

L'intégrale



Mathématiques approfondies Informatique

► **QUESTIONS ET MÉTHODES**

Coordonné par O. SARFATI et M. ALFRÉ

DUNOD

Couverture :

- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083141-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation »**. Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail :** cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté.
- **Annoter également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page :** vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 4 à 5 fois sur vos deux années de prépas.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode :** à la fin de vos deux années de prépa, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Bonne continuation.

Les auteurs

Sommaire

Partie I. Généralités

Chapitre 1. Récurrence, logique, ensembles, applications	11
1.1. Logique	13
1.2. Récurrence	25
1.3. Ensembles	29
1.4. Parties de $\mathbb{R}$	33
1.5. Applications	36
1.6. Exercices corrigés	47
1.7. Corrigés des exercices	49
Chapitre 2. Sommes et Produits	57
2.1. Sommes	59
2.2. Produits	83
2.3. Exercices corrigés	87
2.4. Corrigés des exercices	89

Partie II. Algèbre

Chapitre 3. Polynômes	101
3.1. Degré et coefficient d'un polynôme	103
3.2. Dérivation d'un polynôme	113
3.3. Racines et factorisation d'un polynôme	116
3.4. Reste dans la division euclidienne	124
3.5. Égalités de polynômes	126
3.6. Exercices corrigés	130
3.7. Corrigés des exercices	132
Chapitre 4. Systèmes linéaires et Matrices	145
4.1. Systèmes linéaires	147
4.2. Calculs matriciels	155
4.3. Propriétés d'une matrice	172
4.4. Exercices corrigés	187
4.5. Corrigés des exercices	192
Chapitre 5. Généralités sur les espaces vectoriels.	215
5.1. Sous-espaces vectoriels	217
5.2. Familles libres, génératrices et bases	220
5.3. Exercices corrigés	230
5.4. Corrigés des exercices	231
Chapitre 6. Compléments sur les espaces vectoriels	241
6.1. Espaces vectoriels de dimension finie	243
6.2. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice	250
6.3. Familles libres, génératrices et bases	255
6.4. Égalités d'espaces vectoriels	259
6.5. Sommes de sous-espaces vectoriels	259
6.6. Exercices corrigés	274
6.7. Corrigés des exercices	276

Chapitre 7. Applications linéaires.	285
7.1. Applications linéaires	287
7.2. Noyau, Image et Rang	290
7.3. Injectivité, surjectivité, bijectivité	296
7.4. Matrice représentative d'une application linéaire	308
7.5. Projecteurs	316
7.6. Polynômes d'endomorphismes	324
7.7. Exercices corrigés	331
7.8. Corrigés des exercices	333

Partie III. Analyse

Chapitre 8. Suites.	353
8.1. Existence et calcul du terme général d'une suite	355
8.2. Monotonie d'une suite	363
8.3. Encadrement d'une suite	366
8.4. Comportement en l'infini	371
8.5. Étude des suites vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$	385
8.6. Exercices corrigés	387
8.7. Corrigés des exercices	389

Chapitre 9. Fonctions. Limites, continuité, dérivabilité	401
9.1. Ensemble de définition	403
9.2. Limite	405
9.3. ★ Négligeabilité, équivalence	412
9.4. Continuité	419
9.5. Dérivation	424
9.6. Dérivées successives	435
9.7. Exercices corrigés	441
9.8. Corrigés des exercices	443

Chapitre 10. Fonctions. Étude générale	455
10.1. Parité et périodicité	457
10.2. Sens de variation	459
10.3. Bijection	464
10.4. ★ Convexité et concavité	471
10.5. Encadrements et inégalités	474
10.6. Résolution d'équations	488
10.7. Représentation graphique	493
10.8. Exercices corrigés	498
10.9. Corrigés des exercices	500

Chapitre 11. Intégration sur un segment.	513
11.1. Calcul et expression d'une intégrale	515
11.2. Encadrement d'une intégrale	534
11.3. Lien entre sommes et intégrales	539
11.4. Fonction définie par une intégrale	542
11.5. Suite définie par une intégrale	550
11.6. Exercices corrigés	554
11.7. Corrigés des exercices	557

Chapitre 12. Séries numériques	571
12.1. Convergence et divergence d'une série	573
12.2. Encadrement de la somme d'une série	591
12.3. Fonction définie comme somme d'une série	598
12.4. Exercices corrigés	602
12.5. Corrigés des exercices	605

Chapitre 13. Formules de Taylor, développements limités	617
13.1. Formules de Taylor	619
13.2. Développements limités	626
13.3. Exercices corrigés	635
13.4. Corrigés des exercices	638

Chapitre 14. Intégrales impropres	657
14.1. Convergence et divergence d'une intégrale impropre	659
14.2. Encadrement d'une intégrale impropre	683
14.3. Fonctions définies par une intégrale impropre	689
14.4. Suites d'intégrales impropres	695
14.5. Exercices corrigés	700
14.6. Corrigés des exercices	703

Partie IV. Probabilités

Chapitre 15. Probabilités sur un univers fini ou infini	721
15.1. Les bases du dénombrement	723
15.2. Espaces probabilisés	732
15.3. Probabilité d'événements	741
15.4. Événements indépendants	766
15.5. Exercices corrigés	771
15.6. Corrigés des exercices	774

Chapitre 16. Variables aléatoires discrètes	793
16.1. Notion de variable aléatoire discrète	795
16.2. Loi d'une variable aléatoire discrète	799
16.3. Espérance d'une variable aléatoire discrète X	816
16.4. Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète	831
16.5. Rappels de cours sur les lois usuelles	843
16.6. Exercices corrigés	843
16.7. Corrigés des exercices	848

Chapitre 17. Couples de variables aléatoires réelles discrètes	869
17.1. Loi de couple de variables aléatoires	871
17.2. Indépendance variables aléatoires	878
17.3. Fonction d'un couple de variables aléatoires	884
17.4. Espérance de $g(X, Y)$	892
17.5. Exercices corrigés	896
17.6. Corrigés des exercices	898

Chapitre 18. Convergences et approximations	911
18.1. Inégalités probabilistes	913
18.2. Loi faible des grands nombres	915
18.3. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson	917
18.4. Exercices corrigés	918
18.5. Corrigés des exercices	920

Partie V. Informatique

Chapitre 19. Python	927
19.1. Notions fondamentales	929
19.2. Algèbre	935
19.3. Analyse	940
19.4. Probabilités	950
19.5. Statistiques	958

Partie I

Généralités

Chapitre 1

Récurrence, Logique, Ensembles, Applications



On commence par un chapitre très structurant pour vos deux années. Les démonstrations par récurrence seront notamment présentes dans bien des chapitres (suites, séries, probabilités, variables aléatoires, matrices...) tandis que les démonstrations par l'absurde ou les raisonnements par équivalences vous suivront à peu près partout ! Les notions d'applications injectives, surjectives ou bijectives interviendront quelque peu en analyse mais mobiliseront surtout votre attention sur les chapitres d'algèbre linéaire. Vous l'aurez compris, il ne faut pas négliger ce chapitre introductif alors n'hésitez pas à vous y plonger et à y revenir régulièrement.

DANS CE CHAPITRE

- 17** questions classiques
- 35** méthodes
- 42** exercices

Sommaire

Chapitre 1. Récurrence, logique, ensembles, applications	11
1.1. Logique	13
Question 1. Comment déterminer le contraire d'une proposition ?	13
Question 2. Comment montrer qu'une proposition est vraie ?	14
Question 3. Comment montrer qu'une proposition est fausse ?	20
Question 4. Comment montrer une implication directe ($H \Rightarrow P$) ?	22
Question 5. Comment montrer une équivalence ($H \Leftrightarrow P$) ?	23
1.2. Récurrence	25
Question 6. Comment prouver une proposition par récurrence ?	25
1.3. Ensembles	29
Question 7. Comment montrer une inclusion d'ensembles ($A \subset B$) ?	29
Question 8. Comment montrer une égalité d'ensembles ?	31
1.4. Parties de $\mathbb{R}$	33
Question 9. Comment montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée, minorée, bornée ?	33
Question 10. Comment montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ admet un minimum, un maximum ?	34
1.5. Applications	36
Question 11. Comment déterminer l'image directe d'un ensemble A par f ?	37
Question 12. Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble B par une application f ?	38
Question 13. Comment montrer qu'une application f est injective ?	39
Question 14. Comment montrer qu'une application f est surjective ?	41
Question 15. Comment montrer qu'une application f n'est pas surjective ?	42
Question 16. Comment montrer qu'une application f est bijective ?	43
Question 17. Comment montrer qu'une application f n'est pas bijective ?	46
1.6. Exercices corrigés	47
Exercice 38. Des récurrences délicates	47
Exercice 39. Logique et quantificateurs	47
Exercice 40. Fonction caractéristique	47
Exercice 41. Irrationalité de racine de 2	48
Exercice 42. Résolution d'une équation fonctionnelle	48
1.7. Corrigés des exercices.	48
Corrigé exercice 38. Des récurrences délicates	48
Corrigé exercice 39. Logique et quantificateurs	52
Corrigé exercice 40. Fonction caractéristique	53
Corrigé exercice 41. Irrationalité de racine de 2	54
Corrigé exercice 42. Résolution d'une équation fonctionnelle	56

1.1. Logique

Question 1 Comment déterminer le contraire d'une proposition ?

Méthode 1 En écrivant le contraire de chaque élément de la proposition



RAPPEL DE COURS

Soit A un ensemble, P et Q des propositions.

On note $\overline{P}$ (ou non P) le contraire de P .

On rappelle que $\forall$ se lit « pour tout » et $\exists$ se lit « il existe ».

- Le contraire de « $a \geq b$ » est « $a < b$ ».
 - Le contraire de « $\forall x \in A, P_x$ » est « $\exists x \in A, \overline{P_x}$ ».
- Par exemple : le contraire de « $\forall x \geq 1, f(x) < 1$ » est :

$$\text{« } \exists x \geq 1, f(x) \geq 1 \text{ »}$$

- Le contraire de « $(\exists x \in A, P)$ » est « $(\forall x \in A, \overline{P})$ ».
- Le contraire de « P et Q » est « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ ».
- Le contraire de « P ou Q » est « $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ ».



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer le contraire d'une proposition, on procède en respectant les règles sur les contraires ci-dessus, en écrivant le contraire de chaque composant de la proposition. On commence par l'élément de gauche, puis on écrit le contraire des différents éléments jusqu'au dernier élément de droite. Le brouillon de l'exercice ci-dessous permet de mieux comprendre la méthode à appliquer.

Exercice 1

Écrire le contraire de :

$$\text{« } \forall x > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \leq x \right) \text{ »}$$

Corrigé



Brouillon

- Le contraire de « $\forall x > 0, P_x$ » est :
« $\exists x > 0, \overline{P_x}$ »
- Le contraire de « $\exists N \in \mathbb{N}, P_N$ » est
« $\forall N \in \mathbb{N}, \overline{P_N}$ »

- Le contraire de « $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ » est
« $\exists n \in \mathbb{N}, \overline{P_n}$ »
- Le contraire de « $(n \geq N) \Rightarrow (\frac{1}{n} \leq x)$ »
est :
« $\exists n \geq N$ tel que : $\frac{1}{n} > x$ »

Le contraire de la proposition est :

$$\exists x > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in N \text{ tel que : } (n \geq N) \text{ et } \left(\frac{1}{n} > x \right)$$

Question 2

Comment montrer qu'une proposition est vraie ?

Méthode 2

Pour un $\forall$, en montrant que pour un x quelconque vérifiant les conditions, la proposition est vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\forall x \in A, \dots$ » signifie que quel que soit x pris dans A , la proposition qui suit est vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, on prend donc un x quelconque dans A (on commence le raisonnement par « soit $x \in A$ »), puis on va chercher à montrer la proposition qui suit.

Exercice 2

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq -1$.

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$$

Donc :

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 2x \geq -1$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq -1$

Méthode 3

Pour un $\exists$, en trouvant un x vérifiant les conditions telle que la proposition soit vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\exists x \in A, \dots$ » signifie qu'on peut trouver x dans A tel que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, il faut donc trouver un x tel que la proposition soit vérifiée (un raisonnement comme cela peut se terminer par exemple par « Donc pour $x = \dots$, on a bien... »)

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 5x + 2 \end{cases}$
Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$

Corrigé

Pour $x = 0$:

$$f(x) = f(0) = 2$$

Donc : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2}$

Méthode 4

En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un $\forall$ et un $\exists$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Souvent, la proposition à prouver contiendra à la fois $\forall$ et $\exists$. Il faudra donc combiner les méthodes 1 et 2 vues ci-dessus pour pouvoir montrer que la proposition est vraie.

Exercice 4

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x + 1$.

On a $x + 1 \geq x$ donc $y \geq x$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y}$

Méthode 5

Si la phrase est écrite en français et non en langage mathématique, en traduisant l'expression en termes quantifiés puis en utilisant les méthodes précédentes



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition à montrer est du type « Montrer que... » avec des termes en français et non des termes quantifiés, il faut d'abord traduire la phrase en termes quantifiés pour pouvoir ensuite utiliser les méthodes 1, 2 et 3 vues ci-dessus pour montrer que la proposition est vraie.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissantes sur $\mathbb{R}$ et $h = f \circ g$. Montrer que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Montrons que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $x \leq y$. Comme g est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$g(x) \geq g(y)$$

et alors, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$f(g(x)) \leq f(g(y))$$

d'où :

$$h(x) \leq h(y)$$

Donc : $\boxed{h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

Méthode 6

Par l'absurde



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut raisonner par l'absurde : on suppose que le contraire de la proposition est vrai, puis on poursuit le raisonnement jusqu'à aboutir à une contradiction. Notre supposition étant fausse, le contraire de la proposition est donc faux, et donc la proposition est vraie.

Les raisonnements par l'absurde sont très utiles, notamment dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Exercice 6

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Corrigé

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tel que : $\frac{x+1}{x+2} = 1$.

On a alors :

$$x + 1 = x + 2$$

donc $1 = 2$, ce qui est absurde. On a une contradiction, donc la supposition est fausse.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$

Méthode 7

Pour un $\exists!$ (ou un $\exists$), par analyse synthèse



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\exists! x \in A, \dots$ » se lit « il existe un unique x appartenant à A tel que... » et signifie qu'on peut trouver un et un seul x dans A telle que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer cela, on peut procéder par analyse synthèse, c'est un raisonnement en deux étapes :

- **Étape 1 :** L'analyse (pour montrer l'unicité sous réserve d'existence).

On suppose l'existence et on va, par une série de déductions, trouver une liste de candidats solutions $x_1, \dots, x_n$ (que l'on va expliciter) qui peuvent vérifier les conditions.

- **Étape 2 :** La synthèse (pour montrer l'existence). Pour chacun des candidats solution trouvés dans l'analyse, on regarde s'il vérifie bien les conditions. En cas d'unicité, ou bien il y aura un unique candidat solution, qui vérifie bien les conditions, ou bien il y aura plusieurs candidats mais un seul vérifiera les conditions.

Exercice 7

Notons F l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P l'ensemble des fonctions paires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des fonctions impaires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\forall f \in F, \exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i$$



RAPPEL DE COURS

- Pour A et B deux ensembles, $(x, y) \in A \times B$ signifie que $x \in A$ et $y \in B$
- $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = p(x)$
- $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, i(-x) = -i(x)$

Corrigé

Soit $f \in F$, montrons que $\exists!(p, i) \in P \times I$, $f = p + i$.
Procédons par analyse-synthèse.

◇ *Analyse*

Supposons qu'il existe $(p, i) \in P \times I$ tels que $f = p + i$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme p est paire et i est impaire, on a :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}$$

En faisant la somme de ces égalités d'une part, la différence d'autre part, on obtient :

$$\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2p(x) \\ f(x) - f(-x) = 2i(x) \end{cases}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

◇ *Synthèse*

Soit p et i les fonctions définies par, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

et :

$$\begin{cases} p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} \\ i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} p(-x) = p(x) \\ i(-x) = -i(x) \end{cases}$$

Donc p est paire et i est impaire. Donc p et i conviennent.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall f \in F, \exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i}$$

Méthode 8

Pour un $\exists!$, en raisonnant par équivalence



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer un $\exists!$ lorsqu'il s'agit d'une équation, et qu'on cherche donc à prouver que cette équation admet une unique solution, on peut partir de l'équation et raisonner par équivalences successives jusqu'à arriver à une unique solution.

Attention, l'utilisation des équivalents est source de nombreuses erreurs : si vous procédez par équivalences successives, assurez-vous que le sens direct et le sens réciproque sont vérifiés pour chaque équivalence. Trop souvent, les étudiants écrivent une équivalence alors qu'il n'y a en réalité qu'une implication.

Exercice 8

Montrer que : $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1$ et $3x - 2y = 1$.

Corrigé

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1 \text{ et } 3x - 2y = 1}$

Méthode 9

Pour montrer qu'une équation du type $f(x) = a$ admet une unique solution, en utilisant le théorème de la bijection



RAPPEL DE COURS

Soit f une fonction de I (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f établit une bijection de I dans $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert), et on a $\forall a \in f(I), \exists! x \in I, f(x) = a$.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition est de la forme $\exists! x \in I, f(x) = a$ où $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on peut parfois montrer cette proposition en utilisant le théorème de la bijection. Il faut alors montrer que f est continue et strictement monotone sur I , et que $a \in f(I)$. Attention à ne pas vous tromper pour déterminer $f(I)$: Par exemple, si f est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty, a]$, alors :

$$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$$

Exercice 9

Soit $n \geq 2$, montrer que : $\exists! x \in]1, +\infty[, x^n - x - 1 = 0$

Corrigé

$$\text{Posons } f : \begin{cases}]1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - 1 \end{cases}.$$

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction polynôme et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) &= nx^{n-1} - 1 \\ &\geq n - 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

f est donc strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$. De plus on a :

$$f(1) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc f établit une bijection de $]1, +\infty[$ dans $] -1, +\infty[$. Or 0 appartient à $] -1, +\infty[$, donc :

$$\exists! x \in]1, +\infty[, f(x) = 0$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\exists! x \in]1, +\infty[, x^n - x - 1 = 0}$$

Question 3

Comment montrer qu'une proposition est fausse ?

Méthode 10

S'il s'agit d'un $\forall$, en trouvant un contre-exemple



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition commençant par « $\forall x \in A$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple (un seul suffit, il ne faut pas raisonner dans le cas général), i.e. trouver un x dans A telle que la proposition ne soit pas vérifiée.

Exercice 10

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \Rightarrow \sin(x) \leq \sin(y)$$

Corrigé

Pour $x = 0$ et $y = \frac{3\pi}{2}$, on a : $x \leq y$. Et pourtant on a :

$$\sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(y) = -1$$

donc :

$$\sin(x) > \sin(y)$$

Donc : La proposition est fausse

Méthode 11

S'il s'agit d'un $\exists$, en montrant que quel que soit le x choisi vérifiant les conditions, la proposition n'est pas vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition du type " $\exists x \in A, P$ " est fausse, il faut montrer que " $\forall x \in A, \overline{P}$ ". En effet, si quel que soit x dans A , P n'est pas vérifiée, alors on ne peut pas trouver de x dans A tel que P soit vérifiée.

Exercice 11

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 1 = -2$$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x^2 \geq 0$ donc $x^2 - 1 \geq -1$ et donc :

$$x^2 - 1 > -2$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 1 \neq -2$$

Donc : La proposition est fausse

Question 4

Comment montrer une implication directe ($H \Rightarrow P$) ?

Méthode 12

En supposant H vraie, et en montrant P vraie



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que $(H \Rightarrow P)$, on commence la rédaction par « supposons H », et on cherche à montrer que P est vraie.

Exercice 12

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^y \Rightarrow x = y$.

Corrigé

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $e^x = e^y$. e^x et e^y sont strictement positifs donc en composant par $\ln$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(e^x) = \ln(e^y)$$

Or on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \ln(e^u) = u$$

Donc : $x = y$

Ainsi : $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^y \Rightarrow x = y}$

Méthode 13

Par contraposée



RAPPEL DE COURS

- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
- Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une implication est vraie, on peut montrer que sa contraposée est vraie. On va donc montrer que le contraire de Q implique le contraire de P .

Exercice 13

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer :

$$(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leq b)$$

Corrigé

Montrons la contraposée : $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon)$.

Supposons $a > b$. On a : $a - b > 0$.

Posons $\varepsilon = a - b$. On a alors $\varepsilon > 0$. On a bien $a \geq b + \varepsilon$ car $b + \varepsilon = b + a - b = a$.

Donc $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon)$

Ainsi, par contraposée : $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leq b)$

Question 5

Comment montrer une équivalence $(H \Leftrightarrow P)$?



RAPPEL DE COURS

Vocabulaire On dit que P est une **condition nécessaire** pour H si et seulement si $H \Rightarrow P$

On dit que P est une **condition suffisante** pour H si et seulement si $P \Rightarrow H$

On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour H si et seulement si $H \Leftrightarrow P$

Méthode 14

En raisonnant par équivalences successives



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence $(H \Leftrightarrow P)$, on peut raisonner par équivalences successives, en partant de H jusqu'à arriver à P (ou dans l'autre sens). On a un raisonnement de la forme suivante : $H \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P$

Attention, ce raisonnement peut être source d'erreurs car de nombreux étudiants mettent des $\Leftrightarrow$ alors qu'il y a seulement une implication. Il faut donc s'appliquer pour chaque $\Leftrightarrow$ à vérifier qu'il y a bien implication et implication réciproque pour ne pas faire d'erreur dans le raisonnement.



Remarque

Si l'on applique une fonction f à une égalité ou une inégalité de réels, il faut justifier la bijectivité de f (le plus souvent en disant que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle auquel appartiennent les éléments de l'équivalent) pour obtenir une relation d'équivalence, et pas juste une implication.

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$$

Corrigé

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1$$

soit encore :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

et comme $x > 0$:

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$$

Donc :
$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$$

Méthode 15

Par implication directe puis implication réciproque



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence lorsqu'on ne peut pas raisonner par équivalences successives, il faut raisonner par implication directe puis implication réciproque.

On montre d'abord l'implication directe ($H \Rightarrow P$) : « Supposons H , montrons P ».

Puis on montre l'implication réciproque ($P \Rightarrow H$) : « Supposons P , montrons H ».

Exercice 15

Pour A une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$$

Corrigé

► Supposons ($\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$), montrons que $A = B$.

◇ Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, on a : $\mathbb{1}_A(x) = 1$.

Or $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ donc : $x \in B$

Ainsi : $A \subset B$.

◇ Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, on a : $\mathbb{1}_B(x) = 1$.

Or $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x)$ donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et : $x \in A$.

Donc $B \subset A$ et ainsi : $A = B$.

► Supposons $A = B$, montrons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors ou bien $x \in A$ (et alors $x \in B$), donc : $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)$, ou bien $x \notin A$ (et alors $x \notin B$), donc on a : $\mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_B(x)$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$$

et donc : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$

Finalement : $\boxed{\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B}$

1.2. Récurrence



Remarque

1. Lorsque l'on doit faire une récurrence, deux cas de figure peuvent se présenter.
 - L'hypothèse de récurrence est donnée par l'énoncé : il suffit alors d'appliquer la méthode de récurrence adaptée.
 - L'hypothèse de récurrence n'est pas donnée par l'énoncé : il faut alors réfléchir au brouillon pour déterminer cette hypothèse de récurrence.
2. Attention à ces erreurs fréquentes.
 - Dans le cas d'une récurrence portant sur un entier n , le $\forall n$ doit être placée avant la proposition $\mathcal{P}(n)$ et non à l'intérieur de celle-ci.
 - Au niveau de l'hérédité on choisit de raisonner sur un entier n quelconque **fixé** et non $\forall n$.

Question 6

Comment prouver une proposition par récurrence ?

Méthode 16

Par récurrence simple



POINT MÉTHODOLOGIQUE

On utilise une récurrence simple sur n dans $\mathbb{N}$ pour montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant de n et quand on dispose d'un lien permettant de passer de $\mathcal{P}(n)$ à $\mathcal{P}(n+1)$, par exemple pour calculer une somme ou un produit fini, le terme général d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ou encore une expression explicitée directement en fonction de n .

- 1) Nommer la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$.
- 2) Initialiser la propriété pour n_0 : montrer $\mathcal{P}(n_0)$ vraie.
- 3) Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+1)$.
- 4) On conclut.

Exercice 16

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $(1+x)^n \geq 1+nx$ » est vraie.

◇ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \times x$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

En multipliant par $1+x \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2\end{aligned}$$

Or $nx^2 \geq 0$, et donc :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

◇ Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx}$



Remarque

L'expression en jeu dépend ici de deux éléments distincts : un réel x et un entier n . Il y a alors deux possibilités de rédaction :

- 1) Fixer le réel x en amont puis rédiger la propriété de récurrence en fonction de n . Le réel x est, dans toute la récurrence, quelconque et fixé.
- 2) Ne pas fixer le x en amont et l'inclure dans la propriété de récurrence. Dans cet exemple, la proposition serait alors $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$ ».

Méthode 17

Par récurrence double (ou plus)



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Ce type de récurrence s'utilise quasiment exclusivement pour montrer un résultat portant sur une suite sur laquelle on possède une relation liant au moins trois termes consécutifs d'une suite, par exemple u_{n+2} , u_{n+1} et u_n . Voici comment procéder :

- 1) Nommer la propriété de récurrence, $\mathcal{P}(n)$.
- 2) Initialiser la propriété pour n_0 et $n_0 + 1$.

Attention à ne pas oublier d'initialiser la propriété pour deux entiers, et pas uniquement pour n_0 .

- 3) Démontrer l'hérédité : on fixe un n supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+2)$.
- 4) On conclut.

Exercice 17

La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}^*$$

Corrigé

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : « u_n \in \mathbb{N}^* »$.

- ◇ $u_0 = u_1 = 1$ et $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.
Alors $u_n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Donc, comme la somme de deux entiers naturels non nuls est un entier naturel non nul, $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- ◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}^*}$



Remarque

Nous avons jusqu'ici vu les récurrences simples et doubles. Des récurrences triples, quadruples ou plus peuvent de même être menées. Pour réaliser une récurrence d'ordre p , il faut :

- 1) Nommer la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$.
- 2) Initialiser la propriété pour les p premiers termes.
- 3) Démontrer l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \dots$ et $\mathcal{P}(n+p-1)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+p)$.
- 4) On conclut.

L'exercice ci-dessous illustre une récurrence triple.

Exercice 18

Extrait d'ESSEC

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant :

$$\forall n \geq 1, 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0 \quad (1)$$

Soit v une suite vérifiant (1) telle que : $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.
Montrer que :

$$\forall n \geq 1, v_n = 0$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 0$ ».

- ◇ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ d'où $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ vraies. (v_n) vérifie (1) donc :

$$9v_{n+3} = 9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n$$

et alors, par hypothèses de récurrence :

$$9v_{n+3} = 0$$

d'où :

$$v_{n+3} = 0$$

donc $\mathcal{P}(n+3)$ vraie.

- ◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0}$

Méthode 18

Par récurrence forte



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode s'applique quasiment exclusivement aux suites définies avec une relation liant u_{n+1} à $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_n$. Voici comment procéder :

- 1) Nommer la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$
- 2) Initialiser la propriété pour n_0 .
- 3) Démontrer à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1), \dots$, et $\mathcal{P}(n)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+1)$.
- 4) On conclut.

Si la récurrence simple est possible, elle doit être privilégiée à la récurrence forte. La récurrence forte ne doit être utilisée que si la récurrence simple ne fonctionne pas.

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$$

Corrigé

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 2^n$ ».

- ◇ $u_0 = 1 \leq 2^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ soient vraies.

Par sommation des $n + 1$ inégalités des hypothèses de récurrence, il vient :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$

soit encore :

$$u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n 2^k$$

On reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &\leq 2^{n+1} - 1 \\ &\leq 2^{n+1} \end{aligned}$$

D'où : $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n}$

1.3. Ensembles

Question 7 Comment montrer une inclusion d'ensembles ($A \subset B$) ?

Méthode 19 En montrant que pour $x \in A$, $x \in B$



RAPPEL DE COURS

A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B .
On a de plus :

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, pour montrer que A est inclus dans B , on montre que tout élément de A appartient à B .

Il arrive parfois qu'il ne soit pas simple de prouver l'inclusion $A \subset B$ directement en montrant que tout élément de A appartient à B . Dans ce cas, on peut montrer que tout élément de $\overline{B}$ (*i.e.* n'appartenant pas à B) appartient à $\overline{A}$ (*i.e.* n'appartient pas non plus à A).



RAPPEL DE COURS

- $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$
- $x \in B \cap C$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in C$

Distributivité

- Soient A, B et C des ensembles. On a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et B des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) = \left(\bigcup_{i=0}^n (A_i \cap B) \right)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right) = \left(\bigcap_{i=0}^n (A_i \cup B) \right)$$

Lois de Morgan

- Soient A et B des ensembles. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\overline{\left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right)} = \left(\bigcup_{i=0}^n \overline{A_i} \right) \quad \text{et} \quad \overline{\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right)} = \left(\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i} \right)$$

Exercice 20

Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux familles d'ensembles tels que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \overline{A_i} \subset \overline{B_i}$$

Soit C un ensemble. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \subset \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$$

Corrigé

Soit $n \geq 0$ et $x \in C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right)$. D'après les lois de Morgan, on a :

$$\overline{\bigcup_{i=0}^n A_i} = \bigcap_{i=0}^n \overline{A_i}$$

et alors, par distributivité :

$$C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) = \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{A_i})$$

Ainsi $x \in \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{A_i})$ et :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x \in C \cup \overline{A_i}$$

Soit alors $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Deux cas se présentent.

- ou bien $x \in C$, et alors : $x \in C \cup \overline{B_i}$,
- ou bien $x \in \overline{A_i}$ et alors, comme $\overline{A_i} \subset \overline{B_i}$: $x \in C \cup \overline{B_i}$.

Dans tous les cas, on a donc :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x \in C \cup \overline{B_i}$$

d'où :

$$x \in \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \subset \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$

Question 8

Comment montrer une égalité d'ensembles ?

Méthode 20

Par double inclusion



RAPPEL DE COURS

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, quand on veut montrer que deux ensembles sont égaux, on procède par double inclusion : on commence par montrer que $A \subset B$ en utilisant les méthodes vues précédemment puis on montre de même que $B \subset A$.

Exercice 21

Soit A, B, C trois ensembles tels que : $A \cap B = A \cap C$.

Montrer que :

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

Corrigé

◇ On montre d'abord que : $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$.

Soit $x \in A \cap \overline{B}$. x appartient à $\overline{B}$, donc x n'appartient pas à B . Il en découle que x n'appartient pas à $A \cap B$ et donc, comme $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$:

$$x \notin A \cap C$$

Or x appartient à A , donc x n'appartient pas à C , donc il appartient à $\overline{C}$. Ainsi :

$$x \in A \cap \overline{C}.$$

d'où :

$$A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$$

◇ On montre ensuite que : $A \cap \overline{C} \subset A \cap \overline{B}$.

En échangeant B et C dans le raisonnement précédent (B et C jouant des rôles symétriques), on prouve de même :

$$A \cap \overline{C} \subset A \cap \overline{B}$$

Finalement : $\boxed{A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}}$

Méthode 21

Par équivalence



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certaines situations, il est possible de raisonner directement par équivalence pour montrer l'égalité de deux ensembles A et B , en montrant que $x \in A$ équivaut à $x \in B$. Il faut néanmoins être vigilant dans les justifications car il est très facile de « perdre » l'équivalence sans s'en rendre compte. Le plus souvent, ce raisonnement sera utilisé pour déterminer les solutions d'une équation, d'un système d'équations ou d'une inéquation.

Exercice 22

Soit B l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométriques de premier terme 1 et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$$

Prouver que :

$$B = \left\{ ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$$

Corrigé

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique telle que $u_0 = 1$. Il

existe donc un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u \in B &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 2q^{n+2} + q^{n+1} - q^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n (2q^2 + q - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n = 0 \text{ ou } 2q^2 + q - 1 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît un trinôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$ donc :

$$u \in B \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n = 0 \text{ ou } q \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

De plus $q^0 = 1$ donc il est impossible d'avoir $q^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$u \in B \Leftrightarrow q \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

Ainsi :
$$B = \left\{((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right\}$$

1.4. Parties de $\mathbb{R}$

Question 9

Comment montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée, minorée, bornée ?

Méthode 22

En utilisant la définition



RAPPEL DE COURS

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A, x \leq M$.

Un tel réel M est appelé un majorant de A . En cas d'existence d'un majorant, il y en a une infinité.

Si A est majorée, elle admet un plus petit majorant, appelé borne supérieure de A et notée $\sup(A)$.

- On dit que A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A, x \geq m$.

Un tel réel m est appelé un majorant de A . En cas d'existence d'un minorant, il y en a une infinité.

Si A est minorée, elle admet un plus grand minorant, appelé borne inférieure de A et notée $\inf(A)$.

- On dit que A est bornée si elle est minorée et majorée.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (respectivement minorée), on trouve un réel M pour lequel tous les éléments de l'ensemble sont inférieurs (respectivement supérieurs) ou égaux à M .

Exercice 23

Montrer que l'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$ est borné.

Corrigé

On a :

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{1}{m} \leq 0 \end{cases}$$

donc :

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, -1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 1$$

d'où : A est borné

Question 10

Comment montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ admet un minimum, un maximum ?

Méthode 23

En trouvant directement le minimum, le maximum



RAPPEL DE COURS

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est le maximum de A si :

$$M \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \leq M$$

S'il existe, le maximum de A (noté $\max(A)$) et il est unique.

- On dit que m est le minimum de A si :

$$m \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \geq m$$

S'il existe, le minimum de A (noté $\min(A)$) et il est unique.



Remarque

Attention à ne pas confondre $\sup(A)$ et $\max(A)$ (ou $\inf(A)$ et $\min(A)$) :

- Si A admet un maximum M , alors M est le plus petit majorant de A et dans ce cas :

$$\sup(A) = \max(A)$$

- En revanche, si A admet une borne supérieure M , alors M n'appartient pas nécessairement à A et A n'a pas toujours de maximum. Par exemple 1 est la borne supérieure de $]0, 1[$ mais $]0, 1[$ n'a pas de maximum car 1 n'appartient pas à $]0, 1[$.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il arrive parfois que l'on puisse trouver le maximum ou le minimum par des moyens simples, par exemple par étude de fonctions.

Exercice 24

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 4 \leq 0\}$. Montrer que A admet un minimum et un maximum et les déterminer.

Corrigé

Le polynôme $x \mapsto x^2 + 3x - 4$ a pour discriminant :

$$\Delta = 3^2 + 4 \times 4 = 25 > 0$$

Donc le polynôme admet deux racines :

$$y = \frac{-3-5}{2} = -4 \quad \text{et} \quad z = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Le polynôme est de signe contraire au coefficient de son monôme de plus haut degré (*i.e.* négatif) entre ses racines, donc :

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 1]$$

Ainsi $A = [-4, 1]$ et :

A admet un maximum et un minimum et $\max(A) = 1$ et $\min(A) = -4$

Méthode 24

En montrant qu'elle admet une borne supérieure (ou inférieure) atteinte



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que A admet un maximum (respectivement un minimum), on montre souvent que A est majoré (respectivement minoré) et qu'il a un majorant atteint (respectivement un minorant atteint).

Exercice 25

Montrer que $A = \{\sin(x), x \in [-\pi, 3\pi]\}$ a un maximum et un minimum.

Corrigé

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

donc :

$$\forall x \in [-\pi, 3\pi], -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Ainsi A admet une borne inférieure et une borne supérieure. De plus on sait que :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

donc 1 et -1 appartiennent à A et :

A admet un minimum et un maximum

1.5. Applications



Remarque

Les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité seront revues et plus détaillées dans le chapitre 7. Ici sont décrites les méthodes permettant de répondre aux questions concernant des applications générales.



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F (notée $f : E \rightarrow F$) est une relation entre E et F , qui à tout élément de E , associe un unique élément de F .

Question 11

Comment déterminer l'image directe d'un ensemble A par f ?

Méthode 25

En utilisant la définition



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles, $A \subset E$ et f une application de E dans F .

On appelle image directe de A l'ensemble $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{f(a), a \in A\}$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer l'image directe d'un ensemble A par une application f , on va montrer une égalité d'ensemble du type $f(A) = B$ tout en pensant à utiliser la définition de $f(A)$.

Deux cas se présentent.

- Si l'énoncé est du type « montrer que $f(A) = B$ », alors on cherche directement à montrer une égalité d'ensembles (le plus souvent par double inclusion)
- Si l'énoncé demande de trouver $f(A)$, on peut commencer par trouver un ensemble B contenant $f(A)$ puis montrer que B est aussi inclus dans $f(A)$. Sinon, on peut raisonner par analyse synthèse.

Exercice 26

Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & |ab| \end{matrix}$. Déterminer $f(A)$.

Corrigé



Brouillon

On remarque $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \geq 0$. On va chercher à montrer que $f(A) = \mathbb{R}^+$.

Montrons que $f(A) = \mathbb{R}^+$.

◇ Soit $x \in f(A)$, montrons que $x \in \mathbb{R}^+$.

$x \in f(A)$ donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(a, b) = x$ i.e. $|ab| = x$. On a donc : $x \in \mathbb{R}^+$ d'où :

$$f(A) \subset \mathbb{R}^+.$$

◇ Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrons que $x \in f(A)$.

Posons $a = x$ et $b = 1$. On a $ab = x \geq 0$ donc

$$f(a, b) = |ab| = x$$

d'où : $x \in f(A)$. Ainsi :

$$\mathbb{R}^+ \subset f(A)$$

Finalement : $f(A) = \mathbb{R}^+$

Question 12

Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble B par une application f ?

Méthode 26

Avec la définition de l'image réciproque d'un ensemble B par f



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles, $B \subset F$ et f une application de E dans F .

On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer l'image réciproque d'un ensemble B par une application f de E dans F , on cherche à déterminer l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x)$ soit dans B . On va donc montrer une égalité d'ensemble $f^{-1}(B) = A$ et utiliser la définition de l'image réciproque. Il y a deux cas.

- Si l'énoncé est du type "montrer que $f^{-1}(B) = A$ ", alors on montre directement l'égalité d'ensemble.
- Si l'énoncé demande trouver $f^{-1}(B)$, il faut alors réfléchir au brouillon pour trouver l'ensemble A auquel est égal $f^{-1}(B)$, et ensuite montrer l'égalité d'ensembles.

Exercice 27

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Déterminer l'image réciproque de $\{0, 1\}$.

Corrigé

On a :

$$f^{-1}(\{0, 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1\}$$

De plus on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1} = 1 \\ &\Leftrightarrow x+1 = x^2+1 \\ &\Leftrightarrow x^2-x=0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \end{aligned}$$

Finalement : $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{-1, 0, 1\}$

Question 13

Comment montrer qu'une application f est injective ?

Méthode 27

Avec la définition de l'injectivité



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

f est injective si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

soit, de manière équivalente, si :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Autrement dit, f est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent (aucun ou un) par f .



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F est injective, on prend deux éléments quelconques x et y de E , on suppose que $f(x) = f(y)$ puis on cherche à montrer que $x = y$.

Exercice 28

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, 2x + y, x + 3y).$$

L'application f est-elle injective ?

Corrigé

Soit (x, y) et (x', y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x', y') &\Leftrightarrow \\ (x - y, 2x + y, x + 3y) &= (x' - y', 2x' + y', x' + 3y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x', y') &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = x' - y' \\ 2x + y = 2x' + y' \\ x + 3y = x' + 3y' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x' + y' \\ 3x - x' + y' = 2x' + y' \\ x + 3y = x' + 3y' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = y' \\ x = x' \\ x + 3y = x' + 3y' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \end{aligned}$$

donc : f est injective

Méthode 28

Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, en étudiant ses variations



RAPPEL DE COURS

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si f est strictement monotone sur I , f est injective sur I .

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Montrer que f est injective.

Corrigé

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle, et :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

f est injective

Question 14

Comment montrer qu'une application f est surjective ?

Méthode 29

En revenant à la définition de la surjectivité



RAPPEL DE COURS

Soit f une application de E dans F .

On dit que f surjective de E sur F si $f(E) = F$, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Autrement dit, f est surjective de E sur F si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f dans E .



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F est surjective, on prend un élément y quelconque de l'ensemble d'arrivée F , et on cherche à trouver un élément x de E tel que $f(x) = y$.

Exercice 30

On considère l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x + y + z, x - z).$$

L'application g est-elle surjective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$?

Corrigé

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = (a, b) &\Leftrightarrow (x + y + z, x - z) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x - z = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = a - x - z \\ x = b + z \end{cases} \end{aligned}$$

$$g(x, y, z) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = a - b - 2z \\ x = b + z \end{cases}.$$

Finalement, on a prouvé que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $g(x, y, z) = (a, b)$ admet une infinité de solutions (donc au moins une) dans $\mathbb{R}^3$, ce qui nous permet de conclure :

g est surjective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 31

Soient E, F, G trois ensembles non vides, f une application de E dans F , g une application de F dans G . On suppose que $g \circ f$ est surjective de E sur G .
Montrer que g est surjective de F sur G .

Corrigé

Soit $y \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective de E sur G , il existe $x \in E$ tel que :

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Or $f(x)$ appartient à F donc il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$.

Ainsi : g est surjective de F sur G

Question 15

Comment montrer qu'une application f n'est pas surjective ?

Méthode 30

En trouvant un élément n'ayant pas d'antécédent par l'application f



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de F qui n'admet pas d'antécédent par f .

Exercice 32

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, 2x + y, x + 3y).$$

L'application f est-elle surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$?

Corrigé

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = (a, b, c) \Leftrightarrow (x - y, 2x + y, x + 3y) = (a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ 2x + y = b \\ x + 3y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + y \\ 2a + 3y = b \\ a + 4y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + y \\ y = \frac{b - 2a}{3} \\ y = \frac{c - a}{4} \end{cases}.$$

Par conséquent, on peut constater que, si $\frac{b - 2a}{3} \neq \frac{c - a}{4}$, alors l'équation $f(x, y) = (a, b, c)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$, donc : f n'est pas surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$

Question 16

Comment montrer qu'une application f est bijective ?

Méthode 31

En utilisant la définition de la bijectivité



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

f est bijective si :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer la bijectivité d'une application f de E dans F , on peut utiliser la définition de la bijectivité. On prend un y quelconque dans F , puis on cherche à montrer l'existence d'un unique antécédent par f dans E en résolvant l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x dans E (on peut notamment procéder à un raisonnement par équivalence qui permettra de déterminer en même temps la bijection réciproque f^{-1}).

Exercice 33

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{array}$
Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Corrigé

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (a, b) &\Leftrightarrow (x + y, x - y) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + b}{2} \\ y = \frac{a - b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

donc :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (a, b)$$

donc :

f est bijective et sa bijection réciproque est
$f^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) \mapsto \left(\frac{a + b}{2}, \frac{a - b}{2} \right) \end{array}$

Méthode 32

En montrant que l'application f est injective et surjective



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

f est bijective si et seulement si f est injective et surjective de E sur F .



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F est bijective, on peut montrer que f est injective, et que f est surjective.

Exercice 34

Soit f et g deux applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que :

$$g \circ f = \text{id}$$

où id est l'application identité de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que f est bijective.

Corrigé

◇ *Injectivité.* Soit $(a, b) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

donc f est injective.

◇ *Surjectivité.* On a :

$$f(\llbracket 1, n \rrbracket) = \{f(k), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$$

Or, comme f est injective, $f(1), f(2), \dots, f(n)$ sont n éléments deux à deux distincts. Comme ils appartiennent tous à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et comme $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne contient que n éléments, on a donc :

$$\{f(1), f(2), \dots, f(n)\} = \llbracket 1, n \rrbracket$$

donc f est surjective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Finalement : f est bijective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

Méthode 33

Pour une fonction numérique réelle, en utilisant le théorème de la bijection



RAPPEL DE COURS

Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors elle établit une bijection de I sur $J = f(I)$ et J est un intervalle de même nature que I , dont les bornes sont les limites respectives de f aux bornes de I .



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application $f : I \rightarrow J$ (où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$) est bijective, on étudie sa monotonie et sa continuité.

Pour montrer qu'une application $f : I \rightarrow J$ (où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$) est bijective, on étudie sa monotonie et sa continuité.

Si on arrive à montrer qu'elle est continue et strictement monotone sur I , alors elle établit une bijection de I dans $J = f(I)$. Reste alors à vérifier que l'ensemble d'arrivée F est égal à $f(I)$.

Attention à bien citer les conditions du théorème : stricte monotonie et continuité sur I .

Exercice 35

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. f est-elle bijective ?

Corrigé

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, continue, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, +\infty[= \mathbb{R}^+$.

Ainsi : f est bijective

Question 17

Comment montrer qu'une application f n'est pas bijective ?

Méthode 34

En montrant que f n'est pas injective.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F n'est pas bijective, on peut montrer qu'elle n'est pas injective.

Exercice 36

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (0, x, y) \end{array}$. f est-elle bijective ?

Corrigé

On a :

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Or $(0, 0, 0) \neq (0, 0, 1)$, donc f n'est pas injective.

Ainsi : f n'est pas bijective

Méthode 35

En montrant que f n'est pas surjective



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F n'est pas bijective, on peut montrer qu'elle n'est pas surjective.

Exercice 37

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \\ n \mapsto \llbracket 1, n \rrbracket \end{array}$. f est-elle bijective ?

Corrigé

$\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ or $\emptyset$ n'admet pas d'antécédent par f .

Donc f n'est pas surjective.

Ainsi : f n'est pas bijective

1.6. Exercices corrigés

Exercice 38 – Des récurrences délicates

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (2k)! \geq [(n+1)!]^n$$

2) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 1$, $U_1 = \sqrt{3} + 1$ et :

$$\forall n \geq 2, U_n = 2U_{n-1} - 2U_{n-2}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2(\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 39 – Logique et quantificateurs

Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation et dire (en justifiant la réponse) si la proposition est vraie ou fausse :

- 1) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq |y|$
- 2) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq |y|$
- 3) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$
- 4) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N}, x \geq |y|$
- 5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \exists z \in \mathbb{R}, \ln y = xz^2$

Exercice 40 – Fonction caractéristique

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ telle que : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

Soient A et B deux parties de E , f et g leurs fonctions caractéristiques.

Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

- 1) $1 - f$;
- 2) fg ;
- 3) $f + g - fg$.

Exercice 41 – Irrationalité de racine de 2

On rappelle que l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des réels que l'on peut écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q avec $q \neq 0$. Il sera parfois judicieux de choisir p et q tels que le quotient $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

Nous allons montrer dans ce court exercice que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel en procédant par l'absurde à plusieurs reprises.

Supposons donc que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{2}$ est strictement positif, il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et tel que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

- 1) Montrer que p^2 est nécessairement un nombre entier pair.
- 2) Montrer, en procédant par l'absurde, que p est nécessairement un nombre entier pair.
- 3) En déduire que q est un nombre entier pair.
- 4) Aboutir à une contradiction puis conclure.

Exercice 42 – Résolution d'une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Indication : Procéder par analyse-synthèse. Si une fonction f vérifie cette équation, commencer par calculer $f(0)$, puis dériver l'équation par rapport à x (avec y fixé).

1.7. Corrigés des exercices

Exercice 38 – Des récurrences délicates

⚙️ L'œil du coach

Des récurrences coriaces si on ne pose pas bien le raisonnement au brouillon. La seconde récurrence demande une bonne maîtrise en calcul et en trigonométrie.

- 1) Montrons le par récurrence en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n) : \ll \prod_{k=1}^n (2k)! \geq [(n+1)!]^n \gg.$$