100% ENTRAÎNEMENT

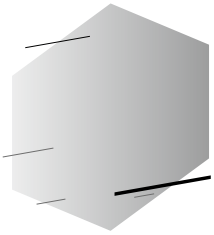
MATHS

PT

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses



100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS

PT

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Retrouvez tous les ouvrages de la collection **100% ENTRAÎNEMENT** sur :
www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LaTeX.

ISBN 9782340-066625
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires PT qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 35 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices afin que ce livre complète efficacement celui de première année.

Sylvain Rondy

Sommaire

Compléments d'algèbre linéaire, déterminants

1. Compléments d'algèbre linéaire 1
2. Déterminants 12

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

3. Éléments propres 20
4. Polynôme caractéristique 29
5. Endomorphismes et matrices diagonalisables 37
6. Endomorphismes et matrices trigonalisables 52

Structure préhilbertienne

7. Produits scalaires 60
8. Orthogonalité 67
9. Projection orthogonale et distance 76
10. Matrices orthogonales 84

Isométries d'un espace euclidien

11. Isométries vectorielles 90
12. Matrices symétriques 101

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

13. Fonctions vectorielles, courbes paramétrées 107

Séries numériques, séries entières

14. Compléments sur les séries numériques 117

15. Séries entières : rayon de convergence 130
16. Séries entières : propriétés de la somme 140
17. Séries entières : développement 150

Intégration sur un intervalle quelconque

18. Intégrales impropres 159
19. Intégrabilité 174
20. Intégration par parties, changement de variable 185
21. Intégration terme à terme 199
22. Intégrales à paramètres 211

Variables aléatoires discrètes

23. Dénombrabilité 223
24. Espaces probabilisés quelconques 227
25. Variables aléatoires réelles discrètes infinies 242
26. Lois discrètes infinies usuelles 259
27. Couples de variables aléatoires 275
28. Vecteurs aléatoires 296
29. Covariance 314
30. Inégalités probabilistes 325
31. Fonctions génératrices 339

Équations différentielles scalaires d'ordre 2

32. Équations différentielles linéaires 355

Fonctions de 2 ou 3 variables

33. Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ 364
34. Courbes et surfaces 375
35. Extrema 380

1 Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (0, 1, 1)$ et $z = (1, 2, 1)$.

1. $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont en somme directe. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont supplémentaires dans E. ☐ Vrai ☐ Faux

3. $\text{Vect}(x)$,$\text{Vect}(y)$ et $\text{Vect}(z)$ sont en somme directe. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit E un espace vectoriel de dimension 5 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ une base de E. On suppose que la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Que peut-on dire de $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$?

Exercice 3 –

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

2. En déduire que deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Montrer que le sous-espace vectoriel des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 –

Soit $F = \{(x+y, y-2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 –

Soit $n \geq 1$. On considère l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Que peut-on dire du noyau de la trace ?
2. Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(\text{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7 –

Soit $n \geq 3$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (X^2 + 1)P''(X)$$

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la trace de φ.

Exercice 8 –

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On pose :

$$\forall k \in [\![1\,;\,3]\!],\ E_k = \text{Ker}(f - k\text{Id}_E)$$

Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 10 –

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines est un supplémentaire du sous-espace vectoriel F de E défini par $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$.

Exercice 11 –

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F_1 = \{f \in E,\ f \text{ est constante}\}$$
$$F_2 = \{f \in E,\ \forall t \in [-1, 0],\ f(t) = 0\}$$
$$F_3 = \{f \in E,\ \forall t \in [0, 1],\ f(t) = 0\}$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 12 –

Considérons E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension alors ils ont un sous-espace supplémentaire en commun.

Exercice 13 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E ($p \geq 2$).

1. $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = n$ alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\text{Vect}(x) \cap \text{Vect}(y) = \{(0,0,0)\}$. ☒ Vrai ☐ Faux

2. $\dim(\text{Vect}(x)) + \dim(\text{Vect}(y)) = 2 < \dim(E)$. ☐ Vrai ☒ Faux

3. $z = x + y$. ☐ Vrai ☒ Faux

🎓 Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k,\ (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \right\}$$

  La somme de ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est *directe* si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in \{1, \dots p\},\ x_k = 0_E$$

  Dans ce cas, la somme se note $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

- La somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est directe si et seulement si tout élément x de $\sum_{k=1}^{p} E_k$ se décompose de manière *unique* sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

  où pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $x_k \in E_k$.

Exercice 2 –

On remarque que M est une matrice triangulaire par blocs. Il est clair que :

$$\forall i \in [\![1\,;\,3]\!],\ u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel stable par u.

Exercice 3 –

Cours

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. La matrice AB est carrée d'ordre n. On a :

Il est important de savoir déterminer l'expression d'un coefficient d'une matrice produit

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{k,i}b_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^{p} (BA)_{i,i} \\ &= \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = PAP^{-1}$. On a (en utilisant la question précédente avec les deux matrices PA et P^{-1}) :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((PA)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n A) = \mathrm{Tr}(A)$$

À retenir

Ces deux points de cours sont très importants. Il faut savoir les redémontrer. Le deuxième permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n : c'est la trace commune de toute matrice représentant cet endomorphisme dans une base de E.

Exercice 4 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (S, A) appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$. Par linéarité de la transposition, on a alors :

$$M^T = S^T + A^T = S - A$$

Ainsi :

$$M + M^T = 2S \ \text{ et } \ M - M^T = 2A$$

donc :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}$$

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}$$

Il est évident que $M = S + A$. On a :

Linéarité de la transposition

$$S^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2} = S$$

Ainsi, S est symétrique. De même, A est antisymétrique. Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et l'autre inclusion est vérifiée car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après l'analyse, toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique donc la somme est directe. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Méthode

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E par analyse-synthèse se fait en suivant la démarche suivante :

- Dans l'analyse, on suppose que tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x_F + x_G$ où x_F appartient à F et x_G appartient à G. En utilisant l'appartenance de ces deux vecteurs aux sous-espaces F et G, on obtient l'expression de x_F (ou de x_G) en fonction de x uniquement. L'égalité $x = x_F + x_G$ permet d'obtenir l'autre vecteur en fonction de x. Cette phase d'analyse montre l'*unicité* de la décomposition d'un vecteur de E comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G si *existence*.
- Dans la synthèse, on prouve effectivement l'existence d'une telle décomposition. On fixe x un vecteur de E et on définit x_F et x_G comme obtenus dans l'analyse. On montre alors que x_F appartient à F, x_G appartient à G et que $x_F + x_G = x$.

Exercice 5 –

G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 car $(1, 1, 1)$ est non nul. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x + y, y - 2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, -2, 1) + y(1, 1, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, -2, 1), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 car $(1, -2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre.

On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. L'inclusion $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$ est claire car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soit $X \in F \cap G$. Le vecteur X appartient à G donc il existe un réel a tel

que :

$$X = a(1, 1, 1)$$

Le vecteur X appartient à F donc il existe deux réels x et y tels que :

$$X = (x + y, y - 2x, x)$$

Ainsi, $x + y = a$, $y - 2x = a$ et $x = a$.

En utilisant que $x = a$, on obtient avec les deux premières égalités $y = 0$ et $y = 2x + a = 3a$. Alors $3a = 0$ donc $a = 0$ et finalement $X = (0, 0, 0)$. On en déduit $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$ et ainsi l'égalité. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ et } F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

À retenir

Pas besoin d'analyse-synthèse si l'on souhaite juste prouver que deux sous-espaces vectoriels, d'un espace de dimension finie, sont supplémentaires.

Exercice 6 –

1. La trace est une forme linéaire non nulle (l'image de I_n par l'application trace vaut n qui est différent de 0) donc son noyau est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

   Cours

   Le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension n est un hyperplan de celui-ci : c'est-à-dire, un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

2. On sait que I_n n'appartient pas au noyau de la trace donc par propriété d'un hyperplan, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   Cours

   Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie et a un vecteur de E n'appartenant pas à H. Alors H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 7 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il est évident que $\varphi(P)$ est un polynôme à coefficients réels.

   Le degré P'' est inférieur ou égal à $n - 2$ donc par produit, on a :

   Le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes

   $$\deg(\varphi(P)) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P''(X)) \leq 2 + n - 2 = n$$

   Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc φ est bien définie.

   Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation,

on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q) &= (X^2+1)(\lambda P+Q)'' \\ &= (X^2+1)(\lambda P''+Q'') \\ &= \lambda(X^2+1)P''+(X^2+1)Q'' \\ &= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité. On en déduit que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il suffit de déterminer la trace d'une matrice de φ dans une base fixée de $\mathbb{R}_n[X]$. Utilisons la base canonique. On a $\varphi(1)=\varphi(X)=0$. Pour tout $k\in[\![2\,;\,n]\!]$, on a :

$$\varphi(X^k)=(X^2+1)(k(k-1)X^{k-2})=k(k-1)X^k+k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit alors que :

$$\mathrm{Tr}(\varphi)=0+0+\sum_{k=2}^{n}k(k-1)$$

Déterminons la valeur de cette somme par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{2n-1}{3}+1\right) \\ &= \frac{(n-1)(n-1)}{2}\times\frac{2n+2}{3} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de la trace de φ.

Méthode

La trace d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie E est par définition, la trace de n'importe quelle matrice de f dans une base de E. Si aucune base n'est suggérée dans l'énoncé d'un exercice, il suffit bien souvent d'utiliser la base canonique de l'espace considéré.

Exercice 8 –

Soit $(x_1,x_2,x_3)\in E_1\times E_2\times E_3$ tel que :

$$x_1+x_2+x_3=0_E$$

On a alors :

$$f(x_1+x_2+x_3)=f(0_E)$$

On obtient : f est une application linéaire

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 0_E$$

Or, pour $k \in [\![1\,;\,3]\!]$, x_k appartient à $\mathrm{Ker}(f - k\mathrm{Id}_E)$ donc $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2x_2$ et $f(x_3) = 3x_3$. On en déduit que :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0_E$$

On réitère le procédé précédent :

$$f(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = f(0_E)$$

puis par linéarité de f :

$$f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 0_E$$

et finalement :

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0_E$$

On souhaite alors résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0_E \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0_E \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ permettent d'obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0_E \\ x_2 + 2x_3 & = & 0_E \\ 3x_2 + 8x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

On utilise maintenant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0_E \\ x_2 + 2x_3 & = & 0_E \\ 2x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

En remontant les calculs, on obtient alors $x_3 = 0_E$ puis $x_2 = 0_E$ et finalement $x_1 = 0_E$. On en déduit que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Méthode

Pour résoudre un système linéaire, l'algorithme du pivot de Gauss doit être privilégié pour gagner en efficacité sauf si il y a des équations incomplètes permettant des substitutions efficaces.

Exercice 9 –

Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

Utilisons les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(p, r) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Par hypothèse,

$$\mathrm{Tr}(AE_{p,r}) = \mathrm{Tr}(BE_{p,r})$$

Or, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$(AE_{p,r})_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(E_{p,r})_{k,i}$$

et $(E_{p,r})_{k,i}$ vaut 1 si et seulement si $(p, r) = (k, i)$ et vaut 0 sinon. Ainsi,

$$(AE_{p,r})_{i,i} = A_{i,p}\delta_{i,r}$$

où $\delta_{i,r}$ est le symbole de Kronecker. Ainsi,

$\delta_{i,r}$ = 1 si $i = r$ et 0 sinon

$$\mathrm{Tr}(AE_{p,r}) = \sum_{i=1}^{n}(AE_{p,r})_{i,i} = A_{r,p}$$

Le raisonnement est analogue pour $BE_{p,r}$ donc on en déduit que :

$$A_{r,p} = B_{r,p}$$

Ceci étant vrai pour tout $(p, r) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on en déduit que $A = B$.

À retenir

Si on dispose d'une propriété vérifiée par toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tester celle-ci sur les matrices de la base canonique permet souvent d'obtenir des résultats plus simples.

Exercice 10 –

À retenir

On montre facilement que l'ensemble des fonctions affines est un sous-espace vectoriel de E à l'aide de la méthode des trois points ou en l'identifiant à $\mathbb{R}_1[X]$.

Notons A le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines et θ l'application nulle de E. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $E = A \oplus F$. Soit $f \in E$. Il existe alors $(g, h) \in A \times F$ tel que $f = g + h$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

La fonction g est affine donc il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,

$$g(x) = ax + b$$

donc :

$$f(x) = ax + b + h(x)$$

La fonction h appartient à F donc $h(0) = h(1) = 0$ ce qui implique que :

$$f(0) = b$$

et

$$f(1) = a + b$$

Ainsi, $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

et $h = f - g$.

Synthèse. Soit $f \in E$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) \text{ et } h(x) = f(x) - g(x)$$

On a $f = g + h$. La fonction g appartient à A. On a :

g est clairement affine

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - f(0) = 0$$

et

$$h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - (f(1) - f(0) + f(0)) = 0$$

Ainsi, h appartient à F.

Toute fonction de E s'écrit donc comme la somme d'une fonction de A et d'une fonction de F. L'analyse prouve que cette décomposition est unique. Ainsi, A et F sont supplémentaires dans E.

Exercice 11 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Soit $f \in E$. Il existe donc $(f_1, f_2, f_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3$ tel que :

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

La fonction f_1 est constante donc il existe un réel c tel que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f_1(t) = c$. On a donc pour $t \in [-1, 1]$,

$$f(t) = c + f_2(t) + f_3(t)$$

Les fonctions f_2 et f_3 appartiennent à F_2 et F_3 donc :

$$f(0) = c + f_2(0) + f_3(0) = c$$

Sachant que f_2 appartient à F_2, on a pour tout $t \in [-1, 0[$:

$$f(t) = c + 0 + f_3(t) = f(0) + f_3(t)$$

donc

$$f_3(t) = f(t) - f(0)$$

De même, on obtient que pour tout $t \in]0, 1]$,

$$f_2(t) = f(t) - f(0)$$

Synthèse. Soit $f \in E$. Posons pour tout $t \in [-1, 1]$, $f_1(t) = f(0)$,

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ f(t) - f(0) & \text{si } t \in]0, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad f_3(t) = \begin{cases} f(t) - f(0) & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 0 & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

La fonction f_1 est constante sur $[-1, 1]$ donc appartient à F_1.

La fonction f_2 appartient bien à E car est continue sur $[-1, 0[$, sur $]0, 1]$ et sachant que f est continue en 0 :

Ne pas oublier de vérifier la continuité !

$$\lim_{t\to 0^-} f_2(t) = \lim_{t\to 0^+} f_2(t) = f_2(0) = 0$$

De plus pour tout $t \in [-1, 0]$, $f_2(t) = 0$. Ainsi, f_2 appartient à F_2. On prouve de même que f_3 appartient à F_3. Pour tout $t \in [-1, 0[$,

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = f(0) + 0 + f(t) - f(0) = f(t)$$

On obtient le même résultat si $t \in]0, 1]$. Pour finir,

$$f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) = f(0) + 0 + 0 = f(0)$$

Ainsi, $f = f_1 + f_2 + f_3$.

Finalement, tout fonction de E s'écrit comme la somme de trois fonctions de F_1, F_2 et F_3. Cette décomposition est unique d'après l'analyse. Ainsi, $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 12 –

Notons n la dimension de E et r la dimension commune de F et G. Nous raisonnons par récurrence descendante.

- Si $r = n$, le résultat est évident : on peut choisir comme supplémentaire commun $H = \{0_E\}$.
- Soit r strictement plus petit que n et supposons la propriété vérifiée pour tous les couples de sous-espaces de dimension $r + 1$. Une propriété classique énonce que la réunion de deux sous-espaces vectoriels A et B de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$. Dans notre cas, la réunion de F et G ne peut donc être égale à E que si $F = G = E$ ce qui n'est pas le cas vu l'hypothèse sur les dimensions. Ainsi, il existe un vecteur non nul x de E tel que $x \notin F \cup G$. Comme x n'appartient, ni à F, ni à G, les sous-espaces $\tilde{F} = F \oplus \text{Vect}(x)$ et $\tilde{G} = G \oplus \text{Vect}(x)$ sont de dimensions $r + 1$ et ont donc par hypothèse de récurrence un supplémentaire en commun que l'on note $\tilde{H}$. Ainsi :

  $$F \oplus \text{Vect}(x) \oplus \tilde{H} = G \oplus \text{Vect}(x) \oplus \tilde{H} = E$$

  Le sous-espace $H = \text{Vect}(x) \oplus \tilde{H}$ est alors un supplémentaire commun à F et G.

On a donc bien démontré le résultat par récurrence descendante sur r.

À retenir

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 13 –

1. Vrai. C'est une conséquence directe de la formule de Grassmann.
2. Faux. Il suffit de penser à un contre-exemple où $F_1 = \cdots = F_p$ avec $p = n$.

2 Déterminants

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Permuter deux lignes d'un déterminant ne change pas la valeur de celui-ci. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Permuter deux colonnes d'un déterminant ne change pas la valeur de celui-ci. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si un déterminant a deux colonnes égales, il est nul. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Avec très peu de calcul, donner la valeur des déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 –

Soit $\mathscr{B} = ((1,1,1),(-1,2,1),(1,1,2))$. Calculer le déterminant de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Qu'en déduit-on ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Donner une forme factorisée de :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 5 –
Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, le déterminant D_n de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On commencera par calculer D_1 et D_2 puis on trouvera un lien entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n pour $n \geq 1$.

Exercice 6 –
Soit $n \geq 2$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \frac{M + M^T}{2}$$

Donner, sans aucun calcul, le déterminant de f.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –
Calculer le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ u(M) = M^T$$

Exercice 8 –
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Exercice 9 –
Soit $n \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels et a, b deux réels distincts. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que Δ_n est une fonction affine.
2. Donner son expression.

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. $V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Cela change le signe d'un déterminant. ☐ Vrai ☒ Faux

2. Cela change le signe d'un déterminant. ☐ Vrai ☒ Faux

3. Si un déterminant a deux colonnes égales, il est nul. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

- On remarque que D_1 est un déterminant triangulaire donc $D_1 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

> **À retenir**
>
> Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

- La troisième colonne de D_2 est égale à sa première colonne donc $D_2 = 0$.
- Pour D_3, on remarque que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $D_3 = 0$.

> **Cours**
>
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> - Si A a deux colonnes égales alors $\det(A) = 0$.
> - Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes de A alors $\det(A) = 0$.
> - Les propriétés précédentes restent vraies pour les lignes car $\det(A) = \det(A^T)$.

Exercice 3 –

On souhaite calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On utilise les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la première colonne :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ce déterminant est non nul donc la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On appelle *déterminant* de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, et on note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
- $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

À retenir

Voici les opérations élémentaires associées au calcul d'un déterminant :

- Permuter deux lignes change le signe du déterminant.
- On peut ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne sans modifier la valeur du déterminant.
- Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée donc les opérations précédentes sont valables aussi pour les colonnes.

Exercice 4 –

On remarque que la somme des coefficients sur les colonnes est constante. En utilisant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$

puis par linéarité par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

On utilise ensuite les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

donc :

On développe par rapport à la colonne 1

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)((a-b)(a-c)+(c-b)^2)$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

Méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on définit la matrice $\Delta_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ comme étant la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A. Alors :

- On peut développer par rapport à la j-ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\Delta_{i,j})$$

- On peut développer par rapport à la i-ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\Delta_{i,j})$$

Avant d'utiliser cette formule, il est intéressant d'utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes pour faire apparaitre le plus de coefficients nuls possible.

Exercice 5 –

On a $D_1 = 2$ et

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Déterminons une relation de récurrence.

Soit $n \geq 1$. On développant par rapport à la première colonne, on a :

$$D_{n+2} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdot & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

et en développant par rapport à la première ligne le deuxième déterminant :

$$D_{n+2} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]} = 2D_{n+1} - D_n$$

La suite $(D_n)_{n\geq 1}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

admet pour unique solution 1. Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ D_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n$$

Or $D_1 = 2$ donc $\lambda + \mu = 2$. De même, $D_2 = 3$ donc $\lambda + 2\mu = 3$. La première équation donne $\lambda = 2 - \mu$ ce qui implique grâce à la deuxième :

$$2 - \mu + 2\mu = 3$$

et ainsi $\mu = 1$ puis $\lambda = 1$. Ainsi :

$$\forall n \geq 1,\ D_n = 1 + n$$

Exercice 6 –

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ est une matrice symétrique. Or, il existe des matrices non symétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $n \geq 2$. Ainsi, f n'est pas surjective et donc n'est pas bijective. Le déterminant de f est donc nul.

Cours

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement si son déterminant est non nul.

Exercice 7 –

On sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans une base adaptée, on en déduit que la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_j \end{pmatrix}$$

où k (respectivement j) est la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$). On en déduit que :

$$\det(u) = (-1)^j = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Toutes les matrices représentant u ont le même déterminant. On définit le *déterminant* de u comme le déterminant d'une de ces matrices.

À retenir

Les dimensions suivantes sont à connaitre :

$$\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 8 –

Les opérations élémentaires (dans cet ordre) $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}$, …, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ permettent d'obtenir un déterminant triangulaire valant $n!$.

Exercice 9 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, on a :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \cdots & \cdots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & a - b & \cdots & a - b \\ b + x & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + x & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, $\Delta_n(x)$ est égal à :

$$(\lambda_1 + x)K_1 - (b + x)K_2 + (b + x)K_3 + \cdots + (-1)^{n+1}(b + x)K_n$$

Où K_1, …, K_n, sont des déterminants de taille $n - 1$ ne dépendant pas de x donc constants. Ainsi, Δ_n est une fonction affine car somme de fonctions affines.

2. D'après la question précédente, il existe deux réels p et q tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = px + q$$

En reprenant l'expression de départ de Δ_n, on remarque que $\Delta_n(-a)$ et $\Delta_n(-b)$ sont des déterminants triangulaires et sont donc faciles à calculer :

$$\Delta_n(-a) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - b)$$

Les réels $-a$ et $-b$ sont différents donc on obtient la pente facilement :

$$p = \frac{\Delta_n(-a) - \Delta_n(-b)}{-a - (-b)} = \frac{\Delta_n(-a) - \Delta_n(-b)}{b - a}$$

puis $q = \Delta_n(-a) + ap$.

Exercice 10 –

1. $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$.	☒ Vrai	☐ Faux
3. $V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)$.	☐ Vrai	☒ Faux

Justifions la valeur de $V_3(a_1, a_2, a_3)$. On a :

$$V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ permettent d'obtenir :

$$V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ 0 & a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on a alors :

$$V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix}$$

Par linéarité par rapport aux lignes, on a :

$$V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

3 Éléments propres

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Si $u(x) = \lambda x$ alors x est un vecteur propre de u. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si $u(x) = \lambda x$ et $\lambda \neq 0$ alors x est un vecteur propre de u. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si x est non nul et appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ alors x est un vecteur propre de u. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ D(f) = f'$$

Justifier que tout réel λ est valeur propre pour D et donner un vecteur propre associé.

Exercice 3 –

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à une constante $c \in \mathbb{R}$. Montrer que c est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que l'image de u est stable par v.
2. Montrer que le noyau de u est stable par v.
3. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 5 –

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(P(X)) = XP(X)$ pour $P \in E$. Déterminer les (éventuelles) valeurs propres de u en raisonnant par analyse-synthèse.

Exercice 6 –
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que 0 est dans le spectre de f^n. Montrer que 0 est aussi dans le spectre de f.

Exercice 7 –
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a, on considère l'application $f_a : x \mapsto \cos(ax)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille libre de E.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = XP'$$

Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 9 –
Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit T qui à $f \in E$, associe $T(f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0,\ T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de T.
3. T est-il injectif?
4. T est-il surjectif?

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. 2 est valeur propre de A. ☐ Vrai ☐ Faux
2. 0 est valeur propre de A. ☐ Vrai ☐ Faux
3. 1, 2, 3 et 4 sont valeurs propres de A. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Si $u(x) = \lambda x$ alors x est un vecteur propre de u.	☐ Vrai	☒ Faux
2. Si $u(x) = \lambda x$ et $\lambda \neq 0$ alors x est un vecteur propre de u.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Si x est non nul et appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ alors x est un vecteur propre de u.	☒ Vrai	☐ Faux

🎓 Cours

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé *valeur propre* de u s'il existe un vecteur x de E, *non nul*, tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un vecteur x de E est appelé *vecteur propre* de u s'il est *non nul* et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(u)$ défini par $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(u)$ sont les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ.

Exercice 2 –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons f l'élément de E défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Alors f est une fonction non nulle et il est clair que $D(f) = \lambda f$ donc f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ.

Exercice 3 –

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors X est un vecteur non nul et par hypothèse, on a :

Ne pas oublier de dire que X est non nul

$$AX = \begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix} = cX$$

Ainsi, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre c.

Cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nul* tel que $AX = \lambda X$.
- Un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de A s'il est *non nul* et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
- Le *spectre* de A est l'ensemble de ses valeurs propres.
- Le *sous-espace propre* associé à la valeur propre de A, que l'on notera $E_\lambda(A)$, est défini par :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les éléments non nuls sont les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.

Exercice 4 –

1. Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v, c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathrm{Im}(u),\ v(y) \in \mathrm{Im}(u)$$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} v(y) &= v(u(x)) \\ &= v \circ u(x) \\ &= u \circ v(x) \ \text{ car } u \circ v = v \circ u \\ &= u(v(x)) \end{aligned}$$

avec $v(x) \in E$. Ainsi, $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$. On a donc montré le résultat souhaité.

Cours

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est *stable* par u si $u(F) \subset F$ ou autrement dit si :

$$\forall x \in F,\ u(x) \in F$$

2. Montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(u),\ v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors :

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= u \circ v(x) \\ &= v \circ u(x) \ \text{ car } u \circ v = v \circ u \\ &= v(u(x)) \\ &= v(0_E) \qquad \text{car } x \in \mathrm{Ker}(u) \\ &= 0_E \qquad\quad \text{car } v \in \mathscr{L}(E) \end{aligned}$$

Ainsi, $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. On a bien montré le résultat souhaité.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $E_\lambda(u)$ est stable par v. Par hypothèse, u commute avec v. De plus, Id_E commute aussi avec v donc $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec v. D'après la question précédente, on en déduit que $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v.

> **À retenir**
>
> Les trois propriétés précédentes sont importantes, il est important de savoir les citer et les prouver.

Exercice 5 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons l'existence d'un scalaire λ, valeur propre de u. Par définition, il existe un vecteur P non nul tel que $u(P(X)) = \lambda P(X)$ et donc par définition de u, $XP(X) = \lambda P(X)$ ou encore :

$$(X - \lambda)P(X) = 0$$

Or $(X - \lambda)$ est un polynôme non nul donc $P(X) = 0$ ce qui est absurde. $\mathbb{K}[X]$ est intègre

Synthèse. Le raisonnement précédent montre que l'endomorphisme u n'admet pas de valeur propre.

> **Méthode**
>
> Dans le cas où l'on étudie un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie, il est fréquent d'utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.

Exercice 6 –

Supposons que 0 est dans le spectre de f^n. Alors le noyau de f^n n'est pas réduit au vecteur nul donc f^n n'est pas injective donc n'est pas bijective donc son déterminant est nul. Or :

$$\det(f^n) = \det(f)^n$$

On en déduit que $\det(f)$ est nul donc f n'est pas bijective et ainsi f n'est pas injective (l'espace vectoriel est de dimension finie) et 0 est valeur propre de f.

> **À retenir**
>
> Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
>
> - Le scalaire 0 est valeur propre de u.
> - $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.
> - L'application u n'est pas injective.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrons que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille libre de E. Posons $\mathscr{D}$ l'endomorphisme de E défini par $\mathscr{D}(f) = f''$. On a pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathscr{D}(f_{a_i}) = -a_i^2 f_{a_i}$ et ainsi f_{a_i} (qui n'est pas la fonction nulle) est un vecteur propre de $\mathscr{D}$ associée à la valeur propre $-a_i^2$. Les réels positifs $a_1, \dots, a_n$ étant distincts, et la fonction $x \mapsto -x^2$ étant injective sur $\mathbb{R}_+$, les

réels $-a_1^2, \dots, -a_n^2$ sont aussi distincts donc la famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme u de E et est donc une famille libre de E.

Cours

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme u de E est une famille libre de E.

Exercice 8 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de φ. Il existe donc un polynôme non nul de E tel que $\varphi(P) = \lambda P$ ou encore $XP' = \lambda P$. On a donc pour tout réel x :

$$xP'(x) = \lambda P(x)$$

En particulier, P est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre suivante :

$$y' - \frac{\lambda}{x} y = 0$$

dont les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto K\mathrm{e}^{\lambda \ln(x)} = Kx^\lambda$$

où $K \in \mathbb{R}$. Si λ n'est pas un entier naturel, toutes les dérivées successives de $x \mapsto x^\lambda$ sont non nulles car pour tout entier $n \geq 0$, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^\lambda$ a pour expression :

$$\lambda(\lambda - 1) \times \cdots (\lambda - n + 1)x^{\lambda - n}$$

ce qui est impossible car P est un polynôme donc à partir d'un certain rang, toutes ses dérivées sont nulles. Si λ est un entier naturel que l'on renomme n, on en déduit que :

$$\forall x > 0,\ P(x) = Kx^n$$

où $K \in \mathbb{R}$ donc $P = KX^n$.

Deux polynômes coïncidant en une infinité de valeurs sont égaux

Synthèse. On a $\varphi(1) = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\varphi(X^n) = X(X^n)' = X(nX^{n-1}) = nX^n$$

Pour tout entier $n \geq 0$, X^n est non nul et on en déduit que c'est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre n.

D'après l'analyse-synthèse, on sait que le spectre de φ est $\mathbb{N}$ et que pour tout entier $n \geq 0$,

$$E_n(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^n)$$

Exercice 9 –

1. Soit $f \in E$. Montrons que $T(f)$ appartient à E. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ (qui existe car f est continue sur cet intervalle). Pour tout $x > 0$, on a :

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

On en déduit que $T(f)$ est $\mathscr{C}^1$ (donc en particulier continue) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$ donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(0)$$

et ainsi :

$$\lim_{x \to 0} T(f)(x) = T(f)(0)$$

On en déduit que $T(f)$ est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall f \in E,\ T(f) \in E$$

À retenir

Toute fonction continue sur un intervalle, et à valeurs réelles, admet une primitive sur celui-ci.

Montrons la linéarité de T. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x > 0$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

On a de plus :

Ne pas oublier de vérifier l'égalité en 0

$$T(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0)$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

donc :

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$$

T est donc un endomorphisme de E.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé. Pour tout réel $x > 0$, on a $T(f)(x) = \lambda f(x)$ donc en notant F l'unique primitive de f s'annulant en 0 :

$$\frac{F(x)}{x} = \lambda f(x)$$

Si $\lambda = 0$, on en déduit que F est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $F' = f$ aussi. Par continuité en 0 on en déduit que f est la fonction nulle ce qui est impossible car f est un vecteur propre. Ainsi, $\lambda \neq 0$ et on a pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lambda x f(x) = \lambda x F'(x)$$

donc :

$$F'(x) = \frac{1}{\lambda x} F(x)$$

On reconnait alors une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène dont le coefficient est une fonction continue. Il existe alors un réel C tel que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = C\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{\lambda}} = Cx^{\frac{1}{\lambda}}$$

Or $F' = f$ donc pour tout $x > 0$:

$$f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ alors f admet une limite infinie (C est non nul car f est un vecteur propre) en 0 ce qui est impossible car f appartient à E. Ainsi,

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$$

ce qui implique que $\lambda \in]0, 1]$. Remarquons que $T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$. Si $\lambda = 1$, alors f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f est constante sur $\mathbb{R}_+$. Si λ est différent de 1 alors $f(0) = 0$ et on a bien :

$$\lim_{x \to 0} Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = 0 = f(0)$$

car $\lambda \in]0, 1[$.

Synthèse. On vérifie facilement que tout réel $\lambda \in]0, 1]$ est valeur propre de T car :

$$f_\lambda : x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

est une fonction non nulle de E et vérifiant $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$. D'après l'analyse, on a de plus :

$$E_\lambda(T) \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$$

ce qui nous donne finalement l'égalité :

$$E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$$

Tout autre réel n'est pas valeur propre de T d'après l'analyse.

3. 0 n'est pas valeur propre de T donc T est injective.

4. T n'est pas surjective car pour tout $f \in E$, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe des fonctions de E non dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ ($x \mapsto |x - 1|$ par exemple).

Exercice 10 –

1. Vrai. On a :

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible car sa première colonne est l'opposée de la deuxième. On en déduit que 2 est valeur propre de A.

2. Faux. Le déterminant de A vaut 4 (qui est différent de 0) donc A est inversible et 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Faux. La matrice A appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc admet au maximum 3 valeurs propres réelles.

À retenir

- Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres.

4 Polynôme caractéristique

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et χ_A son polynôme caractéristique.

1. χ_A est un polynôme unitaire de degré n. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\chi_A(0) = \det(A)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Montrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique. Que dire de la réciproque ?

Exercice 3 –

Soit $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = XP'(X) - P''(X)$$

Déterminer le polynôme caractéristique de φ.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices suivantes et en déduire leur spectre.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
Étudier la parité de χ_A.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

et note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Montrer que pour $n > 2$, $P_n(X) = XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$.
3. En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Exercice 7 –

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le but de l'exercice est de montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat quand A est inversible.
2. En déduire le résultat dans le cas général.
   On pourra utiliser, pour $x \in \mathbb{K}$ fixé, les applications $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définies par :

$$f(t) = \det((A - t\mathrm{I}_n)B - x\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad g(t) = \det(B(A - t\mathrm{I}_n) - x\mathrm{I}_n)$$

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A admet au moins une valeur propre réelle si n est pair. ☐ Vrai ☐ Faux
2. A admet au moins une valeur propre réelle si n est impair. ☐ Vrai ☐ Faux
3. A peut admettre une unique valeur propre complexe non réelle. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. χ_A est un polynôme unitaire de degré n. ☒ Vrai ☐ Faux
2. $\chi_A(0) = \det(A)$. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\chi_A(X) = \det(X\mathrm{I}_n - A)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire, de degré n et son expression est de la forme :

$$\chi_A(X) = X^n + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Exercice 2 –

Soit A, B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On a pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(x\mathrm{I}_n - A)\\ &= \det(xPP^{-1} - PBP^{-1})\\ &= \det(P(x\mathrm{I}_n - B)P^{-1})\\ &= \det(P)\det(x\mathrm{I}_n - B)\det(P^{-1})\\ &= \det(x\mathrm{I}_n - B)\end{aligned}$$

car $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$. Ainsi $\chi_A = \chi_B$.

La réciproque est fausse. Considérons :

$$A = \mathrm{I}_2 \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B étant triangulaires, et ayant pour coefficients diagonaux uniquement le scalaire 1, on a clairement :

$$\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)^2$$

Or la seule matrice semblable à I_2 est I_2 car :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}),\ P\mathrm{I}_2P^{-1} = \mathrm{I}_2$$

Ainsi, A et B ne sont pas semblables.

À retenir

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ le polynôme caractéristique commun à toute matrice représentant u dans une base de E. On le note χ_u. Cette définition a un sens d'après le résultat qui vient d'être prouvé.

Exercice 3 –

Soit $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X$ et :

$$\forall k \in [\![2\,;\, n]\!],\ \varphi(X^k) = X(kX^{k-1}) - k(k-1)X^{k-2} = kX^k - k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & n-2 & 0 & -n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Notons M cette matrice. Cette matrice étant triangulaire, on en déduit que :

$$\chi_M(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$$

Or M est la matrice de φ dans une base de E donc :

$$\chi_\varphi(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$$

Méthode

On peut choisir n'importe quelle base dans le raisonnement précédent. Sans indication donnée dans l'énoncé, la base canonique semble être un choix judicieux.

Exercice 4 –

- Pour tout réel x :

$$\chi_A(x) = \det(x\mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1 = (x-3)(x-1)$$

  Ainsi, $\chi_A(X) = (X-3)(X-1)$ et le spectre de A est $\{1, 3\}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$