Colles
corrigées et commentées

ECG-1

Maths appliquées

*S'entraîner aux concours dès la **Sup***

ellipses

Olivier Arrigoni

Colles

corrigées et commentées

ECG-1

Maths appliquées

Olivier Arrigoni

ellipses

Collection

Colles

corrigées et commentées



ISBN 9782340-100534

Dépôt légal : mars 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2025
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Les interrogations orales (appelées colles) en CPGE constituent un outil de progression exceptionnel pour les étudiants de ces classes. Leur format pédagogique, un professeur interrogeant trois étudiants pendant une heure à l'oral, n'a pas son pareil dans les autres formations.

Leur rôle est multiple et réellement tourné vers le travail sur les difficultés personnelles de chaque étudiant. Tout d'abord, cette interrogation doit prioritairement s'intéresser au bon apprentissage et à la bonne maîtrise du cours. Ensuite, on vérifie que les méthodes présentées en cours ou en TD (exercices) sont bien comprises et appliquées. Enfin, pour les étudiants ayant passé ces deux premiers caps, on envisage des exercices de réflexion et d'approfondissement du programme.

C'est dans cet esprit que s'inscrit cet ouvrage. Il est organisé en 30 chapitres, correspondant à 30 semaines de colles. Chacun est consacré à une partie très précise du programme. La division entre les programmes de chaque semestre est clairement identifiée. Une troisième partie est consacrée au programme d'informatique en langage Python, qui prend une part désormais importante dans le programme de mathématiques appliquées en ECG. Ceci étant, le programme d'informatique fait autant partie des deux semestres et même dans les parties de mathématiques, quelques applications en informatique sont proposées.

Chaque chapitre est généralement divisé en deux à trois sections, pour encore mieux cibler les notions. Chacune de ces sections est organisées de la façons suivante :

- Des rappels de cours, présentés sous forme de points élémentaires, qui explicitent les résultats du programme de la classe de ECG1 qui sont visés.
- Des énoncés d'exercices de **colle**. Ces énoncés sont volontairement cours, avec peu de questions enchainées en général, pour viser une méthode ou une notion précise. Leurs longueurs sont variables, mais on peut considérer que deux à trois exercices constituent en soit une heure d'interrogation.

- Chaque énoncé est suivi de sa **solution**, qui détaille tout ce qu'il était nécessaire de faire pour résoudre l'exercice. En ce sens, la solution est accompagnée d'encart ayant chacun son rôle.
  - Des **rappels** de cours, qui peuvent renvoyer au début de la section ou rappeler des résultats élémentaires antérieurs à la classe mais non moins nécessaires.
  - Des **méthodes**, qui mettent en lumière les techniques et processus pour résoudre les questions posées par l'exercice.
  - Des **conseils**, pour éviter les pièges ou signaler certaines voies qui ne seraient pas efficaces pour répondre aux problèmes.
  - Enfin, des **remarques**, qui peuvent être des ouvertures ou évoquer des liens avec d'autres points du programme.

La progression du programme qui est employée est arbitraire, mais elle prend garde à suivre une difficulté croissante sur l'ensemble de l'année de mathématiques appliquées en ECG1. Elle cherche également à enchainer les parties du programme portant sur un même thème.

Table des matières

I Programme du premier semestre 1

1 Fonctions polynomiales 3

2 Fonctions usuelles 13

3 Fonctions ln, exp et puissances 23

4 Suites usuelles 33

5 Logique et raisonnement 41

6 Ensembles et applications 49

7 Calcul matriciel 57

8 Inverse matriciel et système linéaire 65

9 Théorie des graphes 75

10 Statistiques univariées 83

11 Dénombrement 91

12 Probabilités sur un univers fini 99

13 Comportement des suites numériques 107

14 Limites et continuité des fonctions 117

II Programme du second semestre 127

15 Dérivabilité des fonctions 129

16 Étude des fonctions dérivables 137

17 Calcul intégral 145

18 Équations différentielles 155

19 Séries numériques 163

20 Probabilités en univers infini 171

21 Variables aléatoires 179

22 Variables aléatoires usuelles 187

23 Espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ 195

24 Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ 203

25 Notion de rang 211

III Programme d'informatique 217

26 Programmation de base 219

27 Listes en Python 227

28 Algorithmes fondamentaux 235

29 Graphes en Python 243

30 Algorithmes numériques 251

Partie I

Programme du premier semestre

Chapitre 1

Fonctions polynomiales

1.1 Trinômes du second degré

- On appelle fonction trinôme du second degré toute fonction donnée par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

- On appelle **discriminant** du trinôme ci-dessus le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Le trinôme du second degré admet les racines suivantes (solutions de $f(x) = 0$) :
  - Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racines ;
  - Si $\Delta = 0$, f admet une seule racine (qualifiée de double) qu'est $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
  - Si $\Delta > 0$, f admet deux racines distinctes que sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Une fonction trinôme du second degré admet pour factorisation :
  - Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ n'est pas factorisable ;
  - Lorsque $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$;
  - Lorsque $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Une fonction trinôme du second degré admet pour signe :
  - Lorsque $\Delta < 0$, elle est de signe constant, celui de a et ne s'annule jamais ;
  - Lorsque $\Delta = 0$, elle est de signe constant, celui de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
  - Lorsque $\Delta > 0$, elle est du signe de a sauf pour $x \in [x_1, x_2]$ et s'annule en x_1 et x_2 (ses racines).
- Si x_1 et x_2 sont les racines (éventuellement double, donc répétée deux fois) du trinôme f, on a les **relations coefficients racines** suivantes

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

- La fonction f est monotone sur chacun des intervalles $I_1 = \left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et $I_2 = \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.
  - Lorsque $a > 0$, elle est décroissante sur I_1 et croissante sur I_2.
  - Lorsque $a < 0$, elle est croissante sur I_1 et décroissante sur I_2.

Colle 1

Résoudre l'équation $(E) : x^4 - 43x^2 + 432 = 0$.

Solution : Posons $X = x^2$, de sorte que l'équation donnée soit équivalente à (E') : $X^2 - 43X + 432 = 0$.

Conseil

Lorsque les puissances d'une équation polynomiale sont toutes multiples d'un entier k, on pose $X = x^k$ comme inconnue auxiliaire.

On calcule le discriminant $\Delta = 43^2 - 4 \times 432 = 121$ de (E'). Cette équation du second degré comporte deux solutions que sont $X_1 = \frac{43-\sqrt{121}}{2} = \frac{43-11}{2} = 16$ et $X_2 = \frac{43+11}{2} = 27$. Pour revenir à l'équation de départ (E), on sait désormais que celle-ci est équivalente à $x^2 = 16$ ou $x^2 = 27$.

Rappel

Lorsque a est positif, $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$.

On a finalement $(E) \iff x = 4$ ou $x = -4$ ou $x = 3\sqrt{3}$ ou $x = -3\sqrt{3}$. On conclut sur $\mathcal{S} = \{-3\sqrt{3}; -4; 4; 3\sqrt{3}\}$.

Colle 2

Soit m un réel différent de 2 et soit $p(x) = (m-2)x^2 + (2m+1)x + m + 2$. Déterminer selon m les racines de p.

Solution : On commence par calculer le discriminant du trinôme p, dépendant de m :

$$\Delta(m) = (2m+1)^2 - 4(m+2)(m-2) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 16 = 4m + 17.$$

On détermine alors, selon le signe de $\Delta(m)$, l'existence et la valeur des racines.

Méthode

Lorsqu'un paramètre apparaît dans un exercice (ici m), on ne distingue pas d'emblée les cas. On mène la méthode générale tant que c'est possible de le faire.

(a) Lorsque $\Delta(m) < 0$, soit $m < -\frac{17}{4}$, le trinôme p n'admet pas de racines.

(b) Lorsque $\Delta(m) = 0$, soit $m = -\frac{17}{4}$, le trinôme p admet une seule racine (double) qui est
$$x_0 = -\frac{2m+1}{2(m-2)} = -\frac{2m+1}{2m-4}.$$

(c) Lorsque $\Delta(m) > 0$, soit lorsque $m > -\frac{17}{4}$, le trinôme p admet deux racines réelles que sont
$$x_1 = \frac{-(2m+1) - \sqrt{4m+17}}{2(m-2)} \quad ; \quad x_2 = \frac{-(2m+1) + \sqrt{4m+17}}{2(m-2)}.$$

Colle 3

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré (avec $a \neq 0$).

1. Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors f admet deux racines distinctes de signes contraires.
2. On fixe $a = 1$ dans cette question et on suppose que f admet comme racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues si elles sont doubles). Montrer que :
   (a) x_1 et x_2 sont positifs si et seulement si b est négatif et c est positif.
   (b) x_1 et x_2 sont négatifs si et seulement si b et c sont positifs.
   (c) x_1 et x_2 sont de signes contraires si et seulement si c est négatif.

Solution :

1. Si a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant -4ac > 0$ et f admet bien deux racines distinctes x_1 et x_2. Dans un tel cas, étudions les signes de x_1 et x_2 par leur produit.

Méthode

On utilise les relations coefficients racines lorsqu'on nous demande des informations sur les coefficients a, b, c en fonction des racines x_1 et x_2.

Selon les relations coefficients racines, on a $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ et $\frac{c}{a}$ est négatif par hypothèse. Donc x_1 et x_2 sont de signes contraires.

2. On poursuit avec les relations coefficients racines.
   (a) Si x_1 et x_2 sont positifs, alors $c = \frac{c}{a} = x_1x_2$ est positif et $b = -(x_1 + x_2)$ est négatif. Réciproquement, avec ces mêmes relations, si c est positif alors x_1 et x_2 sont de même signe et puisque b est négatif, x_1 et x_2 ne peuvent être que positifs tous les deux.
   (b) De la même manière, si x_1 et x_2 sont négatifs, alors $c = x_1x_2$ est positif et $b = -(x_1 + x_2)$ est positif. Réciproquement, si c est positif alors x_1 et x_2 sont de même signe et puisque b est positif, x_1 et x_2 sont nécessairement négatifs.
   (c) Si x_1 et x_2 sont de signes contraires, alors $c = x_1x_2$ est négatif. La réciproque est identique.

Colle 4

Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

Solution :

Méthode

Il est possible de substituer avec la dernière équation, mais on peut montrer une méthode plus générale mettant en jeu les relations coefficients racines.

On va exprimer le produit xy à l'aide des données.

Méthode

Dans un système (non linéaire) à deux inconnues aux expressions polynomiales, on peut exprimer la somme et le produit pour interpréter en terme de trinôme.

On a $xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - (x^2+y^2)\right) = -21$. Ainsi, on obtient l'équivalence

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x + y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = -21 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

Le dernier système est lui-même équivalent au fait que x et y sont les racines du trinôme $p(t) = t^2 - 4t - 21$. Les racines de ce trinôme sont 7 et -3, on en déduit donc les solutions du système

$$\mathcal{S} = \{(7, -3); (-3; 7)\}$$

1.2 Fonctions polynomiales de degrés quelconques

- Pour tout entier n, la fonction définie par $p(x) = x^n$ est dérivable avec $p'(x) = nx^{n-1}$.
- La fonction p est de signe positif sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair, du signe de x lorsque n est impair.
- Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de p sont $+\infty$ si n est pair, $-\infty$ et $+\infty$ (respectivement) pour n impair.
- On appelle **fonction polynomiale** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel, $a_0, ..., a_n$ les **coefficients** réels du polynôme avec $a_n \neq 0$.
- Dans ce cas n s'appelle le **degré** de la fonction polynomiale f noté $\deg(f)$. Par convention, la fonction nulle (polynôme nul) est polynomiale avec $\deg(0)=-\infty$.
- L'ensemble de toutes les fonctions polynomiales est noté $\mathbb{R}[x]$, celui des fonctions polynomiales de degré au plus n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.
- Un terme de la forme $a_k x^k$ est appelé **monôme** de degré k et a_k s'appelle le **coefficient** de degré k.
- Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients, degré par degré. On parle d'**unicité** des coefficients d'une fonction polynomiale.
- Pour toutes fonctions polynomiales f et g, on a

$$\deg(f+g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g)) \quad ; \quad \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

- Toute fonction polynomiale f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

- La limite d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est égale à celle de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

- On appelle **racine** de f tout réel a vérifiant $f(a) = 0$.
- a est racine de f si et seulement si $f(x)$ est **factorisable** par $(x-a)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction polynomiale h telle que $\deg(h) = \deg(f) - 1$ vérifiant

$$f(x) = (x-a)h(x).$$

- Un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Colle 5

Étudier les variations et les limites aux bornes de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 1$.

Solution : La fonction f est dérivable car polynomiale, avec

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x - 5 = 3x^2 - 8x - 5.$$

f' est un trinôme du second degré, dont on peut donner le signe. Son discriminant est $\Delta = 124$ et ses racines sont $x_1 = \frac{8-\sqrt{124}}{6} = \frac{4-\sqrt{31}}{3}$ et $x_2 = \frac{4+\sqrt{31}}{3}$. f' est positive (du signe de $3 > 0$) sauf entre ses racines.

Rappel

Le signe de la fonction dérivée donne les variations de la fonction.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Méthode

Pour une fonction polynomiale, on applique la règle du monôme de plus haut degré pour ses limites en $\pm\infty$.

Les limites sont $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Colle 6

Résoudre l'équation $(E) : -6x^3 + 3x + 3 = 0$.

Solution : On commence par chercher une racine évidente, en commençant par tester les petits entiers. Il est manifeste que $x = 1$ est racine ($-6 \times 1^3 + 3 \times 1 + 3 = 0$), on peut donc factoriser le membre de gauche par $(x - 1)$.

Méthode

La recherche d'une racine évidente a permet de factoriser par $x-a$ et donc de trouver un facteur de degré diminué.

Il existe des coefficients a, b, c tels que $-6x^3+3x+3 = (x-1)(ax^2+bx+c)$. En développant le membre de droite, on obtient

$$-6x^3 + 3x + 3 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Rappel

L'utilisation de l'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale s'appelle **l'identification des coefficients**.

Par identification des coefficients, on obtient les relations $a = -6, b-a = 0, c-b = 3, -c = 3$, ce qui donne $a = -6, b = -6, c = -3$. A ce stade, on a

$$(E) \Leftrightarrow (x-1)(-6x^2 - 6x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -6x^2 - 6x - 3 = 0.$$

Méthode

On fait ici usage de la règle du produit nul : $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

La dernière équation est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = -36 < 0$, elle n'admet donc pas de solutions. Ainsi, 1 est la seule solution de (E) :

$$\mathcal{S} = \{1\}.$$

Colle 7

Soit P une fonction polynomiale de degré 4, dont le coefficient de plus haut degré est 1, admettant 2 et -2 pour racines ainsi que deux autres racines a et b telles que $ab = 7$ et $a + b = \sqrt{2}$. Déterminer $P(x)$.

Solution : Étant donné ses racines et son coefficient dominant, l'expression factorisée de $P(x)$ est

$$P(x) = 1(x-2)(x+2)(x-a)(x-b).$$

Rappel

Lorsqu'une fonction polynomiale admet autant de racines $x_1, ..., x_n$ que son degré n, elle admet pour factorisation

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

où a est le coefficient de plus haut degré (dominant).

Il faut alors développer cette expression, en tenant compte que

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - \sqrt{2}x + 7.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 7) \\ &= x^4 - \sqrt{2}x^3 + 5x^2 + 2\sqrt{2}x - 14. \end{aligned}$$

Colle 8

Factoriser l'expression $A(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 3x - 6$, puis résoudre $A(x) \geqslant 0$.

Solution : On cherche encore des solutions évidentes : -1 et 2 en sont. $A(x)$ est donc factorisable par $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$. On pratique la factorisation par la division euclidienne.

Rappel

Le quotient de la division euclidienne est le facteur résultant de la factorisation. On trouve le même résultat par la méthode d'identification.

$$\begin{array}{rccccc|c} & x^4 & -x^3 & -x^2 & -3x & -6 & x^2 - x - 2 \\ \cline{6-6} - & (x^4 & -x^3 & -2x^2) & & & x^2 + 3 \\ & & & 3x^2 & -3x & -6 & \\ - & & & (3x^2 & -3x & -6) & \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

On obtient donc $A(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$, le terme $x^2 + 3$ n'étant pas factorisable. Pour ce qui est de la résolution de $A(x) \geqslant 0$, cette inéquation équivaut à $x^2 - x - 2 \geqslant 0$, dans la mesure où le facteur $x^2 + 3$ est strictement positif (il ne change pas le signe).

La dernière inéquation revient à étudier le signe du trinôme, qui est positif en dehors de ses racines, ce qui permet de conclure que

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[.$$

Méthode

Pour toute expression factorisée, il est possible d'envisager un tableau de signe pour connaître le signe de l'expression. Il n'est pas nécessaire ici, étant donné les constats qu'on fait.

Colle 9

1. Soit p un polynôme de degré trois de racines distinctes a, b, c, de coefficient de plus haut degré 1. Exprimer l'expression développée de $p(x)$.
2. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} a+b+c = -3 \\ ab+bc+ac = -16 \\ abc = -12 \end{cases}$.

Solution : L'ensemble de la résolution de cet exercice est lié aux *relations coefficients-racines*, qui existent aussi pour les polynômes de degrés supérieurs à 2.

1. On sait déjà que l'expression factorisée de $p(x)$ est $(x-a)(x-b)(x-c)$. Après développement, on obtient

$$p(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc.$$

2. Si a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} a+b+c = -3 \\ ab+bc+ac = -16 \\ abc = -12 \end{cases}$, alors ce sont les racines de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12$. Cela revient donc à chercher les racines de ce polynôme p.

Méthode

Lorsque l'on a des expressions *symétriques* en $a, b, c...$ c'est-à-dire invariante en permutant les variables, il faut interpréter $a, b, c, ...$ comme des racines d'un polynôme.

On remarque que $x = 1$ est racine évidente, on procède à une factorisation par division euclidienne

$$\begin{array}{rcccc|c} & x^3 & +3x^2 & -16x & +12 & x-1 \\ \hline - & (x^3 & -x^2) & & & x^2+4x-12 \\ & & 4x^2 & -16x & +12 & \\ - & & (4x^2 & -4x) & & \\ & & & -12x & +12 & \\ - & & & (-12x & +12) & \\ & & & & 0 & \end{array}$$

Conseil

On invite le lecteur à faire la méthode d'identification, pour contrôler le résultat de la division.

On en déduit $p(x) = (x-1)(x^2+4x-12)$. Les racines de $x^2+4x-12$ sont après calculs $x_1 = -6$ et $x_2 = 2$. Ainsi, a, b, c sont dans n'importe quel ordre $2, 1$ et -6. Réciproquement, on vérifie que tout triplet composé de $2, 1$ et -6 est bien solution du système. On conclut sur l'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \{(2,1,-6);(-6,2,1);(1,-6,2);(2,-6,1);(-6,1,2);(1,2,-6)\}.$$

Chapitre 2

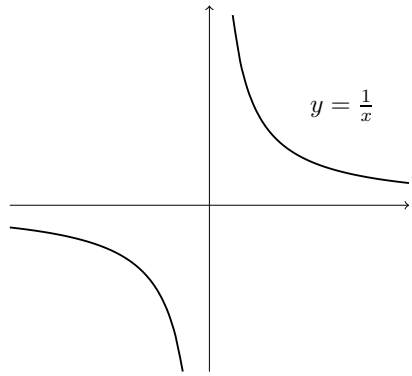
Fonctions usuelles

2.1 Fonctions de base

- On appelle **fonction inverse** la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $i(x) = \frac{1}{x}$.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- On admet ses limites aux bornes

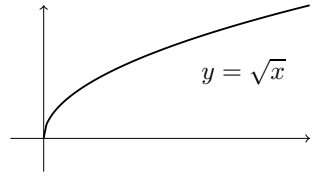
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

  Ces limites restent valables pour toute quantité $\frac{1}{X}$ (avec X dépendant de x) lorsque $X \to -\infty, 0^-, 0^+, +\infty$.

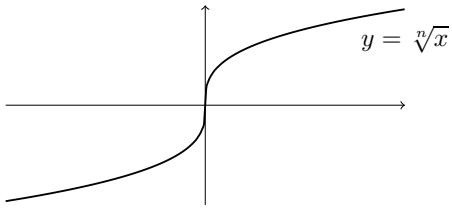


- La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ avec $i'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- Pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I avec $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$.
- Pour tout nombre réel positif x, on appelle **racine carrée** de x, noté $\sqrt{x}$, l'unique réel positif vérifiant $(\sqrt{x})^2 = x$.

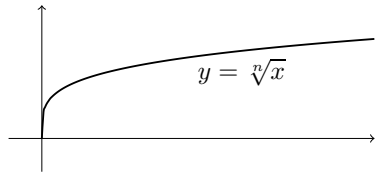
- La **fonction racine carrée** $r : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$, strictement croissante, dont on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.



- La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs strictement positives, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable avec $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Pour tout entier n, on parle de **racine n-ième** d'un nombre réel x selon les cas suivants :
  - Lorsque n est pair, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique nombre réel **positif** vérifiant $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
  - Lorsque n est impair, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique nombre réel vérifiant $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- La fonction racine n-ième $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur son ensemble de définition.
- On a toujours $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ pour n impair.



n impair.



n pair.

Colle 1

Pour tout réel x différent de -1, on pose $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+1}$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f, puis ses limites aux bornes.
3. Etudier le signe et les limites en $\pm\infty$ de $f(x) - (ax + b)$. Quelle en est la conséquence graphique ?

Solution :

1. On réduit au même dénominateur pour pouvoir identifier $f(x)$. On a

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(b+a)x+b+c}{x+1}.$$

Conseil

Il serait vain de chercher à décomposer $f(x)$ sous la forme souhaitée. C'est sur l'expression de droite que l'on peut faire du calcul.

Pour avoir l'égalité avec $f(x)$, il faut et il suffit par identification des coefficients des numérateurs que $a = 1, b + a = 3$ et $b + c = -1$. On trouve $a = 1, b = 2$ et $c = -3$, d'où

$$f(x) = x + 2 - \frac{3}{x+1}.$$

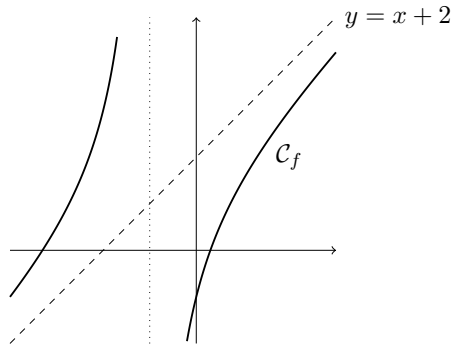
2. f est bien dérivable sur son ensemble de définition et on a avec la précédente expression $f'(x) = 1 + \frac{3}{(x+1)^2}$. f' étant strictement positive, f est croissante sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$.

Rappel

On parle de variation sur un intervalle, pas sur la réunion directement.

Les limites en $\pm\infty$ sont celles de la fonction affine $x \mapsto x + 2$, puisque $\frac{3}{x+1}$ tend vers 0. En 1^- et 1^+, la limite est celle de $-\frac{3}{x+1}$, qui est $+\infty$ et 1^- et $-\infty$ en 1^+.

3. $f(x) - (x+2) = -\frac{3}{x+1}$ est du signe opposé à $x+1$, donc positif pour $x < -1$ et négatif pour $x > -1$. La limite en $\pm\infty$ est 0. Cela signifie que la courbe de f $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus puis en dessous de $y = x + 2$ et s'en rapproche en $\pm\infty$. On parle d'*asymptote oblique*.



Remarque

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe.

Colle 2

Résoudre $(E) : \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = 3$ et $(I) : \sqrt{4x-2} \leqslant \sqrt{5-x}$.

Solution : Disons déjà que (E) est définie sur $[0; +\infty[$ condition nécessaire et suffisante pour la définition de $\sqrt{x+2}$ et $\sqrt{x}$. (E) équivaut à $\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{x}$.

Conseil

Lorsque des racines carrées apparaissent plusieurs fois dans une équation, il peut être préférable de les séparer pour la résolution.

Partant de là, on peut élever au carré, mais avec précaution quant à l'équivalence qui en résulte.

Rappel

On rappelle que $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ pour a et b de même signe seulement.

On a donc $(E) \Leftrightarrow x + 2 = x - 6\sqrt{x} + 9$ **et** $3 - \sqrt{x} \geqslant 0$, puis

$$(E) \Leftrightarrow 6\sqrt{x} = 7 \text{ et } x \leqslant 9 \Leftrightarrow x = \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}.$$

Rappel

Pour tout $a \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2$.

D'où finalement $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{\frac{49}{36}\right\}$. Pour ce qui est de l'inéquation (I), elle est définie pour $4x - 2 \geqslant 0$ et $5 - x \geqslant 0$, soit x dans $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$. Dans ces cas-là, on passe à la résolution en écrivant

$$(I) \Leftrightarrow 4x - 2 \leqslant 5 - x \Leftrightarrow 5x \leqslant 7 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{7}{5}$$

Rappel

Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante, on a $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leqslant b$.

On peut conclure que $\mathcal{S}_{(I)} = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{5}\right]$.

Colle 3

Réaliser l'étude complète de la fonction $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}$.

Solution : Commençons par l'ensemble de définition. f est définie pour $x + 3 \geqslant 0$ et $x - 3 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 3$. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = [3; +\infty[$.

Méthode

L'ensemble de définition d'une fonction est déterminé par l'ensemble des contraintes inhérentes à l'expression qui définit $f(x)$.

Sur $]-3; +\infty[$, f est dérivable avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}.$$

Il est clair que le numérateur est négatif, tant on a $\sqrt{x-3} \leqslant \sqrt{x+3}$ pour tour réel $x \geqslant 3$. Ainsi f est strictement décroissante sur son ensemble de définition. Il reste à trouver la limite de f en $+\infty$. L'étude par opérations donne un forme indéterminée du type $(+\infty) - (+\infty)$.

Méthode

On utilise dans ce cas applique l'**expression conjuguée** de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, qui est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}} \\ &= \frac{x+3-(x-3)}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}} = \frac{6}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}}. \end{aligned}$$

Avec cette expression, il est clair que f tend vers 0 en $+\infty$, puisque les deux racines du dénominateur tendent vers $+\infty$.

Colle 4

Résoudre $(E) : (x^2 - 3x - 5)^4 = 16$ et $(I) : \sqrt[3]{3 - 2x} \leqslant 4$.

Solution : (E) s'écrit aussi $(x^2 - 3x - 5)^4 = 2^4$, donc

$$(E) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5 = 2 \text{ ou } x^2 - 3x - 5 = -2.$$

Rappel

Pour $a > 0$ et n pair, on a $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$.

Après résolution de chacune des équations du second degré en jeu, on trouve que la première admet pour solutions $\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$ et la seconde $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, donc

$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \frac{3-\sqrt{37}}{2}; \frac{3-\sqrt{21}}{2}; \frac{3+\sqrt{21}}{2}; \frac{3+\sqrt{37}}{2} \right\}.$$

Pour (I), cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la racine cubique l'est. On a alors

$$(I) \Leftrightarrow 3 - 2x \leqslant 4^3 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{4^3 - 3}{2}$$

Rappel

Le premier passage est justifié par le fait que la fonction racine cubique (comme la fonction cube) est strictement croissante.

On en déduit $\mathcal{S}_{(I)} = \left[\frac{61}{2}; +\infty\right[$.

2.2 Fonctions spéciales

- Pour tout réel x, on appelle **valeur absolue** de x, noté $|x|$, le nombre valant

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

  C'est aussi le plus grand des deux nombres x et $-x$.

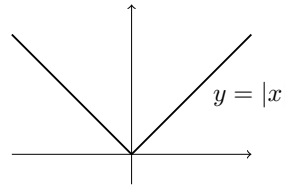
- Pour tous réels a et b, on a

$$|ab| = |a|\,|b| \quad ; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0) \quad ;$$

  et les deux **inégalités triangulaires** sont

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \quad ; \quad ||a| - |b|| \leqslant |a-b| .$$

- Pour des réels a et b, on appelle **distance** ou encore écart absolu le nombre $|a-b|$ (ou $|b-a|$).

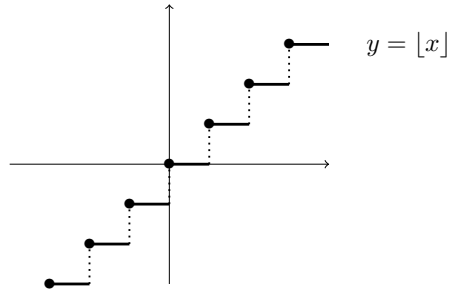


- Pour tout nombre réel x, on appelle **partie entière** de x, noté $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier relatif vérifiant

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

  C'est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

- Pour tout entier relatif n, la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur $[n; n+1[$, valant n. De plus, cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.



Colle 5

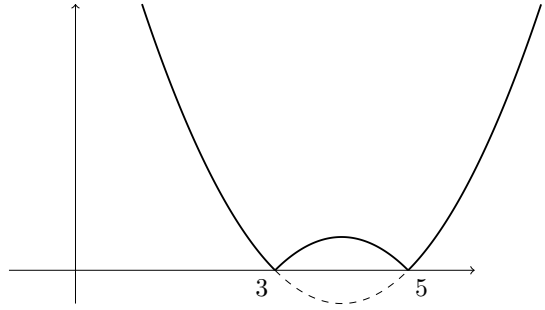
Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \left|x^2 - 8x + 15\right|$.

Solution : Il faut prioritairement étudier le signe de $x^2 - 8x + 15$. C'est un trinôme dont les racines sont 3 et 5, il est donc positif à l'extérieur de celles-ci et négatif entre.

Méthode

Étudier une quantité comportant une valeur absolue implique d'étudier son signe, pour l'exprimer sans valeur absolue.

De là, on en déduit que la courbe représentative de f est la même que celle du trinôme en question, sauf entre 3 et 5, où la courbe obtenue est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de celle du trinôme. On obtient donc



Colle 6

Résoudre $(E) : |x^2 + 3x + 1| = |2 - 5x|$ et $(I) : |4x - 1| \leqslant 3$.

Solution : On a $(E) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 2 - 5x$ ou $x^2 + 3x + 1 = 5x - 2$.

Rappel

Pour tous A et B, on a $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ ou $A = -B$.

La première équation $x^2+8x-1 = 0$ admet pour solutions $\frac{-8\pm\sqrt{68}}{2}$ et la seconde $x^2-2x+3 = 0$ n'admet pas de solution ($\Delta = -8 < 0$). On conclut que $\mathcal{S}_{(E)} = \{-4 - \sqrt{17}; -4 + \sqrt{17}\}$. On a $(I) \Leftrightarrow -3 \leqslant 4x - 1 \leqslant 3$.