inaugurada, sob a influência de filósofos como Renè Descartes, que propõe os fundamentos básicos do método científico. Nos Séculos XVI e XVII novos conhecimentos acerca dos movimentos planetários são obtidos, Nicolau Copérnico e Johannes Kepler propõe a teoria heliocentrista, segundo a qual a Terra se move em uma órbita aproximadamente circular em torno do Sol, assim como os outros planetas, e Galileu Galilei, com seus estudos sobre cinemática e suas observações astronômicas derivadas do aprimoramento do telescópio feito por ele mesmo, é considerado o pai da Física.

Em 1600 um marco para o estudo da Eletricidade e do Magnetismo é a publicação do tratado *De Magnete* pelo inglês William Gilbert. Ele descobriu que o próprio globo terrestre é um grande ímã e explicou parcialmente fenômenos ligados ao magnetismo, propondo que o magnetismo terrestre está relacionado ao seu movimento de rotação. Gilbert fez ainda o primeiro tratado sobre eletricidade, distinguindo os fenômenos magnéticos e os elétricos, e fabricou o primeiro eletroscópio.

Em 1648, no estudo da Óptica o holandês Snellius descobriu a lei da refração da luz e pouco depois, em 1665 Isaac Newton formulou suas primeiras hipóteses sobre gravitação, propondo ainda a teoria corpuscular da luz. Somente em 1676 foi demonstrado pelo dinamarquês Olaus Römer que a velocidade da luz é finita. Newton publicou em 1687 o seu monumental trabalho *Philosophiae naturalis principia mathematica*, onde enunciou a lei da gravitação universal e resumiu suas descobertas científicas.

A incompatibilidade da teoria corpuscular da luz proposta por Newton com as observações experimentais foi demonstrada por Huygens, que formulou em 1690 a hipótese ondulatória da luz. Huygens já havia descoberto em 1678 o fenômeno de polarização da luz. Os estudos da eletricidade avançam de forma rápida e em 1750 Benjamin Franklin propôs um modelo de fluído elétrico com dois estados de eletrificação: positivo e negativo. A conservação de carga elétrica total foi também proposta. Nessa mesma época, John Mitchell mostra que a ação de um ímã sobre outro pode ser deduzida a partir de uma lei de força que varia com o inverso do quadrado da distância entre os pólos individuais do ímã. Em 1785 o francês Charles Augustin Coulomb enunciou a lei das forças eletrostáticas que leva o seu nome e inaugurou um novo rumo para as pesquisas em eletricidade e magnetismo. Trabalhando de forma independente inventou uma balança de torção muito precisa para demonstrar a lei do inverso do quadrado da distância para as cargas elétricas, verificando ainda a lei de Mitchell para ímãs e sugerindo

ser impossível separar dois pólos magnéticos sem criar mais dois pólos em cada parte do ímã.

No ano de 1799 Alessandro Volta demonstrou a pilha voltaica e o alemão Friedrich Herschel descobriu a existência do espectro infravermelho. Pouco depois, em 1801 outro alemão, Carl Ritter, descobriu o espectro ultravioleta e um avanço fundamental no campo da óptica foi feito pelo inglês Thomas Young, com a descoberta da interferência das ondas luminosas, corroborando a hipótese ondulatória da luz. Enquanto isso, o francês Augustin Fresnel realizou pesquisas independentes sobre a difração da luz e em 1819 desenvolveu a teoria ondulatória da luz.

O ano de 1820 produziu avanços extraordinários e essenciais para o desenvolvimento da teoria eletromagnética. Hans C. Oersted anunciou a descoberta de que o magnetismo está diretamente ligado à eletricidade, observando o desvio produzido pelas correntes elétricas sobre a agulha de uma bússola. Os franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart encontraram a expressão matemática para a intensidade da força magnética produzida por um pequeno segmento de um fio conduzindo uma corrente elétrica.

Andrè Marie Ampère demonstrou que duas correntes se atraem quando se movem paralelamente no mesmo sentido e se repelem quando se movem paralelamente em sentidos contrários e mostrou que a deflexão da agulha de uma bússola causada por uma corrente elétrica poderia ser usada para medir a intensidade da corrente (princípio do galvanômetro). Propôs ainda um modelo dos ímãs permanentes em termos de correntes elétricas moleculares. Sua formulação inaugura o estudo da eletrodinâmica. Em 1831, buscando algum tipo de simetria entre fenômenos elétricos e magnéticos, e sabendo que a corrente elétrica gera fenômenos magnéticos, trabalhando de forma independente, o inglês Michael Faraday e o americano Joseph Henry descobriram a indução eletromagnética. A lei de indução foi complementada pelo russo Heinrich Lenz, em 1833, que determinou o sentido das correntes induzidas.

Quando James Clerk Maxwell entrou em cena no século XIX, havia sido acumulado vasto conhecimento experimental acerca dos fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos. O valor experimental da velocidade da luz era aproximadamente conhecido e foi determinado em 1849 pelo francês Armand Fizeau, algumas leis matemáticas de validade limitada já haviam sido formuladas e o importante conceito de campo havia sido introduzido por Michael Faraday. Maxwell foi capaz de reunir todo o conhecimento acumulado ao longo dos séculos em um conjunto de equações que levam seu nome, dando forma final a uma teoria que permitiu unificar a eletricidade, o magnetismo e a óptica em um arcabouço dotado de

lógica e coerência. Como resultados derivados da sua teoria, exposta por volta de 1865, Maxwell concluiu que a luz é uma onda eletromagnética, cuja velocidade calculada a partir de parâmetros eletromagnéticos independentes era concordante com os dados experimentais disponíveis para a época. Previu ainda a existência de ondas eletromagnéticas em um vasto espectro de frequências, sujeitas às mesmas leis de reflexão, refração e difração que eram conhecidas para a luz visível.

Em 1873 Maxwell publica a sua obra monumental *A treatise on electricity and magnetism*, condensando todos os seus importantes trabalhos em eletromagnetismo. Experimentos posteriores conduzidos independentemente por Heinrich Hertz e Oliver Lodge, em 1888, confirmaram essas previsões, coroando triunfalmente a teoria eletromagnética. Maxwell faleceu em 1879, mesmo ano de nascimento de outro grande nome da ciência, Albert Einstein, e não pode ver o triunfo final de sua teoria eletromagnética.

A era da eletrônica foi inaugurada em 1884, quando o americano Thomas Edison produziu a primeira válvula eletrônica. No ano de 1887 o alemão Heirich Rudolf Hertz descobriu o efeito fotoelétrico e os americanos Albert Michelson e Edward Williams Morley mostram a constância da velocidade da luz em qualquer referencial.

Estes dois últimos experimentos tem relação direta com as duas principais revoluções científicas do século XX, a mecânica quântica e a teoria da relatividade. Em 1895 o alemão Wilhelm Röntgen descobriu os raios X e o holandês Hendrik A. Lorentz desenvolveu um modelo atômico que permite explicar a estrutura fina dos espectros atômicos, realizando ainda contribuições fundamentais para a eletrodinâmica dos corpos em movimento (a força de Lorentz), propondo as transformações relativísticas de coordenadas que hoje levam seu nome. A radiotransmissão, importante aplicação da teoria eletromagnética, foi desenvolvida entre os anos de 1896 e 1902 pelo italiano Guglielmo Marconi e pelo brasileiro Roberto Landell de Moura, dentre outros.

Por volta de 1900 Max Planck deu início à mecânica quântica com seus estudos sobre a radiação do corpo negro, enquanto o russo Piotr Liebedev provou experimentalmente a pressão exercida pela luz sobre um corpo material. Entre 1900 e 1905 a teoria especial da relatividade foi desenvolvida de modo independente por Hendrik Lorentz, Albert Einstein, Henri Poincarè e outros. No ano de 1905 Einstein introduziu o conceito de fóton na explicação do efeito fotoelétrico, demonstrando o caráter corpuscular da radiação. Com base na hipótese quântica, em 1913 Niels Bohr explicou os níveis de energia do átomo de hidrogênio e a estabilidade dos átomos e na década de 1920 Louis de Broglie propôs a dualidade onda-partícula, segundo a qual todos os entes físicos elementares comportam-se

como onda em certas circunstâncias e como partículas em outras. A luz não seria exceção à regra.

Entre 1910 e 1940, mas sobretudo na década de 1920, Louis de Broglie, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, Niels Bohr, Paul A.M. Dirac, Erwin Schröedinger e outros desenvolvem formalmente a mecânica quântica. A década de 1940 viu nascer as bases da teoria quântica de campos, que emerge da fusão entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade. A chamada eletrodinâmica quântica, cujo desenvolvimento se deveu sobretudo a Richard Feynmann, Sin-Itiro Tomonaga e Julian Schwinger, é o exemplo paradigmático mais bem sucedido de uma teoria quântica de campos.

1.1 O Espectro Eletromagnético e Suas Aplicações

Tendo em vista o impacto causado pela teoria eletromagnética poderíamos dizer que a história moderna e contemporânea da humanidade pode ser dividida em antes e depois de Maxwell. O impacto causado pelo domínio dos fenômenos eletromagnéticos pode ser observado em toda parte, desde a iluminação das casas e das vias públicas até a forma como nos relacionamos com as pessoas. O desenvolvimento das telecomunicações é um marco tão relevante que os astrônomos que buscam vida inteligente fora do nosso planeta classificam as possíveis civilizações existentes fora da Terra em duas categorias: as que já chegaram às comunicações eletromagnéticas e as que ainda não a dominam, sendo assim impossível rastreá-las. Dentre toda a gama de aplicações os mais importantes exemplos são:

- os sistemas de potência, responsáveis pelo fornecimento de energia para indústrias, residências, etc. Uma imensa variedade de dispositivos e máquinas, como motores e geradores, são vastamente empregados. Para levar a energia de um ponto a outro são utilizadas linhas de transmissão de energia. Tanto motores, aquecedores e outros equipamentos de uso industrial quando pequenos aparelhos domésticos (liquidificador, secador de cabelo, televisor, lâmpadas, etc) utilizam energia elétrica;

- equipamentos biomédicos em geral, desde os sistemas de monitoramento de funções vitais de um paciente a aparelhos cirúrgicos, passando pelos lasers cirúrgicos, fontes de raios X e tomógrafos, que requerem o domínio de vários fenômenos eletromagnéticos para serem compreendidos. A preocupação na medicina inclui as instalações de potência e aterramentos;

- sistemas de uso militar, como radares de microondas para detecção de alvos, rastreamento e monitoramento, armas de pulsos eletromagnéticos, navegação aérea e marítima, e outros;

- sistemas de comunicações de todos os tipos, abrangendo um amplo espectro de frequências, desde ondas curtas em RF até os sistemas ópticos, passando pela radiodifusão e transmissão de TV, TV a cabo, telefonia móvel e fixa, internet e comunicações via satélite. O mercado das comunicações é um dos mais importantes da economia mundial, tendo modificado significativamente a forma como enxergamos o mundo e nos relacionamos;

- sistemas de radar e posicionamento civis, como o GPS, aplicações de comunicação e radar de polícia, navegação comercial em aeroportos e outros;

- sensoreamento de diversos tipos, utilizando transdutores cujo sinal de saída é sempre um sinal elétrico (para medir temperatura, movimento, campos, etc);

O espectro eletromagnético está organizado por faixas de frequências cujas características apresentam certas semelhanças de propagação e efeitos físicos sobre a matéria usual e vai idealmente desde zero até infinito. A figura 1.1 ilustra de

modo geral o espectro eletromagnético. No Brasil a agência que regulamenta a utilização do espectro, sobretudo na faixa denominada Radiofrequência (RF), que se estende de 0 a 300 GHz é a ANATEL.

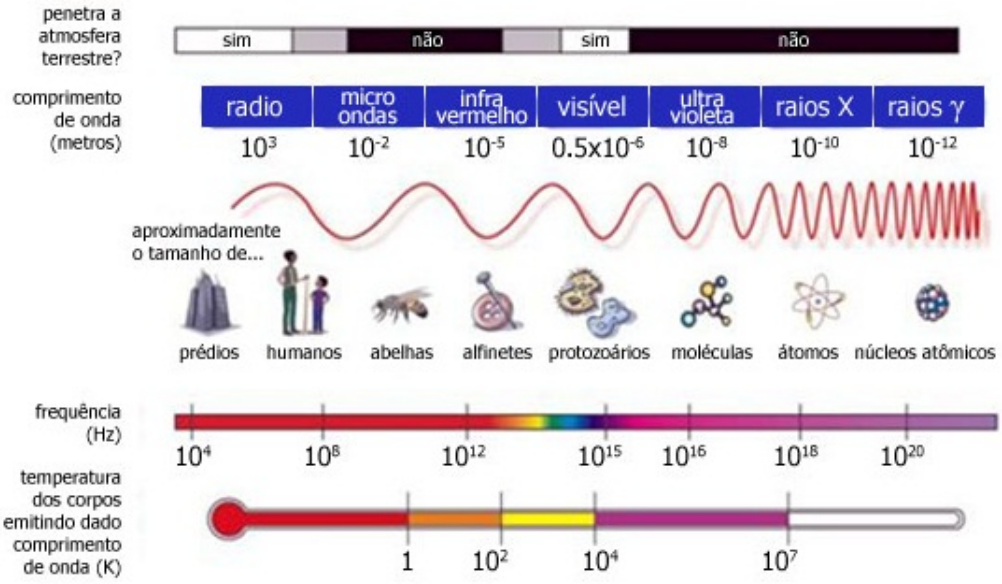


Figura 1.1: O espectro eletromagnético e a relação entre frequência e comprimento de onda. Disponível em: <http://www.pinterest.com.au/pin/120189883790595975/>

Convencionou-se internacionalmente dividir o espectro de RF em uma escala de potências de 10 na forma $3 \times 10^n < f \leq 3 \times 10^{n+1}$ Hz , onde $n = 0, 1, 2, ...$ é um inteiro, de tal forma que, adotando-se a velocidade da luz no vácuo como $c_0 = 3 \times 10^8$m/s e utilizando-se a expressão $\lambda = c_0/f$ as faixas em termos do comprimento de onda λ ficam dadas por $10^{8-n} \geq \lambda \geq 10^{7-n}$m.

A faixa de frequências denominadas de **ELF** (termo do inglês *Extremely Low Frequency* ou Frequências Extremamente Baixas, também denominadas ondas megamétricas) corresponde a $30 \leq f \leq 300$ Hz, ou em termos de comprimentos de ondas, $10^4 \geq \lambda \geq 10^3$ km. Nesta faixa está frequência da rede elétrica, que é de 50 ou 60Hz, dependendo do país. No Brasil adotou-se 60 Hz, que corresponde a um comprimento de onda $\lambda = 5000$ km.

A faixa seguinte é denominada **VF** (*Voice Frequencies* ou Banda de Voz), correspondendo à região $300 \leq f \leq 3000$ Hz, ou $10^3 \geq \lambda \geq 10^2$ km. O som audível para algumas pessoas vai até $15 - 20$ kHz, porém a telefonia analógica, hoje pratica-