Aventuras matemáticas

Una ventana hacia el caos y otros episodios

MIGUEL DE GUZMÁN





Descargas/material complementario
www.edicionespiramide.es



PIRÁMIDE

Aventuras matemáticas

Una ventana hacia el caos
y otros episodios

MIGUEL DE GUZMÁN



Aventuras matemáticas

Una ventana hacia el caos y otros episodios

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «CIENCIA HOY»

Edición en versión digital

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro electrónico, su transmisión, su descarga, su descompilación, su tratamiento informático, su almacenamiento o introducción en cualquier sistema de repositorio y recuperación, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, conocido o por inventar, sin el permiso expreso escrito de los titulares del copyright.

© Miguel de Guzmán, 2021
© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2021
Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-4457-3

ÍNDICE

Prólogo 11

0. Este capítulo es muy importante..., pero no hace falta que lo leas 15

A. Antes de hacer, trata de entender 16
B. En busca de estrategias 17
C. Lleva adelante tu estrategia 20
D. Saca jugo al juego y a tu experiencia 22
Notas 25

1. Algunos casos para entrenar el olfato 27

1.1. Al pasar la barca me dijo el barquero... 27
1.2. Alubias rojas y blancas 28
1.3. Jugando al *bridge* 29
1.4. Con las fichas del dominó 29
Los casos resueltos 30
Notas 42

2. Escaleras abajo... con el descenso de Fermat 45

Notas 52

3. El juego de los quince... y unos cuantos más 55

Notas 71

4. Escaleras arriba... hacia el paraíso de Cantor 73

Notas 82

5. Algunas metamorfosis del plano 85

5.1. Homotecia. Imagen del crecimiento 85
5.2. Inversión. Una metamorfosis más divertida 92
Notas 101

6. Palomas, palomares... y el principio de Dirichlet 105

Notas 114

7. Sobre el infinito 117

Notas 127

8. A vueltas con las flechas 131

Notas 140

9. Sobre números y primos 143

Algunas pistas para los casos propuestos 144
Notas 153

10. La región perdida 155

Notas 164

11. El cubo, la termita y otros animales geométricos 169

11.1. El cubo y la termita 170
11.2. Disección de un cubo 170
11.3. Tres construcciones con regla, compás y cartabón 171
11.4. Cinco más de geometría 171
Los casos, resueltos 173
Notas 183

12. Una curva polivalente 185

Notas 207

13. Fácil de entender, difícil de resolver 209

Notas 215

14. Una iniciación a los fractales 217

14.1. El conjunto de Cantor, el fractal 217
14.2. Pequeño, de longitud cero. Grande, no numerable. Autosemejante 218

14.3. El sistema de numeración en base 3 y el conjunto de Cantor 219
14.4. Dimensión de conjuntos autosemejantes 220
14.5. Otros dos fractales clásicos. La curva de Koch y el conjunto de Besicovitch 222
14.6. Conjuntos de estructura fractal 225
14.7. ¿Cómo surgieron los fractales? 226
14.8. Razones del interés por las estructuras fractales 228
APÉNDICE. Construcción de algunos fractales con el programa DERIVE 230

15. Una ventana hacia el caos 235

15.1. Hacia el caos con la calculadora 236
15.2. El efecto mariposa 241
15.3. ¿Experimentos inútiles de matemáticos ociosos? Robert May y el crecimiento de una colonia de insectos 242
15.4. Otra forma gráfica de observación del caos. Las telarañas de las iteraciones en un sistema dinámico 244
15.5. Entendiendo las entrañas del caos. La representación simbólica 245
APÉNDICE. Explorando el caso matemático con DERIVE 252

16. El teorema de Fermat y otras conjeturas 255

16.1. Los números pitagóricos 257
16.2. El teorema de Fermat para $n = 4$ 259
16.3. Otras conjeturas interesantes 261
16.4. Una conjetura más reciente: el problema $3n + 1$ 262
APÉNDICE. Un programa para experimentar el problema $3n + 1$ con DERIVE 267

17. Los números primos y el espionaje. Criptografía de clave pública 271

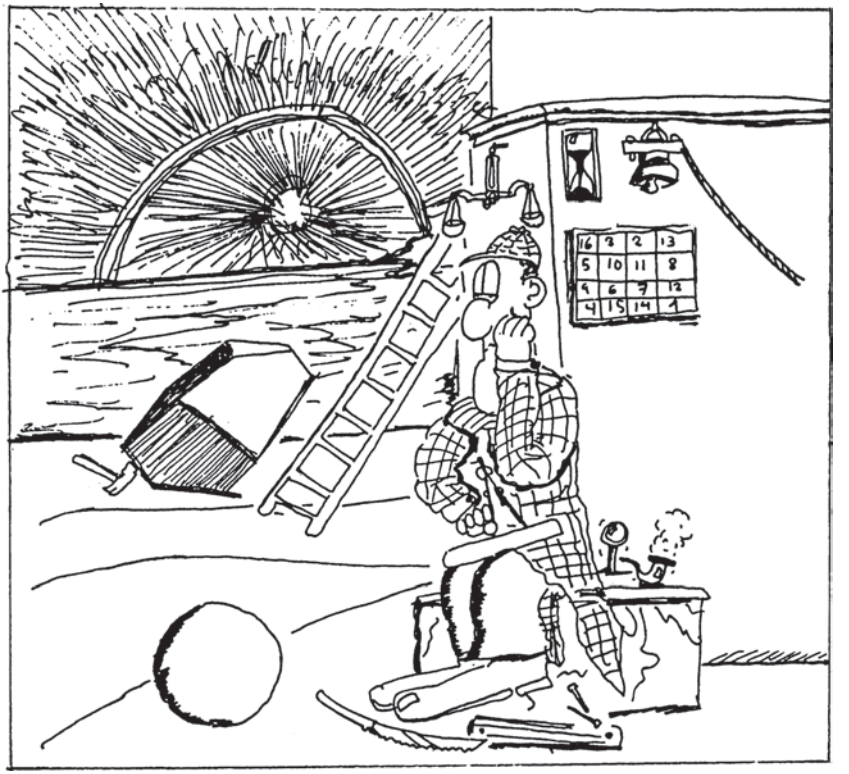
17.1. ¿Cómo funciona el sistema RSA? 273
17.2. Números primos, la base matemática del sistema RSA 274
17.3. Las tripas del sistema RSA 278
17.4. El proceso de enciframiento y desciframiento para *B* 279
17.5. Un mensaje más serio para *B* 281
17.6. El usuario *B* quiere que *A* firme sus mensajes 283
17.7. Cómo procede *A* para firmar el mensaje *M* que quiere enviar a *B* 284
APÉNDICE. Jugando a espías con DERIVE 286

18. Sobre el teorema de Gödel 293

18.1. Una idea de sistema formal 296
18.2. Idea del proceso de Gödel 297
18.3. Y sin embargo, verdadera 300
18.4. La indemostrabilidad de la ausencia de contradicción del sistema 300
18.5. Algunas implicaciones del teorema de Gödel 302

Bibliografía 305

Índice de nombres 309



Prólogo

Aquí tienes una variada colección de juegos, enigmas, historias..., con cierto contenido matemático. La intención con la que los he escogido ha sido la de ayudarte a comprobar que este tipo de exploración de la realidad puede resultar interesante, divertida y en ocasiones apasionante. Por otra parte, algunas de las cuestiones que iremos viendo juntos, además de ser entretenidas, tocan muy de cerca porciones profundas de la matemática de todos los tiempos y tienen hondas ramificaciones hacia algunos de los misterios aún pendientes de ella.

La ciencia toda viene a ser una inmensa tarea de exploración de los muchos enigmas que nos presenta la naturaleza. Estos enigmas son unas veces bien concretos y cercanos: ¿Cómo funciona el cerebro humano para que el hombre sea capaz de conocer que conoce? ¿Cuáles son y cómo interaccionan los componentes últimos de la materia? ¿De cuántas maneras distintas se puede doblar un mapa de carreteras con $m \times n$ dobleces? Otras veces lo que nos ocupa son enigmas más abstractos sobre las realidades mentales que nos fabricamos: ¿Habrá una infinidad de pares de números primos cuya diferencia sea 2, tales como (11, 13), (29, 31), (101, 103), (2.381, 2.383), (3.557, 3.559)...? Entre los números 11, 111, 1.111, 11.111..., ¿habrá una infinidad de números primos? Como verás, las cuestiones matemáticas que en estos ensayos surgen son unas veces concretas y otras más abstractas.

He querido escribir estos capítulos contando esencialmente con tu intervención activa. Tú vas a ser el detective y has de tratar de esclarecer los casos que se presentan. Cada pregunta que surge a lo largo del

proceso, aunque yo no te lo sugiera explícitamente cada vez, debería servirte para hacer una pausa en tu lectura y pensar un rato en ella. Unas veces no será difícil que des rápidamente con la respuesta adecuada, otras sí, pero, en todo caso, el tiempo que dediques a pensar por ti mismo será el mejor empleado.

En el capítulo 0 encontrarás unas cuantas sugerencias sobre el gran problema de cómo afrontar los problemas, matemáticos y no matemáticos. Hay capítulos que diseccionan juegos clásicos y otros menos clásicos, otros que presentan cuestiones de diferentes tipos y sabores, otros en que trataremos de seguir el hilo de pensamiento de algunos grandes pensadores de la matemática como Fermat, Cantor, Brouwer... Al final de cada capítulo encontrarás notas que tratan de enmarcar alguna de las moralejas del capítulo mediante la biografía de personajes importantes, el sentido de alguna teoría... Hay también notas que contienen algo de lo que yo pienso sobre la actual didáctica de las matemáticas. Seguro que muchas de estas opiniones estarán equivocadas, pero me ha parecido que, en conjunto, te pueden ayudar a formarte tu propia idea de la matemática actual y de lo que se puede tomar y dejar de lo que es la oferta actual en los distintos niveles de la enseñanza.

En la versión de *Aventuras matemáticas* que ahora tienes en tus manos encontrarás la ocasión de vivir cinco nuevos episodios que tienen que ver con temas apasionantes y profundos. Tendremos la oportunidad de explorar juntos algunos aspectos del caos matemático, de los fractales, de la criptografía de clave abierta, del teorema de Fermat y del teorema de Gödel. Como verás, la matemática es un campo inagotable de sorpresas y de goce estético.

A fin de poder participar más cómodamente de algunos de los nuevos desarrollos que aquí se presentan, este libro va acompañado de material complementario descargable en www.piramide.es que contiene unos cuantos sencillos programas preparados para usar con el programa de cálculo simbólico DERIVE. Aquellos que tienen la posibilidad de utilizar el programa DERIVE (versión 2.5 o siguientes), un programa muy fácil de manejar que se puede introducir en cualquier ordenador personal y que es relativamente barato, tendrán la oportunidad de actuar ellos mismos como encriptadores del sistema de clave abierta o

de percibir cómo se van formando en sus pantallas las telarañas del caos, entre otras cosas.

En cualquier caso, estos cinco episodios han sido escritos de manera que se puedan seguir con entera independencia del material complementario y de toda utilización del ordenador. Quienes quieran utilizar dicho material encontrarán en los correspondientes apéndices información suficiente para hacerlo.

Es una gran satisfacción para mí constatar que, después que fue publicada en 1988 la primera versión de estas *Aventuras matemáticas,* el libro ha sido traducido al portugués, finlandés, francés y chino, con lo que un gran número de personas han compartido con los lectores de habla española y conmigo estas muestras del gran placer estético que la matemática puede proporcionar.

Quiero agradecer muy especialmente la colaboración de mi hijo Miguel, que con sus viñetas ha animado estas aventuras matemáticas. Muchos amigos, demasiados para nombrarlos a todos individualmente, han leído mi texto inicial. Sus observaciones, muy atinadas, han sido incorporadas en la versión final. A todos ellos, muchas gracias.

Miguel de Guzmán

0

Este capítulo es muy importante..., pero no hace falta que lo leas

Los cuentos y juegos matemáticos que vamos a ir recorriendo juntos se pueden concebir como historias policíacas en las que tú mismo vas a ser el detective. Tú vas a ser el primero que las vivas... a tu modo, aunque otros muchos las hayan vivido antes al suyo. ¡Prepárate para la aventura! El buen detective se caracteriza por el buen olfato. Es claro que el buen olfato, supuesto que uno no tenga estropeadas las narices, se adquiere... oliendo mucho y muy diverso y ejercitándose en tratar de distinguir unos olores de otros y de sacar consecuencias. Así, si quieres convertirte en un buen detective tendrás que ejercitarte a fondo. No hay recetas maravillosas para lograrlo.

Lo que por mi parte puedo ofrecerte en este capítulo para ayudarte es una colección de estrategias generales que los detectives de todos los tiempos han utilizado en sus tareas. Tu experiencia acumulada te hará sentir, cuando te tropieces con una situación particular, cuál es la estrategia o estrategias combinadas que pueden adaptarse a tu caso. A lo largo de los casos concretos que iremos viendo juntos en los capítulos posteriores mi intención es ayudarte a calzar los zapatos de los grandes sabuesos de la matemática y a mirar a través de su lupa, que será, generalmente, mirar a través de alguna de estas estrategias que te presento.

No trates de aprenderlas de carrerilla. ¡Aquí no se trata de memoria! Ojéalas ahora por encima para familiarizarte un poco con ellas. Luego, ante un problema concreto, recórrelas suavemente para presen-

tir las que sean más adecuadas como instrumento de ataque. Al ir viéndolas en acción unas cuantas veces irán penetrando de modo natural en tu olfato y se harán cosa tuya para siempre. Primero te las iré enunciando y explicando un poco en detalle y al final del capítulo te las encontrarás todas juntas, en una lista, de forma resumida para que te sea más fácil verlas de una sola ojeada.



... Tras las huellas de los grandes sabuesos...

¡Ah! Una última observación. No pienses que las estrategias de pensamiento que aquí tienes solo son buenas para resolver problemas y juegos matemáticos. En líneas generales, cambiando lo que hay que cambiar, esas mismas estrategias las puedes utilizar en un montón de problemas de la vida ordinaria. Esto es algo muy importante que la matemática puede enseñar a todo el mundo, un método de pensamiento sobrio, razonable, fiable...

A

ANTES DE HACER, TRATA DE ENTENDER

Se cae de su peso, pero a veces, por apresurados que somos o por prisas que nos imponen desde fuera, nos ponemos inmediatamente en camino... hacia ninguna parte. Sherlock Holmes, cuando se le proponía un caso, acumulaba primero toda la información que podía, detalles en todos los periódicos, visitas a lugares posiblemente relacionados, chismes a través de vecinos o a través de la banda de pilletes de Londres, sus espías particulares... y luego, con todo aquel amasijo de datos en su cabeza se ponía... a improvisar en su violín o a hacer locos experimen-

tos de química en su laboratorio personal, por largos ratos. Cuando a ti te propongan un caso, un juego, un problema, un rompecabezas, que todo viene a ser lo mismo, debes asegurarte de que entiendes a fondo las reglas del juego, los datos, y el posible lugar que tiene cada una de sus piezas y cómo se engarzan unas con otras. Manéjalas, familiarízate con los elementos de la situación, juega con ellos un rato. Aunque al principio te parezca otra cosa, ganarás tiempo.

B

En busca de estrategias

En esta etapa del proceso debes tratar de hacerte con un montón de posibles modos de ataque del problema. Se trata de que fluyan de tu mente muchas ideas, aunque en principio puedan parecerte totalmente descabelladas. Las ideas más estrafalarias pueden resultar después las mejores. Como dicen los técnicos del *brainstorming* (tormenta de ideas, una de las técnicas de creatividad), *cantidad engendra calidad.* Todavía no vas a poner en práctica ninguna. Para procurar que fluyan muchas ideas, es necesario que actúes con espontaneidad, que *aplaces el juicio crítico sobre ellas,* no se trata ahora de de-



Brainstorming.

cidir si una es mejor que otra. No te importe nada que a primera vista puedan parecer ridículas. ¡Ya veremos si lo son! Al primer *gentleman* que en Londres tuvo la ocurrencia de utilizar una sombrilla para protegerse de la lluvia le bombardearon con insultos y tomates. ¡Diles hoy a los británicos que eso del paraguas es un ridículo y afeminado invento!

Para facilitar este flujo de ideas posibles aquí tienes unas cuantas pautas que puedes ensayar. Estoy seguro de que tu experiencia irá aumentando la lista con sugerencias útiles distintas que *a ti* te servirán mejor.

B.1. *Busca semejanzas con otros juegos y problemas*. Nada hay nuevo bajo el sol. ¿A qué te recuerda la situación? ¿No presientes que tal vez sea como aquella otra?

B.2. *Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil*. El problema es complicado tal vez porque hay muchos elementos. ¿Por qué no te lo haces más fácil tú mismo? Fabrícate uno semejante, con menos piezas. Tal vez en él te saltará la chispa que te sirva para resolver el más complicado.

B.3. *Experimenta y busca regularidades, pautas*. La experiencia es la madre de la ciencia, también de la matemática. Los grandes teoremas de la historia de la matemática son fruto de muchos experimentos, más o menos locos. También la matemática procede por ensayo y error, otro ensayo y otro error...

B.4. *Hazte un esquema y si se tercia..., píntalo en colores*. Somos muchos los que pensamos mejor con imágenes que con palabras. Una imagen vale más que mil palabras. Si tu modo de pensar es así, estás en buena compañía. Einstein, por ejemplo, afirmaba que su pensamiento, cuando investigaba, no era nunca verbal, sino acompañado de imágenes sensoriales, e incluso motrices.

B.5. *Modifica el problema, cambia en algo el enunciado, para ver si se te ocurre así un posible camino*. No será ya el problema propuesto, pero te puede proporcionar una escalera a la que puedes añadir otra y llegar a tu objetivo.



... escoge una buena notación...

B.6. *Escoge una buena notación*. Muchos problemas se enrevesan endiabladamente con una notación inadecuada y se vuelven transparentes como el agua en cuanto tomas los ejes adecuados, los nombres apropiados de los elementos... La notación mejor es la que se presta mejor a la expresión de las simetrías, la que expresa abreviadamente la función misma de los elementos que representa. Leibniz y Euler fueron los creadores de una gran parte de la notación que aún hoy usamos en matemáticas y, gracias a su adecuación a lo que querían representar, consiguieron hacer mucho más fáciles problemas complicados.

B.7. *Explota la simetría..., si puedes*. Son muchos los juegos, los problemas que se resuelven mediante apoyo en la simetría que presentan de forma expresa o velada. Piensa en esta posibilidad en tu caso particular.

B.8. *Supongamos que no... ¿a dónde nos lleva?* Esto es el argumento que se llama indirecto o *por reducción al absurdo*. ¿Cómo marcha la cosa? Imagínate que te proponen el siguiente puzle facilísimo: demuestra que un mismo peón en el ajedrez solo puede moverse, a lo más, seis veces. Puedes proceder así: supongamos que un peón se mueve siete veces. Como sale de la segunda fila y en cada movimiento avanza al menos a la fila siguiente resulta que al sexto movimiento

está al menos en la fila octava y en el séptimo se saldría del tablero. Absurdo. Así resulta que no puede moverse siete veces. Son muchos los problemas que se pueden manejar así. Quieres demostrar que una situación se comporta de la forma A. Empiezas suponiendo que no se comporta así. Vas deduciendo y razonando correctamente y tu cadena de razonamientos te conduce a que lo blanco es negro. Entonces es claro que tu punto de partida, no A, tiene que ser falso. Así, la situación inicial tiene que ser A.

B.9. *Supongamos el problema resuelto*. Esta táctica te será de especial utilidad en los juegos y problemas en los que tengas que construir alguna figura, algún elemento que deba estar relacionado de forma determinada por las reglas del juego, con otros que te den. Al imaginarte el problema resuelto, construyendo de forma aproximada, a ojo, cómo debe de ir la cosa tienes la oportunidad de explorar las relaciones entre los elementos dados y los que buscas y así, al aproximarlos, puede saltar la chispa que te haga ver claro cómo debes proceder a partir de los datos.

B.10. *Piensa en técnicas generales: inducción, descenso, proceso diagonal, principio del palomar...* No te atosigaré aquí contándote una por una estas estrategias que son verdaderas y joyas del pensamiento matemático, increíblemente sencillas y potentes a la vez. Ya las verás en otros capítulos más adelante. Cada una de ellas lleva el nombre de un matemático famoso que fue quien enriqueció la ciencia con el uso sistemático de su estrategia: principio de inducción de Pascal, principio de descenso de Fermat, proceso diagonal de Cantor, principio del palomar de Dirichlet... Poco a poco, con paz, las iremos contemplando juntos y haciendo uso de ellas.

C

LLEVA ADELANTE TU ESTRATEGIA

Tienes ya unas cuantas estrategias posibles para atacar tu problema acumuladas en la etapa B. Lo más aconsejable es que tengas delante

una lista escrita de todas ellas, sin olvidar las que en un principio te parecieron más absurdas...

Lo mejor sería que ahora, para incubar tus ideas y esperar la *iluminación,* te dedicaras un buen rato a tocar el violín o a hacer experimentos de química, como Sherlock Holmes, o bien a hacer experimentos de cocina, como hago yo, que es algo parecido y mucho más sustancioso... o bien que te enfrascaras en cualquiera de tus manías preferidas. Deja que tu subconsciente amase a su gusto el revoltijo de ideas que le has preparado...



... esperando la iluminación...

Has vuelto al problema. Ahora llega el momento de juzgar cuáles de las estrategias que tienes en tu papel tienen más probabilidades de éxito. Tal vez la idea que antes parecía tan descabellada ahora te parezca precisamente la mejor.

C.1. *Lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la etapa B. Una a una. No las mezcles en un principio.* Trabaja con decisión y confianza en ti mismo, ordenadamente, con paz, sin aturullamientos. Si al poner en práctica una idea se te ocurre otra totalmente inconexa con ella que piensas que puede ayudarte, ¡no la deseches! ¡Apúntala en tu lista! Pero tampoco dejes desviar tu atención de la que ahora estás llevando adelante.

C.2. *No te arrugues fácilmente. Pero tampoco te emperres demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.* No abandones fácilmente una idea que te pareció buena, pero debes estar preparado para reconocer que tal vez su bondad fue un espejismo que resulta claro al adentrarte más en ella. Si ves que no te acerca nada a la solución, ensaya otra. Recuerda: ensayo y error, ensayo y error...

C.3. *¿Salió? ¿Seguro? Mira más a fondo tu solución.* No te engañes a ti mismo. Las medias ideas y medias soluciones sirven de poco. Cerciórate bien de que has llegado a la solución.

D

SACA JUGO AL JUEGO Y A TU EXPERIENCIA

¿Has resuelto tu problema? ¡Enhorabuena! ¿O bien lo has trabajado durante horas, has acabado por no resolverlo y has decidido mirar la solución? ¡Enhorabuena también! Si has pasado un buen rato interesado, entretenido, intentando, y has decidido mirar cómo demonios se resuelve, la experiencia puede ser incluso más satisfactoria que en el primer caso. Muchas veces aprende uno mucho más y más profundamente de los problemas intentados con interés y tesón... y no resueltos, que de los que uno resuelve casi a primera vista. Lo que hace falta en todo caso ahora es que reflexiones sobre todo el proceso durante un rato para darte a ti mismo una idea de cuáles fueron tus dificultades, los callejones sin salida en los que te metiste y por qué..., y cómo podrías proceder en el futuro para resolver mejor otros problemas y juegos, semejantes o no. Esta etapa del proceso puede ser la más provechosa de todas... y la que más a menudo olvidamos realizar.

D.1. *Examina a fondo el camino que has seguido tú. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿O por qué no has llegado a la solución?* ¿Ibas bien encaminado desde el principio? ¿Habías intuido la estrategia correcta en el paso B? ¿O por qué no se te ocurrió pensar en ella? ¿Qué es lo que te engañó al esco-

ger estrategias? ¿Cuál fue la chispa que te hizo intuir que iba a ir bien?

D.2. *Trata de entender no solo que la cosa efectivamente marcha, sino también por qué tiene que marchar así*. No te contentes con ser el afortunado burro a quien le sonó la flauta por casualidad. Si no te exiges más, la mayor parte de las veces serás más desafortunado. Por definición, las casualidades son raras.

D.3. *Mira ahora a ver si se te ocurre hacerlo de modo más simple*. Los matemáticos no suelen considerar que han *entendido* un teorema si no son capaces de verlo con una sencilla mirada sosegada que les permita contemplar de un golpe al menos sus piezas principales, sin tener que reptar penosamente de un silogismo a otro. Quien lo consigue entender así, será capaz de edificar sobre este resultado otras estructuras más potentes.

D.4. *Mira hasta dónde da de sí el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstancias*. Tal vez puedas inventar tú mismo otros juegos o problemas más interesantes que se resuelvan con los mismos procedimientos, la misma idea feliz.

D.5. *Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro*. Con experiencias repetidas como esta tal vez te puedas hacer un diagnóstico de tu propio estilo de conocimiento. Cada uno tiene el suyo peculiar. ¿Cómo es tu pensamiento? ¿Visual o analítico? ¿Dependes mucho de la expresión verbal o de la fórmula escrita? ¿Tiendes a pensar en círculos, obsesivamente? ¿Tiendes al compromiso con una sola idea, sin flexibilidad? ¿Cómo podrías fomentar la fluencia espontánea de ideas variadas, originales, novedosas? Si lo consigues, tendrás una gran ventaja al saber en qué clases de problemas te puedes ocupar con ventaja y en cuáles tu probabilidad de éxito no es tan grande. Sabrás cómo abordar problemas, no ya matemáticos, sino de toda clase, aproximándote a ellos tratando de sacar el mejor partido posible de las ventajas de tu propio estilo.

A. ANTES DE HACER. TRATA DE ENTENDER

B. EN BUSCA DE ESTRATEGIAS

- **B.1.** Busca semejanzas con otros juegos y problemas.
- **B.2.** Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.
- **B.3.** Experimenta y busca regularidades, pautas.
- **B.4.** Hazte un esquema y si se tercia... píntalo en colores.
- **B.5.** Modifica el problema, cambia en algo el enunciado, para ver si se te ocurre así un posible camino.
- **B.6.** Escoge una buena notación.
- **B.7.** Explota la simetría..., si puedes.
- **B.8.** Supongamos que no..., ¿a dónde nos lleva?
- **B.9.** Supongamos el problema resuelto.
- **B.10.** Piensa en técnicas generales: inducción, descenso, proceso diagonal, principio del palomar...

C. LLEVA ADELANTE TU ESTRATEGIA

- **C.1.** Lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la etapa B. Una a una. No las mezcles en principio.
- **C.2.** No te arrugues fácilmente. Pero tampoco te emperres demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.
- **C.3.** ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

D. SACA JUGO AL JUEGO Y A TU EXPERIENCIA

- **D.1.** Examina a fondo el camino que has seguido tú. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿O por qué no has llegado a la solución?
- **D.2.** Trata de entender no solo que la cosa efectivamente marcha, sino también por qué tiene que marchar así.
- **D.3.** Mira ahora a ver si se te ocurre hacerlo de modo más simple.
- **D.4.** Mira hasta dónde da de sí el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstancias.
- **D.5.** Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

Notas

¿Sabías que casi todos nosotros estamos aprovechando una mínima parte de nuestra capacidad intelectual para resolver problemas y pensar creativamente? Sí, en general todos tenemos nuestra mente ocupada a muy bajo rendimiento. ¿Por qué? Por muy diversas causas, entre las más importantes porque dejamos que nuestra mente quede dominada por bloqueos de muy diversas clases. Muchos son bloqueos culturales que se nos han metido en la cabeza desde pequeñitos, otros son bloqueos emocionales, otros son bloqueos de nuestro ambiente particular... He aquí unos cuantos:

— «BUSCA LA SOLUCIÓN CORRECTA.» Con frecuencia puede haber quince soluciones correctas para muchos problemas. Esto hace que cuando encontramos una nos creamos que ya está hecho todo, siendo así que lo más probable es que no sea ni la mejor ni la más adecuada, bonita, elegante, novedosa, ni la que sirve para siempre...
— «HAY QUE SER PRÁCTICOS.» Cualquiera que hubiese asistido desde dentro a las especulaciones solitarias de Einstein casi niño pensando qué ocurriría si se elevara en un ascensor a velocidad cercana a la de la luz le hubiera tirado de las orejas por su pérdida de tiempo: «Albert, en lo que tienes que pensar es en los deberes...»
— «ES MALO EQUIVOCARSE.» Y como tenemos miedo a equivocarnos, hacemos las cuatro cosas de las que estamos seguros. Así, con suerte, hacemos CUATRO cosas bien. En cambio, el que sabe que se equivocará en el 40 por 100 de las veces y a pesar de ello va adelante y hace veinte cosas, hará DOCE cosas bien.
— «NO SEAS INFANTIL. JUGAR ES DE NIÑOS.» Y sin embargo, del juego, del cultivo del pensamiento ambiguo, de hacer un poco el loco, es de donde salen más a menudo las ideas geniales.

El estudio sistemático de la creatividad y de sus mecanismos es cosa bastante reciente. Empezó en Estados Unidos en los años cincuen-

ta. Pronto se empezaron a poner de manifiesto muchos elementos de la educación tradicional que lo que hacen es inhibir y apagar la creatividad innata que los niños presentan... hasta que han pasado unos pocos años en la escuela. Hacia los diez años, después de unos cuatro años de esfuerzo por introducirles en el sistema de pensamiento de los adultos, para muchos se acabó la espontaneidad de pensamiento y de acción, las ideas brillantes, el gusto por ensayar cosas nuevas... Triste, ¿no? Si te interesa ver qué puedes hacer para salir de la jaula tú mismo y ayudar a otros a salir de bloqueos y de increatividad, puedes buscar en la literatura sobre psicología y pedagogía nombres como Guilford, Torrance, Taylor... Muchos de sus libros están traducidos al castellano.

1

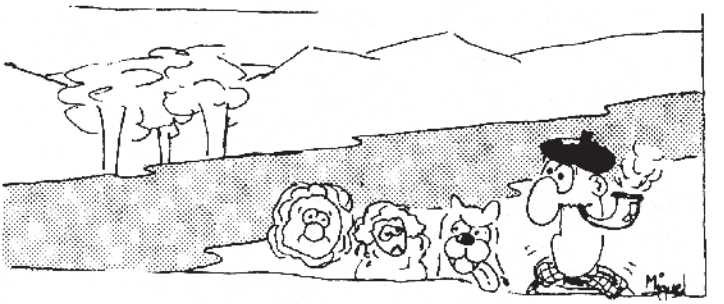
Algunos casos para entrenar el olfato

Vamos ahora a entrenarnos. Nos enfrentaremos con casos interesantes, más o menos conocidos, algunos clásicos en la historia del género, y veremos cómo poniendo en práctica las sugerencias del capítulo anterior podemos ir aguzando nuestro olfato para otros casos más difíciles. Primero te propondré los casos. Tú trata de resolverlos fijándote en las estrategias de tu pensamiento, como te he sugerido en el capítulo 0, no solamente intentando obtener la solución, sino también tratando de dar cuenta de cuáles son los caminos que sigues, los malos y los buenos, pues de todos ellos puedes aprender para el futuro. Más adelante *miraremos* juntos cómo las estrategias indicadas antes pueden ser una ayuda efectiva en la tarea.

1.1

Al pasar la barca me dijo el barquero...

a) *Pastor, oveja, lobo y col.* Un pastor, acompañado de una oveja, un lobo y una enorme col, se acerca a la orilla de un río que tiene que cruzar. Se encuentra con una barca tan pequeña que solo puede transportar a la vez a él con uno de sus acompañantes. Pero si deja solos en una orilla a la oveja y la col, aquella se zampará esta. Si deja solos oveja y lobo, aquella será zampada por este. ¿Cómo le organizas los viajes para llegar al final con sus tres pertenencias a la otra orilla?



Pastor, oveja, lobo y col

Este problema es fácil y seguro que lo habrás hecho más de una vez. Lo interesante es que te organices algún sistema de pensamiento, alguna táctica que te permita hacerte especialista en esta clase de problemas por si te consultan los maridos celosos del acertijo siguiente.

b) *Los dos maridos celosos.* Dos parejas de recién casados llegan a la orilla de un río que quieren cruzar. Allí está la barca que puede transportar solamente a dos personas a la vez. (¿Por qué harán las barcas siempre tan canijas?) Resulta que los dos maridos son tan celosos que ninguno de ellos tolera dejar a su mujer donde haya otro hombre a menos que esté él mismo presente. A pesar de todo, ¿les puedes organizar también los viajes?

1.2

ALUBIAS ROJAS Y BLANCAS

En un saco blanco tienes unas 2.000 alubias blancas y en otro saco, rojo, unas 3.000 alubias rojas. Del saco blanco pasas al saco rojo 50 alubias. Revuelves bien revueltas las alubias del saco rojo, sacas 50 alubias, sin mirarlas, y las metes en el saco blanco. Revuelves las alubias del saco blanco. Repites la operación: del saco blanco pasas ahora al rojo 100 alubias, revuelves y sacas del rojo 100 alubias también, que pasas al blanco. Repites por tercera vez, con 150 alubias. Pregunta: ¿hay al final más alubias blancas en el saco rojo que alubias rojas en el saco blanco o al revés?

1.3

JUGANDO AL *BRIDGE*

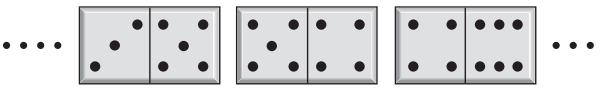
a) Cuatro amigos os disponéis a jugar una partida de *bridge* (bueno, no importa nada que no sepas jugar al *bridge* para entender de qué va lo que te propongo). Estás repartiendo las 52 cartas de la baraja inglesa, una a una, como hacen los británicos y habiendo comenzado, naturalmente, por la izquierda. En medio del reparto te llaman al teléfono. Interrumpes, te vas, hablas por teléfono y cuando vuelves... has olvidado por dónde ibas repartiendo. Eso de contar las cartas da mucho trabajo. ¿Se te ocurre cómo repartir las cartas que quedan en el mazo de modo que a cada jugador no solamente le des el número correcto de cartas, 13, sino que no cambies la suerte y le des las que le hubieran tocado en caso de seguir repartiendo, sin interrupciones?

b) A propósito: ¿qué es más probable, que entre tú y tu compañero tengáis todos los tréboles o que entre él y tú no tengáis ninguno?

1.4

CON LAS FICHAS DEL DOMINÓ

a) Las 28 fichas del dominó pueden colocarse todas ellas una tras otra siguiendo la regla del dominó, es decir, que dos fichas tengan unas mitades adyacentes con el mismo número de puntos, por ejemplo:



Retira de tu dominó las 7 fichas que tienen un seis. ¿Puedes colocar las 21 fichas restantes sobre la mesa siguiendo las reglas del juego?

b) Este es un juego para dos jugadores, *A* y *B*. Se juega con 32 fichas de dominó (sin que importe su valor) y un tablero de ajedrez. A

falta de unas y de otro puedes hacerte un cuadriculado de papel de 8 × 8 cuadros y 32 rectángulos de papel, tales que cada uno sea capaz de cubrir dos cuadrados de tu tablero.

Comienza *A* el juego cubriendo con una ficha de dominó los dos cuadrados que quiera. Luego *B* coloca una ficha cubriendo los dos cuadros libres, sin cubrir, que quiera. Luego *A*... Pierde el primero que no pueda colocar ficha.

¿Puedes encontrar una estrategia para alguno de los jugadores? ¿Cómo cambia el desarrollo del juego si el tablero es de 8 × 9? ¿Y si es de 9 × 9?

LOS CASOS RESUELTOS

Una advertencia: no pienses que las soluciones que te presento se le ocurren a uno así, a bote pronto. Son fruto de largos ratos, a veces horas, de pensar. Si te contara todas las idas y venidas del pensamiento alrededor de cada problema, los callejones sin salida en que razonablemente se puede uno meter antes de topar con la solución adecuada, elegante, simple, no terminaríamos nunca. Por eso no te dejes impresionar ni te desanimes en absoluto si después de haber trabajado un montón de tiempo resulta que te parece conseguir poca cosa. A pensar se aprende pensando. A pensar bien se aprende pensando mucho, bien y mal. ¡Ánimo!

1. Al pasar la barca...

a) Lo único que hay que hacer es no pararse. Empezar a andar por el único camino posible. En un momento dado hay dos caminos. Seguimos por los dos y vemos qué pasa. El pastor se da cuenta de que lo único no peligroso es dejar lobo y col solitos. Así que lo que hace es: 1) pasa la oveja; 2) vuelve y pasa la col (su intención es dejar col y lobo al otro lado); 3) vuelve con la oveja; 4) pasa al lobo; 5) deja col y lobo y vuelve a por la oveja. A partir del paso 2 existe otra opción: 2*) vuelve y pasa al lobo; 3*) vuelve con la oveja; 4*) pasa la col; 5) deja col y lobo y vuelve a por la oveja. Y se acabó.