SAVOIRS PHYSIQUE ACTUELS

HYDRODYNAMIQUE PHYSIQUE

3e ÉDITION



ÉTIENNE GUYON,
JEAN-PIERRE HULIN
ET LUC PETIT

CNRS ÉDITIONS EDP SCIENCES

Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin
et Luc Petit

Hydrodynamique physique

3e édition

Préface de
John Hinch

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS Éditions

Illustration de couverture : Visualisation de filets de colorant dans un filament de tourbillon (courtoisie P. Petitjeans).

Imprimé en France.

© **2012, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS Éditions, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-0561-7
ISBN CNRS Éditions 978-2-271-07601-4

Préface

La mécanique des fluides a une longue histoire, mais elle reste un sujet jeune avec des découvertes récentes et de nombreuses applications qui touchent à la vie courante. Cette histoire est un défilé de grands noms de la Science : au XVIII^{e} siècle les Bernoulli, Euler, Lagrange ; au XIX^{e}, Cauchy, Navier, Stokes, Helmholtz, Rayleigh, Reynolds, et Lamb ; au XX^{e} Couette, Prandtl, G.I. Taylor et Kolmogorov entre autres.

Dans l'environnement naturel, nous pouvons nous fier aux prévisions météorologiques à cinq jours et aux alertes sur les tornades ; la réussite de longue date du calcul des marées s'étend aujourd'hui à la prédiction des tsunamis ; la connaissance des circulations océaniques et atmosphériques est appliquée à des problèmes tels que la pollution, le trou d'ozone et les changements climatiques. À l'intérieur de la Terre, la mécanique des fluides joue un rôle crucial dans la convection du manteau, les volcans et leurs nuages de poussière, les gisements pétrolifères ainsi que pour l'évaluation de la possibilité de séquestrer le CO_2.

La mécanique des fluides joue aussi un rôle clé dans nombre d'industries : la conception des avions est partie d'idées simples au début du XX^{e} siècle pour aboutir à la fin du siècle au développement d'ailes à faible trainée équipées d'ailettes et de fuselages améliorés. Dans le même temps, le bruit des réacteurs a été réduit de façon spectaculaire grâce au principe du double flux : une turbine concentrique de grand diamètre crée un écoulement froid masquant le jet rapide central. Des fluides simples ou complexes sont utilisés pour produire du verre et d'autres matériaux, ainsi que dans le génie chimique et les industries agroalimentaires.

Récemment, les chercheurs en mécanique des fluides se sont intéressés à la microfluidique qui permet de multiples analyses simultanées d'un petit échantillon biologique, ainsi qu'à l'impression à jet d'encre où le mouillage intervient sur des distances très petites, à la conception de bâtiments à haute efficacité énergétique impliquant la convection naturelle et au contrôle des instabilités et de la turbulence.

Une telle profusion d'idées et d'applications pose un défi quant à l'enseignement du sujet. Certaines notions doivent être réservées à des cours spécialisées de Masters. Mais l'enseignement de base doit aider les étudiants à progresser vers des sujets plus avancés, présents et futurs.

Les auteurs de ce livre ont adopté, à mon sens, l'approche et le style qui intéresseront et formeront les étudiants, les préparant ainsi pour le futur. Je crains que certaines des autres approches risquent fort d'échouer de ce point de vue. Ainsi, certains cours de formation d'ingénieurs dépendent trop fortement des simulations numériques, ce qui n'est pas sans risque dans le cas d'applications nouvelles. Les enseignements de caractère plus mathématique se heurtent souvent à des difficultés considérables en cherchant à prouver si les équations gouvernant les systèmes étudiés ont ou n'ont pas de solution, même dans le cas apparemment simple de l'équation de Navier Stokes (un des problèmes non résolus du prix Clay). L'approche de ce livre est ancrée dans les expériences et la réalité concrète. La structure de la présentation choisie guidera les lecteurs vers une vision en profondeur des sujets abordés.

Le domaine de la mécanique des fluides a, à mon avis, largement bénéficié au cours de ces trente dernières années des contributions des physiciens français tels que les auteurs de ce livre : ils ont apporté une approche renouvelée du sujet, des techniques expérimentales nouvelles, un sens des aspects pratiques et une ouverture vers les disciplines scientifiques voisines. Ce livre est un témoignage de cette dynamique.

John Hinch
Professeur à l'Université de Cambridge
Fellow de Trinity College

Table des matières

Introduction **xiii**

1 Physique des fluides **1**

1.1 L'état liquide 1

1.1.1 Les différents états de la matière : systèmes modèles et milieux réels 2

1.1.2 La limite solide-liquide : une frontière parfois floue . . . 7

1.2 Coefficients macroscopiques de transport 8

1.2.1 Conductivité thermique 9

1.2.2 Diffusion de masse 17

1.3 Modèles microscopiques des coefficients de transport 19

1.3.1 La marche au hasard 19

1.3.2 Coefficients de transport des gaz parfaits 22

1.3.3 Phénomènes de transport diffusif dans les liquides . . . 27

1.4 Effets de surface et tension superficielle 29

1.4.1 La tension superficielle 29

1.4.2 Forces de pression associées à la tension superficielle . . 32

1.4.3 Étalement de gouttes sur une surface – notion de mouillage 34

1.4.4 Influence de la gravité 36

1.4.5 Quelques méthodes de mesure de la tension superficielle 41

1.4.6 Instabilité de Rayleigh-Taylor 43

1.5 Diffusion de rayonnements dans les fluides 46

1.5.1 Quelques sondes de la structure des liquides 46

1.5.2 Diffusion élastique et inélastique 48

1.5.3 La diffusion élastique et quasi élastique de la lumière : un outil d'étude de la structure et du transport diffusif dans les liquides 52

1.5.4 Diffusion inélastique de la lumière dans les liquides . . . 55

1.6 Coefficients de transport de fluides 59

2 Transport de la quantité de mouvement et régimes d'écoulement **61**
2.1 Transports diffusif et convectif de quantité de mouvement dans les écoulements 62
2.1.1 Diffusion et convection de la quantité de mouvement : deux expériences illustratives 62
2.1.2 Transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement – introduction de la viscosité 64
2.2 Modèles microscopiques de la viscosité 68
2.2.1 Viscosité des gaz 68
2.2.2 Viscosité des liquides 70
2.2.3 Simulation numérique des trajectoires de molécules dans un écoulement 73
2.3 Comparaison entre les mécanismes de diffusion et de convection 74
2.3.1 Le nombre de Reynolds 74
2.3.2 Transports convectif et diffusif de masse ou d'énergie thermique 76
2.4 Description de différents régimes d'écoulement 79
2.4.1 Écoulements dans un tube cylindrique : l'expérience de Reynolds 80
2.4.2 Écoulement derrière un cylindre 80
2.4.3 Écoulement derrière une sphère 83

3 Cinématique des fluides **85**
3.1 Description du mouvement d'un fluide 85
3.1.1 Échelles de longueur et hypothèse de continuité 85
3.1.2 Descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement d'un fluide 86
3.1.3 Accélération d'une particule de fluide 87
3.1.4 Lignes et tubes de courant, trajectoires, lignes d'émission 89
3.2 Déformations dans les écoulements 90
3.2.1 Décomposition des variations du champ de vitesse au voisinage d'un point 91
3.2.2 Composante symétrique du tenseur des taux de déformation : déformation pure 92
3.2.3 Composante antisymétrique du tenseur des taux de déformation : rotation pure 96
3.2.4 Application 98
3.2.5 Cas des grandes déformations 100
3.3 Conservation de la masse dans un fluide en écoulement 101
3.3.1 Équation de conservation de la masse 102
3.3.2 Condition d'incompressibilité d'un fluide 103
3.3.3 Écoulements rotationnels ; écoulements potentiels 105

3.4 Fonction de courant 106
3.4.1 Introduction et signification de la fonction de courant 106
3.4.2 Fonctions de courant d'écoulements plans 108
3.4.3 Fonctions de courant des écoulements axisymétriques . . 111
3.5 Visualisations et mesures de vitesse et de gradient de vitesse dans les écoulements 113
3.5.1 Visualisation des écoulements 113
3.5.2 Mesures de concentrations 117
3.5.3 Quelques méthodes de mesure de la vitesse locale d'un fluide 118
3.5.4 Mesures de champ de vitesse d'écoulements et de gradients de vitesse 121

4 Dynamique des fluides visqueux, rhéologie, écoulements parallèles 125
4.1 Forces de surface 125
4.1.1 Expression générale des forces de surface. Contraintes dans un fluide 125
4.1.2 Caractéristiques du tenseur des contraintes de viscosité 128
4.1.3 Tenseur des contraintes de viscosité pour un fluide newtonien 130
4.2 Équation du mouvement d'un fluide 132
4.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général 132
4.2.2 Équation de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien 134
4.2.3 Équation d'Euler pour un fluide parfait 135
4.2.4 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes 135
4.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides 136
4.3.1 Conditions aux limites à la surface d'un corps solide . . 136
4.3.2 Conditions aux limites entre deux fluides – effet de la tension superficielle 138
4.4 Les fluides non newtoniens 140
4.4.1 Mesures des caractéristiques rhéologiques 140
4.4.2 Fluides non newtoniens indépendants du temps 142
4.4.3 Différents types de fluides dépendant du temps 147
4.4.4 Élasticité et viscosité complexes des fluides viscoélastiques 150
4.4.5 Anisotropie des contraintes normales 155
4.4.6 Viscosité élongationnelle 157
4.4.7 Résumé des principaux types de fluides non Newtoniens 158
4.5 Écoulements unidirectionnels de fluides visqueux newtoniens . . 159
4.5.1 Équation de Navier-Stokes pour les écoulements unidirectionnels 159

4.5.2 Écoulement de Couette entre deux plans parallèles . . . 161
4.5.3 Écoulements de Poiseuille . . . 162
4.5.4 Écoulements oscillants dans un fluide visqueux . . . 167
4.5.5 Écoulement parallèle créé par une variation horizontale de densité . . . 173
4.5.6 Écoulement de Couette cylindrique . . . 175
4.6 Écoulements unidirectionnels simples de fluides non newtoniens indépendants du temps . . . 179
4.6.1 Écoulement stationnaire de Couette plan . . . 179
4.6.2 Écoulement unidirectionnel avec des parois fixes . . . 180
4.6.3 Profils de vitesse pour des lois rhéologiques simples . . . 182
4.6.4 Écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant . . . 186

5 Équations de bilan **191**
5.1 Équation de bilan de masse . . . 191
5.2 Bilan de quantité de mouvement . . . 192
5.2.1 Expression locale . . . 192
5.2.2 Forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement . . . 193
5.3 Bilan d'énergie cinétique – équation de Bernoulli . . . 198
5.3.1 Équation de bilan d'énergie cinétique dans un fluide incompressible en écoulement avec ou sans viscosité . . . 198
5.3.2 Relation de Bernoulli . . . 201
5.3.3 Applications de l'équation de Bernoulli . . . 204
5.4 Applications des équations de bilan de quantité de mouvement et d'énergie . . . 210
5.4.1 Jet incident sur un plan . . . 210
5.4.2 Jet sortant d'un réservoir par un orifice . . . 212
5.4.3 Force sur les parois d'une conduite de révolution de section variable . . . 215
5.4.4 Couches liquides d'épaisseur variable – ressaut hydraulique . . . 216

6 Écoulements potentiels **225**
6.1 Introduction . . . 225
6.2 Définitions, propriétés et exemples d'écoulements potentiels . . . 227
6.2.1 Caractéristiques et exemples de potentiels de vitesse . . . 227
6.2.2 Unicité du potentiel des vitesses . . . 228
6.2.3 Potentiels des vitesses des écoulements élémentaires et combinaison des fonctions potentielles . . . 231
6.2.4 Exemple d'écoulements potentiels simples . . . 237
6.3 Forces sur un obstacle dans un écoulement potentiel . . . 246
6.3.1 Cas bidimensionnel . . . 247

6.3.2 Effets de masse ajoutée pour un corps tridimensionnel accéléré dans un fluide parfait 251
6.4 Ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait 256
6.4.1 Houle, risée et déferlantes 256
6.4.2 Trajectoires des particules de fluide lors du passage de l'onde 260
6.4.3 Ondes solitaires 261
6.4.4 Un autre écoulement potentiel avec interface : la bulle de Taylor 263
6.5 Analogie électrique des écoulements potentiels bidimensionnels 264
6.5.1 Analogie directe 265
6.5.2 Analogie inverse 265
6.6 Potentiel complexe des vitesses 267
6.6.1 Définition du potentiel complexe 267
6.6.2 Potentiel complexe de quelques écoulements 268
6.6.3 La transformation conforme 271

7 Vorticité, dynamique du tourbillon, écoulements en rotation 283
7.1 La vorticité : définition, exemple des filaments de tourbillons rectilignes 284
7.1.1 Notion de vorticité 284
7.1.2 Un modèle simple de tourbillon rectiligne : le vortex de Rankine 285
7.1.3 Analogies avec l'électromagnétisme 290
7.2 Dynamique de la circulation de la vitesse d'écoulement 295
7.2.1 Le théorème de Kelvin : conservation de la circulation . 295
7.2.2 Sources de circulation 299
7.3 Dynamique de la vorticité 306
7.3.1 Équation de transport de la vorticité et conséquences . 306
7.3.2 Équilibre étirement-diffusion 311
7.4 Exemples de répartition de vorticité concentrée sur des lignes singulières 313
7.4.1 Vorticité concentrée sur des lignes 313
7.4.2 Dynamique d'un ensemble de lignes de vorticité rectilignes parallèles 314
7.4.3 Anneaux tourbillons 322
7.5 Tourbillons, vorticité et locomotion dans l'air et dans l'eau . . . 326
7.5.1 Forces de poussée et émission de tourbillons 326
7.5.2 Portance et sustentation 328
7.5.3 Portance et propulsion 330
7.6 Fluides en rotation 332
7.6.1 Mouvement d'un fluide dans un repère en rotation . . . 333
7.6.2 Écoulements à petit nombre de Rossby 339

7.6.3 Ondes dans les fluides en rotation 345
7.6.4 Effet de la viscosité au voisinage de parois : couche d'Ekman 356
7.7 Vorticité, rotation et écoulements secondaires 360
7.7.1 Écoulements secondaires dus à la courbure de canalisations ou de canaux à surface libre 360
7.7.2 Écoulements secondaires dans des mouvements transitoires 363
7.7.3 Écoulements secondaires associés à des effets de couches d'Ekman 366

8 Écoulements quasi parallèles – Approximation de lubrification 373
8.1 Approximation de lubrification 373
8.1.1 Écoulements quasi parallèles 373
8.1.2 Hypothèses de l'approximation de lubrification 374
8.1.3 Effets d'instationnarité 377
8.1.4 Équations de mouvement dans l'approximation de lubrification 378
8.1.5 Un exemple d'application de l'équation de lubrification : écoulement stationnaire entre deux plans mobiles formant un angle faible 378
8.1.6 Écoulements d'un film fluide de profil d'épaisseur quelconque 383
8.1.7 Écoulement entre deux cylindres de rayons voisins décentrés 387
8.1.8 Lubrification et rugosité des surfaces 390
8.2 Écoulements de films liquides à surface libre – hydrodynamique du mouillage 392
8.2.1 Dynamique des films liquides minces sans effets de la tension superficielle 392
8.2.2 Angles de contact dynamiques 394
8.2.3 Dynamique de l'étalement de gouttes sur une surface plane 399
8.2.4 Écoulements induits par des gradients de la tension superficielle – effet Marangoni 403
8.3 Chute d'un jet liquide cylindrique 408
8.3.1 Régime d'écoulement stable 409
8.3.2 Effets capillaires et instabilité de Rayleigh-Plateau du jet 412

9 Écoulements à petit nombre de Reynolds 417
9.1 Les écoulements à petit nombre de Reynolds 418
9.1.1 Sens physique du nombre de Reynolds 418
9.1.2 Exemples d'écoulements à petit nombre de Reynolds . . 418

9.1.3 Quelques caractéristiques marquantes 420
9.2 Équation du mouvement à petit nombre de Reynolds 421
9.2.1 Équation de Stokes 421
9.2.2 Quelques formes équivalentes de l'équation de Stokes . . 422
9.2.3 Propriétés des solutions de l'équation de Stokes 423
9.2.4 Prédictions dimensionnelles sur les écoulements à petit nombre de Reynolds 432
9.3 Forces et moments s'exerçant sur un solide en mouvement . . . 434
9.3.1 Linéarité des relations entre la vitesse d'un solide et les forces exercées 435
9.3.2 Influence des propriétés de symétrie des solides sur les forces et les moments appliqués 436
9.3.3 Propulsion aux faibles nombres de Reynolds 441
9.4 Déplacement d'une sphère dans un fluide visqueux 443
9.4.1 Champ de vitesse autour d'une sphère en mouvement . 443
9.4.2 Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide – coefficient de traînée 447
9.4.3 Extensions de la résolution de l'équation de Stokes à d'autres problèmes 451
9.5 Limites de la description de Stokes des écoulements à faible nombre de Reynolds 458
9.5.1 Équation d'Oseen 458
9.5.2 Forces sur un cylindre circulaire infini dans un écoulement uniforme ($Re \ll 1$) 461
9.6 Dynamique des suspensions 463
9.6.1 Rhéologie des suspensions 464
9.6.2 Sédimentation d'une suspension de particules 467
9.7 Écoulements dans les milieux poreux 469
9.7.1 Quelques exemples 469
9.7.2 Paramètres caractérisant un milieu poreux 470
9.7.3 Écoulements dans les milieux poreux saturés – loi de Darcy 473
9.7.4 Modèles simples de la perméabilité des matériaux poreux 479
9.7.5 Relations conductivité électrique – perméabilité des poreux 481
9.7.6 Écoulement de fluides non miscibles dans les milieux poreux 484

10 Transports couplés. Couches limites laminaires 491
10.1 Introduction 492
10.2 Structure de la couche limite près d'une plaque plane dans un écoulement uniforme 493

10.3 Équations de mouvement dans la couche limite – théorie de Prandtl 495
10.3.1 Équations de mouvement près d'une plaque plane 495
10.3.2 Transport de vorticité dans la couche limite 498
10.3.3 Autosimilitude des profils de vitesse dans la couche limite pour une vitesse extérieure uniforme et constante 498
10.4 Profils de vitesse dans les couches limites 501
10.4.1 Équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme 501
10.4.2 Profil de vitesse solution de l'équation de Blasius 502
10.4.3 Force de frottement sur une plaque plane dans un écoulement uniforme 504
10.4.4 Épaisseurs de couche limite 505
10.4.5 Stabilité hydrodynamique d'une couche limite laminaire – Couches limites turbulentes 507
10.5 Couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression externe : décollement des couches limites 508
10.5.1 Analyse physique simplifiée du problème 508
10.5.2 Profils de vitesse autosimilaires – écoulements de la forme $U(x) = Cx^m$ 508
10.5.3 Couches limites d'épaisseur constante 512
10.5.4 Écoulements non autosimilaires – décollement de la couche limite 514
10.5.5 Conséquences pratiques du décollement des couches limites 515
10.6 Aérodynamique et couches limites 516
10.6.1 Contrôle de couche limite sur l'aile d'avion 516
10.6.2 Aérodynamique automobile 519
10.6.3 Aérodynamique d'autres véhicules terrestres 522
10.6.4 Contrôle actif et réactif de la traînée ou de la portance . 523
10.7 Sillage et jet laminaire 524
10.7.1 Équation de mouvement du sillage 524
10.7.2 Force de traînée sur un corps – relation avec la vitesse dans le sillage 528
10.7.3 Jet laminaire à deux dimensions 531
10.8 Couches limites thermiques et massiques 532
10.8.1 Couches limites thermiques 532
10.8.2 Couches limites de concentration, polarographie 538
10.8.3 Dispersion de Taylor 546
10.9 Flammes 550
10.9.1 Flammes, mélange et réactions chimiques 551
10.9.2 Flammes de diffusion laminaires 553
10.9.3 Flammes prémélangées 556
10.9.4 Instabilité d'une flamme plane de prémélange 561

11 Instabilités hydrodynamiques **563**
11.1 Une approche globale des instabilités : le modèle de Landau . . 564
11.1.1 Un modèle expérimental simple d'instabilité mécanique 564
11.1.2 Écoulement autour d'un cylindre au voisinage du seuil d'émission de tourbillons 567
11.1.3 Évolution temporelle des instabilités dans le modèle de Landau 568
11.2 Instabilité de Rayleigh-Bénard 573
11.2.1 Équations de transport thermique convectif 573
11.2.2 Stabilité d'une couche fluide en présence d'un gradient vertical de température 574
11.2.3 Description de l'instabilité de Rayleigh-Bénard 575
11.2.4 Mécanisme de l'instabilité de Rayleigh-Bénard et ordres de grandeur 575
11.2.5 Solution bidimensionnelle du problème de Rayleigh-Bénard 579
11.2.6 Modèle de Landau appliqué à la convection de Rayleigh Bénard 585
11.2.7 Évolution vers la turbulence au-dessus du seuil de convection 586
11.3 Autres exemples d'instabilités fermées 587
11.3.1 Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni 587
11.3.2 Instabilité de Taylor-Couette 592
11.3.3 Autres instabilités centrifuges 595
11.4 Instabilités d'écoulements ouverts 596
11.4.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz 597
11.4.2 Rôle de la forme du profil de vitesse des écoulements ouverts 604
11.4.3 Instabilités sous-critiques des écoulements de Poiseuille et de Couette 606

12 Turbulence **609**
12.1 Une longue histoire 610
12.2 Les équations de base 611
12.2.1 Description statistique des écoulements turbulents . . . 611
12.2.2 Dérivation des valeurs moyennes 613
12.2.3 Équations du mouvement des écoulements turbulents . . 613
12.2.4 Bilans d'énergie dans un écoulement turbulent 617
12.2.5 Transport de la vorticité dans un écoulement turbulent 619
12.3 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds et applications aux écoulements libres 621
12.3.1 Fermeture de l'équation de Reynolds 621
12.3.2 Viscosité turbulente 622
12.3.3 Longueur de mélange 622

12.3.4 Autres approches pratiques de la turbulence 625
12.4 Écoulements turbulents libres : jets, sillages 625
12.4.1 Propriétés de base des jets et sillages turbulents bidimensionnels 626
12.4.2 Champs de vitesse autosimilaires dans les jets et sillages bidimensionnel 630
12.4.3 Jets et sillages turbulents tridimensionnels axisymétriques 634
12.5 Écoulements près d'une paroi solide 634
12.5.1 Propriétés qualitatives des écoulements turbulents en présence d'une paroi 634
12.5.2 Écoulements turbulents stationnaires parallèles à une paroi plane 636
12.5.3 Écoulement turbulent entre deux plaques parallèles . . . 639
12.5.4 Pertes de charge et coefficient de frottement pour des écoulements entre plans parallèles et dans des tubes 645
12.5.5 Couches limites turbulentes 648
12.5.6 Décollement des couches limites turbulentes 652
12.6 Turbulence homogène – théorie de Kolmogorov 655
12.6.1 *Cascade d'énergie* dans un écoulement turbulent homogène 655
12.6.2 Expression spectrale des lois de Kolmogorov 660
12.6.3 Vérification expérimentale de la théorie de Kolmogorov 666
12.7 Autres aspects de la turbulence 666
12.7.1 Intermittence de la turbulence 667
12.7.2 Structures cohérentes turbulentes 667
12.7.3 Dynamique des tourbillons en turbulence bidimensionnelle 669

Références bibliographiques **671**

Index **683**

Cahier couleurs

Introduction

Cette troisième édition d'*Hydrodynamique physique* arrive dix ans après une précédente qui, elle-même, avait élargi l'édition originale parue dix ans plus tôt. Nous nous sommes efforcés de conserver l'esprit qui nous avait guidés alors, issu de notre expérience d'enseignants en Université et en Grande École : le titre « Hydrodynamique Physique » de l'ouvrage reflète notre souci de présenter la mécanique des fluides en donnant une large place aux observations et analyses physiques tout en évitant les développements mathématiques trop lourds. Les arguments dimensionnels ou d'ordres de grandeur y occupent une large place. L'iconographie a été renouvelée et s'est enrichie d'un cahier central en couleurs, favorisant ainsi une approche inductive plus directe des phénomènes étudiés.

Nous nous sommes attachés à ce que ce livre reste utilisable pour un enseignement de licence et au-delà. Certains sujets traités dans le livre complètent des notions fondamentales et peuvent être, en ce sens, considérés comme des exercices d'application. Mais ce livre s'adresse également à tous les scientifiques, pas seulement physiciens, s'intéressant aux applications de la mécanique des fluides : cela nous a conduit à l'enrichir par des exemples issus des sciences de la nature et de la vie courante.

La mécanique des fluides a un statut mal défini. Elle apparaît comme une branche directe des sciences physiques aux États-Unis, où la Division de Dynamique des Fluides de *l'American Physical Society* organise la plus importante rencontre annuelle au monde sur le sujet. En France, au contraire, elle a été longtemps plus proche des mathématiques appliquées, tout en entretenant une relation forte avec les sciences de l'ingénieur. Une tradition, qui remonte aux grands noms de la mécanique française du XIX^{e} siècle, Cauchy, Poisson, Navier, Darcy... explique cette tendance. Il en est résulté pendant longtemps une ignorance mutuelle entre mécaniciens et physiciens, ces derniers étant également très ignorants de la science des fluides réels. Une raison annexe de cette méconnaissance de la mécanique par les physiciens est venue de la polarisation compréhensible de la physique du XX^{e} siècle tournée vers des problèmes tels que la relativité, la mécanique quantique, tout en oubliant que les pères de ces disciplines avaient aussi une excellente maîtrise de la mécanique. Ainsi nous voyons apparaître le nom d'Einstein dans l'étude des suspensions en relation avec le mouvement brownien ; de même, la thèse de

Heisenberg portait sur la turbulence, sujet auquel il s'intéressera de nouveau en 1945...

Les années 1980 ont vu se développer une vision nouvelle des instabilités et de la transition vers la turbulence : des physiciens tels que P. Bergé, S. Fauve, A. Libchaber, B. Perrin, Y. Pomeau et J.E. Wesfreid en France et G. Ahlers, J. Gollub et H. Swinney aux États-Unis (entre autres) y ont largement contribué.

Dans les décennies qui ont suivi, la méconnaissance mutuelle des mécaniciens et physiciens s'est encore atténuée grâce aux contributions foisonnantes de jeunes scientifiques associant les deux types de formation initiale. Notre livre, à travers ses précédentes versions, a pu jouer un rôle modeste dans cette évolution.

Au-delà de notre formation initiale de physiciens, nous avons appris la mécanique des fluides « sur le tas » à travers des travaux expérimentaux sur les superfluides, les instabilités hydrodynamiques, les cristaux liquides, les milieux poreux et les suspensions ; nous avons également revisité des problèmes classiques de la mécanique des fluides en mettant en place des instrumentations physiques nouvelles. Plus généralement, les recherches expérimentales en mécanique des fluides ont largement bénéficié de nouvelles méthodes d'acquisition et de traitement de données et d'images et de l'utilisation de lasers. Enfin, les approches théoriques développées pour traiter certains problèmes physiques fondamentaux (comme les phénomènes critiques) ont trouvé des débouchés importants en mécanique des fluides.

Dans les premiers chapitres de l'ouvrage, nous avons tout d'abord voulu donner les bases nécessaires pour aborder des problèmes spécifiques.

Le *chapitre 1* rappelle quelques notions sur la structure des fluides et leurs propriétés microscopiques, sur les méthodes spectroscopiques qui permettent de les étudier et sur les phénomènes d'interfaces à prendre en compte dans les écoulements à surface libre.

Le chapitre 2 introduit la notion de viscosité et les différents régimes d'écoulement des fluides, souvent liés au nombre de Reynolds caractérisant la nature convective ou diffusive du transport dans ces écoulements.

Les chapitres 3 et *4* discutent les champs de vitesse d'écoulement ainsi que les déformations des particules de fluide (cinématique) et les contraintes qui leur sont associées (dynamique). Nous étudions des fluides newtoniens ou non suivant la relation contrainte-déformation qui est vérifiée. Les équations de mouvement des fluides qui ont été établies alors sont appliquées à quelques géométries d'écoulement simples.

Le chapitre 5 discute les équations de bilan des fluides. Celles-ci sont souvent des formes intégrales des relations établies au chapitre 4 et elles permettent de résoudre de nombreux problèmes sans avoir à connaître les champs de vitesses locaux.

Le chapitre 6 traite de l'écoulement des fluides parfaits et est un prolongement naturel des équations de bilan. Dans ces écoulements, le rotationnel de

la vitesse est souvent nul en tous points, ce qui permet des analogies directes avec l'électrostatique.

Le *chapitre 7* est la charnière du livre : il introduit la notion clé de vorticité (la dernière brique de base de la mécanique des fluides), puis l'applique aux tourbillons où cette vorticité est très localisée dans un « coeur ». Le chapitre se prolonge par le problème étroitement lié des écoulements en rotation, crucial notamment pour les écoulements terrestres à grande échelle.

La suite du livre aborde des problèmes plus spécifiques :

Le chapitre 8 décrit quelques écoulements quasi-parallèles dominés par la viscosité et décrits dans l'approximation de « lubrification » : celle-ci est riche d'applications aux écoulements de films liquides minces à surface libre ou non et aux jets liquides libres.

Le chapitre 9 s'intéresse aux écoulements contrôlés par la viscosité à cause de leur faible nombre de Reynolds et non de leur géométrie seulement comme ceux de lubrification. Leurs nombreuses applications telles que la locomotion de microorganismes, la dynamique des suspensions, les écoulements dans les milieux poreux sont présentées.

Le chapitre 10 traite les transports couplés associant convection et diffusion et faisant intervenir plusieurs échelles de longueur. La couche limite décrit ainsi la zone de transition entre une vitesse nulle sur une paroi et un écoulement potentiel extérieur et s'applique largement en aérodynamique. Nous étendons ensuite cette approche aux sillages et aux jets ainsi qu'aux réactions électrochimiques et aux flammes.

Les instabilités hydrodynamiques sont abordées *au chapitre 11*, tant à partir de l'approche globale du modèle de Landau qu'à l'échelle du champ de vitesse local à partir de solutions approchées. Quelques instabilités convectives confinées sont d'abord étudiées en dégageant des notions telles que les instabilités sous critiques avant de passer à des exemples d'instabilités d'écoulements ouverts.

Enfin, *le chapitre 12* traite les écoulements turbulents, dominés par les mouvements aléatoires du fluide. Après les écoulements libres (jets ou sillages) puis en présence de parois, nous décrivons le transfert d'énergie dans la turbulence homogène avant d'évoquer la turbulence bidimensionnelle.

Comme nous l'avons dit, notre approche physique est issue de nos travaux sur des problèmes de mécanique des fluides. Nos contacts avec une communauté internationale très accueillante à nos approches de physiciens ont fait le reste. En particulier, nous voulons rendre hommage à l'École britannique de mécanique des fluides : les cours de E.J. Hinch qui nous fait le grand honneur de préfacer ce livre et de K.H. Moffatt nous ont ainsi ouverts à une présentation de la mécanique associant théorie, expérience et une solide part de pragmatisme. Il ne faudrait bien sûr pas oublier les quatre volumes des articles de G.I. Taylor et le livre classique de G.K. Batchelor (ainsi que nos contacts directs avec lui).

Aux États-Unis, nos contacts avec des personnalités comme A. Acrivos, J. Brady, G. Homsy, J. Koplik, L. Mahadevan et H. Stone (entre autres), ont élargi notre vision vers des problèmes très divers. Enfin, nous avons découvert de nombreux phénomènes de mécanique des fluides à travers la remarquable série de films du NCFMF (National Committee for Fluid Mechanics Films) ; ceux ci ont trouvé un prolongement sous une forme actuelle et de nombreuses extensions dans le projet Multimedia Fluid Mechanics animé par G. Homsy.

En France, une École des Houches organisée en 1973 par J.L. Peube avec K. Moffatt, S. Orszag, P. Germain a suscité, pour P.G. de Gennes qui y participait comme élève, deux années de cours très originaux au Collège de France et, pour l'un d'entre nous (EG), le projet du présent livre.

Mais, avant tout, en plus de nos enseignements, c'est dans la vie quotidienne des laboratoires de notre communauté que ce livre s'est construit. Les recherches et enseignements de P. Bergé, B. Castaing, C. Clanet, Y. Couder, M. Farge, M. Fermigier, P. Gondret, E. Guazzelli, J.F. Joanny, F. Moisy, B. Perrin, Y. Pomeau, M. Rabaud, D. Salin, J.E. Wesfreid et bien d'autres sont ainsi à l'origine de nombreux éléments de ce livre ; nous remercions tous ces collègues.

Nous souhaitons enfin remercier tout spécialement plusieurs collègues qui nous ont généreusement aidé dans la rédaction de plusieurs parties de cet ouvrage : J.L. Aider (aérodynamique appliquée), C. Allain (écoulements non newtoniens), A. Ambari (polarographie), A.M. Cazabat (dynamique du mouillage), M. Champion (flammes), C. Clanet (capillarité), F. Moisy (turbulence et écoulements en rotation), C. Nore (magnétohydrodynamique), N. Ribe (jets libres), H. Swinney (instabilités) et J. Teixeira (diffusion de rayonnements dans les fluides).

Chapitre 1

Physique des fluides

À une échelle microscopique, la physique des fluides peut être considérée comme une branche de la thermodynamique. L'approche physique classique s'intéresse aux états d'équilibre des corps purs – solides, liquides et gaz – et aux changements d'état entre ces phases. Un premier élargissement de cette approche est l'étude des fluctuations au voisinage immédiat d'un état d'équilibre ; ces fluctuations sont caractéristiques de cet état, mais renseignent aussi sur les propriétés de retour à l'équilibre. Ainsi, pour un système physique contenant un grand nombre de particules et qui a subi un « léger écart » par rapport à son état d'équilibre thermodynamique, il existe des relations simples de proportionnalité entre les flux, qui ramènent le système à l'équilibre et l'importance de l'écart par rapport à cet équilibre.

L'étude de ces relations et la définition des coefficients de transport qui les caractérisent constituent le noyau de ce premier chapitre ; cette étude sera d'abord macroscopique (section 1.2), puis microscopique (section 1.3). Nous analyserons ensuite (section 1.4) quelques phénomènes de surface qui apparaissent lorsque deux fluides ont une surface de séparation commune (interface). Nous discuterons enfin brièvement l'application aux liquides des techniques de spectroscopie optique, de rayons X ou de neutrons (section 1.5) : ces méthodes permettent d'étudier les fluctuations autour de l'équilibre et d'en déduire les valeurs des coefficients de transport. Mais, tout d'abord (section 1.1), nous allons donner une description simple de l'état microscopique d'un fluide en nous attachant à analyser l'influence de ses caractéristiques microscopiques sur ses propriétés macroscopiques.

1.1 L'état liquide

On connaît bien, à partir de l'étude des structures microscopiques (rayons X) ou par l'observation de la forme extérieure d'un cristal, l'organisation périodique de ses atomes. Dans cet état de la matière, les atomes

restent fixes les uns par rapport aux autres, à l'exception de vibrations de faible amplitude, d'origine thermique. À l'opposé, les gaz sous faible pression constituent un ensemble dilué de particules se déplaçant rapidement, avec de faibles interactions entre elles, excepté lors de leurs collisions ; les modèles de théorie cinétique des gaz permettent de comprendre de façon microscopique l'évolution de leurs variables d'état d'équilibre, telles que la température ou la pression. En revanche, la description d'un liquide – de caractéristiques intermédiaires entre celle d'un gaz et celle d'un solide – est plus délicate : faut-il le considérer comme un gaz très dense ou comme un solide désordonné ? De fait, les modèles microscopiques des liquides associent souvent ces deux approches extrêmes. En particulier, les systèmes modèles microscopiques et macroscopiques à deux dimensions fournissent un outil très puissant pour analyser la structure et les propriétés statiques des différents états de la matière.

1.1.1 Les différents états de la matière : systèmes modèles et milieux réels

Représentation visuelle des états de la matière par une table soufflante

Les modèles de tables soufflantes utilisent un écoulement d'air dirigé vers le haut à travers une plaque horizontale percée de trous identiques de petit diamètre, répartis uniformément sur sa surface. On y place des palets de rayon R qui se déplacent ainsi sans friction appréciable ; « l'agitation thermique » des palets peut être simulée par la vibration de la plaque ou de ses parois latérales. Suivant la concentration moyenne des palets, on peut observer les caractéristiques des différents états de la matière. Les figures 1.1a et 1.1b ont été obtenues en fixant une petite source lumineuse sur chacun des palets et en enregistrant les trajectoires correspondantes sur une photo exposée pendant un temps de pose plus long que le temps moyen entre chocs. Les trajectoires des palets apparaissent en blanc sur les figures. On caractérise la concentration de palets par la *compacité* C (ou facteur de remplissage), qui est le rapport de la surface occupée par les palets à la surface totale. Nous allons maintenant discuter le mouvement des palets à différentes compacités.

– **Compacité maximale :** $C = C_M$

La valeur maximum de C_M pour des systèmes à deux dimensions est égale à 0,901 et elle est obtenue pour un empilement triangulaire compact de disques. Les palets forment alors un réseau cristallin parfait bidimensionnel (Fig. 1.2) : cet état représenterait celui d'un cristal parfait sans agitation thermique.

Démonstration. Dans cette configuration, un motif unité (la maille élémentaire) qui, répété périodiquement, conduit au réseau triangulaire, est un losange (L) de

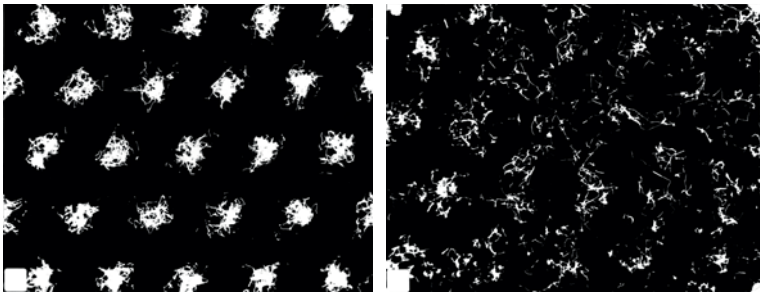


FIG. 1.1 – Configurations observées lors du mouvement de palets sur une table soufflante pour différentes valeurs de la compacité C ; (a) état solide $C = 0{,}815$; (b) état fluide $C = 0{,}741$ (docs. Piotr Pieranski).

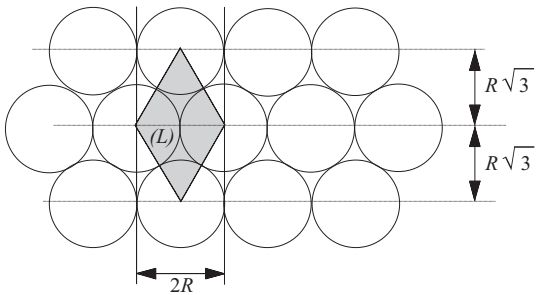


FIG. 1.2 – Configuration de compacité maximale d'un empilement de palets circulaires de même diamètre et dont les centres forment un réseau cristallin plan.

surface $S_0 = (2R)(2R)\sqrt{3}/2$. À l'intérieur de cette surface, il y a exactement les éléments d'un disque de surface $S_p = \pi R^2$, d'où une compacité :

$$C_M = \frac{S_p}{S_0} = \frac{\pi R^2}{2R^2\sqrt{3}} = 0{,}901. \tag{1.1}$$

On parle quelquefois, par abus de langage, de réseau hexagonal. Ce dernier correspondrait à la présence d'un élément seulement au sommet de chaque hexagone, et non au centre de l'hexagone. ■

– Compacités élevées

Tant que la compacité reste voisine de C_M, les palets se déplacent autour de leur position d'équilibre, comme le révèlent les trajectoires des points lumineux (Fig. 1.1a). En revanche, leur position moyenne reste fixe et l'arrangement correspondant est périodique : on a ainsi l'image des vibrations des atomes d'un solide, responsables de la propagation du son. Dans un solide, les

déplacements des particules se transmettent en effet de proche en proche, en réponse à une oscillation imposée à une extrémité. Ces modes de propagation sont appelés *phonons*. Mais deux rangées voisines de l'empilement ne peuvent pas glisser l'une par rapport à l'autre de plus d'une distance de l'ordre de R : chaque particule garde toujours les mêmes voisines. L'amplitude des déformations correspondant à ce glissement est donc limitée, et des forces de rappel élastique apparaissent.

– **Compacités moyennes**

Pour des valeurs de compacité inférieures à $C_0 \approx 0{,}8$, on passe à un régime différent dans lequel les particules peuvent sortir de la cage constituée par leurs voisines. Dans ce cas, les particules ne restent plus dans une position moyenne fixe les unes par rapport aux autres et constituent un « liquide » bidimensionnel (Fig. 1.1b). Dans le même temps, la périodicité du cristal est perdue. La fluidité de l'état liquide entraîne la possibilité d'un mouvement d'ensemble des palets les uns par rapport aux autres, si l'on impose un mouvement relatif par rapport à des parois latérales qui délimitent le système.

– **Faibles compacités $C \ll C_0$**

Dans ce cas, on a un « gaz » de palets. La distance moyenne entre les centres de deux particules plus proches voisines peut être alors très grande (de l'ordre de $R/\sqrt{C}$), alors qu'elle était de l'ordre de $2R$ à l'état liquide.

Modèles numériques de disques durs et leur extension.

On peut obtenir des résultats identiques à ceux que nous venons de décrire dans le modèle analogique ci-dessus, à partir de simulations numériques où l'interaction entre particules est de type *disque dur* ; dans ce cas, le potentiel d'interaction entre deux particules est nul lorsque la distance r entre leurs centres est supérieure à $2R$, et infiniment grand lorsque r est inférieur ou égal à $2R$.

Des simulations plus réalistes sont obtenues en utilisant des potentiels d'interaction plus proches de la réalité, tel celui de Lennard-Jones qui, pour un problème à trois dimensions, est de la forme :

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{2R}{r} \right)^{12} - \left(\frac{2R}{r} \right)^{6} \right]. \tag{1.2}$$

Cette forme de potentiel permet de rendre compte d'une très légère interpénétration des particules, fortement limitée par le principe d'exclusion de Pauli, lorsque r est inférieur ou égal à $2R$; ce potentiel introduit aussi une faible attraction entre particules, due aux forces de Van der Waals, qui devient dominante aux « grandes » distances ($r \gg R$). L'équation (1.2) prédit

l'existence d'un minimum de $V(r)$ pour une valeur r_0 de l'ordre de $2R$; cela correspond à un équilibre stable qui n'existe pas dans le modèle de disques ou de sphères durs. En introduisant ce potentiel, on modifie l'équation d'état du gaz parfait bidimensionnel et on obtient une forme similaire à l'équation de Van der Waals pour un corps pur. En particulier, on voit apparaître un domaine où un équilibre liquide-gaz est possible.

Modèles à trois dimensions

Nous avons précédemment modélisé la structure des solides et la transition solide-liquide à partir d'un arrangement de palets circulaires. Il est également possible de représenter la structure de certains états d'organisation de la matière à l'aide d'empilements périodiques de sphères : c'est le cas, par exemple, pour le réseau cubique à faces centrées dont la compacité est 0,74 (Fig. 1.3a).

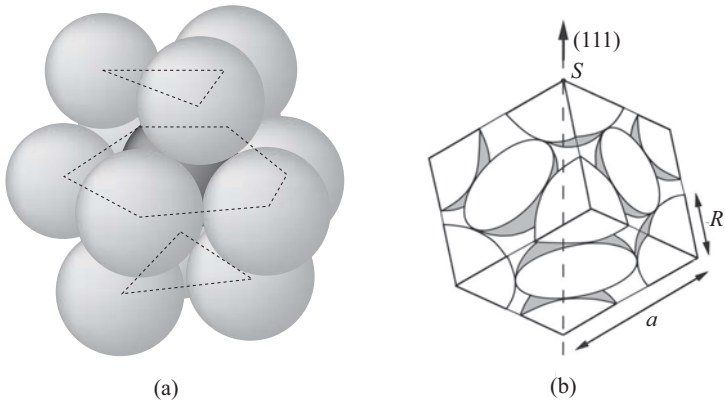


FIG. 1.3 – (a) Empilement compact cubique à faces centrées (CFC) d'un ensemble de sphères de rayon uniforme R ; (b) le réseau CFC de sphères en contact a été coupé par le cube qui forme la maille élémentaire du réseau. Il y a en tout quatre sphères à l'intérieur de ce cube. La correspondance avec la figure (a) peut être comprise si l'on réalise que la sphère S à l'extrémité de l'axe 111, formant la diagonale principale du cube, joue le rôle de la sphère (foncée) au centre de l'empilement de (a).

Compacité du réseau cubique à faces centrées. Le motif de base de l'empilement est constitué par un cube de rayon $a = 4R/\sqrt{2}$ (Fig. 1.3b) qui contient l'équivalent du volume de quatre sphères de rayon R (la diagonale des côtés du cube est en effet égale à $4R$). La compacité C (fraction de volume occupée par des sphères en contact) vérifie donc :

$$C = \frac{4\,(4/3)\,\pi R^3}{a^3} = \frac{4\,(4/3)\,\pi R^3}{\left(4R/\sqrt{2}\right)^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0{,}74. \qquad (1.3)$$

La valeur 0,74 est la plus élevée qui existe pour des empilements de sphères de même rayon R : une fois réalisé, cet empilement assure une organisation périodique

à grande distance, tout comme pour un réseau triangulaire à deux dimensions. La conjecture de Kepler, qui proposait que l'on ne puisse dépasser cette limite pour des empilements de sphères de même diamètre, a reçu une démonstration mathématique en... 1998 !

La différence avec le cas à deux dimensions provient du fait que l'empilement périodique ne se forme pas spontanément quand on remplit un récipient de billes identiques. En effet, il existe une infinité de façons de placer autour d'une seule sphère le même nombre (12) de sphères voisines : l'icosaèdre formé par les centres des sphères de la figure 1.4 en est un exemple particulier. Il n'est pas possible de construire un cristal à partir de tels remplissages locaux. Cela est différent du cas bidimensionnel où la seule façon de disposer six disques en contact avec un disque central est de les placer aux sommets d'un hexagone ; ce dernier constitue alors l'amorce du cristal triangulaire bidimensionnel de la figure 1.2.

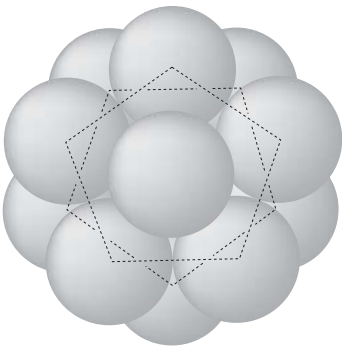


FIG. 1.4 – Empilement icosaédrique construit, comme celui de la figure 1.3(a), à partir de 12 sphères de même diamètre placées régulièrement autour d'une sphère centrale cachée : il a une probabilité plus grande de se produire que l'empilement cubique à faces centrées. À cause de sa symétrie d'ordre 5, il ne peut pas être l'amorce d'un réseau cristallin.

En pratique, lorsque l'on remplit un récipient avec des billes de même rayon, on construit un empilement désordonné de compacité comprise entre 0,59 et 0,64, quel que soit le mode de remplissage. La structure ainsi obtenue représente assez bien celle d'un métal amorphe obtenu en déposant rapidement un film d'alliage de métal à l'état liquide ou vapeur sur un support très froid. Elle représente assez bien aussi la position instantanée des atomes d'un liquide simple (Fig. 1.1b). Enfin, ces empilements fournissent une bonne représentation des milieux granulaires et des milieux poreux (sable, grès) dont nous parlerons dans la section 9.7.

Remarque. Il est également possible d'obtenir des modèles de cristaux tridimensionnels à partir de particules sphériques de latex de diamètre bien défini, mises en solution dans un milieu ionique. Tant que les répulsions coulombiennes entre les

sphères sont suffisamment fortes, ces interactions conduisent à la formation d'un arrangement périodique des particules (cristal colloïdal). En augmentant la concentration ionique de la solution, on diminue les répulsions car les charges de la solution réalisent un écran contre les interactions entre particules ; la structure périodique disparaît et il se forme des agrégats de particules.

1.1.2 La limite solide-liquide : une frontière parfois floue

La limite entre le comportement mécanique d'un solide et celui d'un liquide n'est pas toujours aussi franche qu'elle apparaît dans la description thermodynamique ; elle dépend étroitement de l'amplitude et de la durée des contraintes appliquées. La science qui étudie l'évolution de la déformation des matériaux sous contrainte est la *rhéologie*. Dans la section 4.4, nous discuterons les différents types de comportements observés dans des fluides variés, en particulier la *viscoélasticité*. Limitons nous ici à deux exemples.

Modélisation de la plasticité à deux dimensions

La déformation de solides, tels que des barres ou des ressorts métalliques soumis à des forces, cesse d'être réversible au-delà d'une contrainte seuil qui représente leur *limite élastique*. Aussi, de nombreux corps, en apparence solides, « s'écoulent » lorsqu'ils sont soumis à de très fortes contraintes (glaciers, matériaux de la croûte terrestre, feuilles métalliques dans un pressage à froid). Ce processus est appelé *plastification*. Les modèles à deux dimensions permettent d'illustrer l'influence capitale, sur ce phénomène, des défauts qui existent dans des empilements cristallins. Ces défauts pourront, par exemple, être l'apparition d'une nouvelle rangée de particules à partir d'un point du réseau (*dislocation*), ou bien une ligne de contact entre deux réseaux d'orientation légèrement différentes (*joint de grain*). En inclinant légèrement un plateau à deux dimensions sur lequel on a placé une monocouche de billes, on constate que les déformations d'ensemble de cette couche sont rendues possibles par le mouvement des billes voisines des défauts. Ainsi, les défauts permettent à la matière solide de s'écouler. Cette observation est à la base de la métallurgie moderne.

Influence de la vitesse de variation des contraintes sur la déformation d'un matériau

La rapidité de la variation des contraintes joue un rôle tout aussi important que leur amplitude pour déterminer le comportement d'un matériau : ainsi, nous verrons à la section 4.4.3 que la réponse d'un corps à une perturbation de fréquence (ou de durée) variable permet de faire apparaître un passage de l'état solide (à haute fréquence ou pour une faible durée) à l'état liquide (à basse fréquence). La limite entre ces deux régimes est déterminée par un temps τ_{De} caractéristique du corps : le type de comportement observé dépendra du

rapport entre τ_{De} et la durée (ou période) de l'excitation. Ce rapport, défini par l'équation (4.44), est appelé *nombre de Deborah*).

1.2 Coefficients macroscopiques de transport

Analysons maintenant le transport induit dans les fluides par de légers déséquilibres tels que la réponse du système puisse continuer à être décrite par une approximation linéaire. Trois types de problèmes peuvent ainsi être abordés :

- le transport d'*énergie thermique* en présence de variations spatiales de température ;
- le transport de *matière* dû à des variations de concentration ;
- le transport de *quantité de mouvement* dans un fluide en mouvement. C'est surtout cette dernière propriété de transport qui sera étudiée dans la suite de cet ouvrage. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux deux premières citées.

En physique des fluides, ces différents modes de transport coexistent souvent. Voici deux exemples de cette coexistence :

- un objet chaud (température T_+), placé dans un fluide au repos à une température plus faible T_-, induit souvent un mouvement dit *convectif* dans la partie supérieure du fluide (Fig. 1.5a). En retour, les mouvements du liquide augmentent le transport d'énergie thermique entre l'objet et le fluide. Ainsi, en soufflant sur un morceau de bois incandescent, on modifie à la fois les transports de masse, de matière et d'énergie thermique (Q), et la cinétique de la réaction exothermique de combustion est accélérée (Fig. 1.5b).

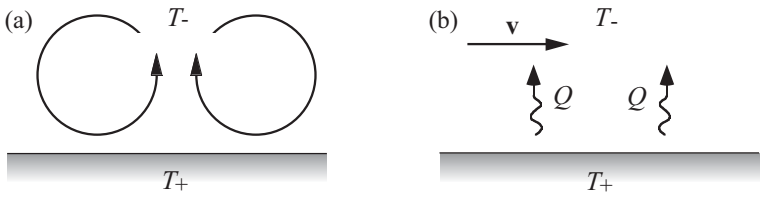


FIG. 1.5 – Échange thermique entre un fluide et une plaque chauffée : (a) en présence d'un écoulement de convection spontané induit par la différence de température (et étudié en détail au chapitre 11) ; (b) entre un courant d'air et un corps chaud, avec la formation d'une couche limite (voir chapitre 10).

On a, dans ces exemples, une juxtaposition de mécanismes d'échange convectif (entraînement par le fluide en écoulement), radiatif, chimique

(associé aux réactions) et diffusif (ou conductif). Ces derniers mécanismes dépendent uniquement des propriétés microscopiques du fluide et sont analysés comme des faibles déviations par rapport à l'état d'équilibre. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à ce cas.

Nous discuterons d'abord, d'un point de vue macroscopique, l'exemple familier de la diffusion thermique, pour aborder ensuite la diffusion de masse (section 1.2.2) ; puis à la section 1.3, nous donnerons une image microscopique de ces effets dans les gaz et les liquides. Au chapitre 2, nous verrons comment la viscosité d'un fluide rend compte de la diffusion de la quantité de mouvement. La correspondance entre le transport diffusif pour ces trois grandeurs est à relier au fait que les équations décrivant les processus et les caractéristiques observées sont analogues ; les résultats obtenus pour le transport d'énergie thermique sont facilement transposables au transport de la masse ou de la quantité de mouvement (moyennant un changement des coefficients et une transposition scalaire-vecteur).

1.2.1 Conductivité thermique

Équation de transport de l'énergie thermique en régime stationnaire

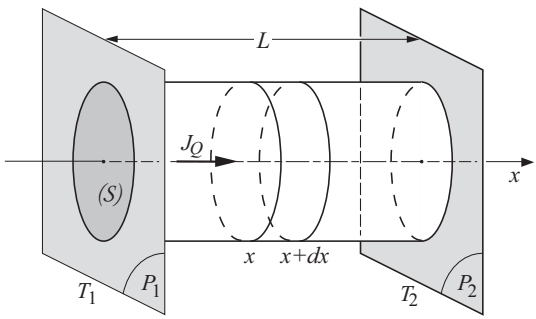


FIG. 1.6 – Transport de chaleur le long de l'axe d'un cylindre induit par une différence de température $T_1 - T_2$.

Un corps homogène (solide, liquide ou gaz) infiniment étendu dans les trois directions est soumis à un gradient de température $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ le long de l'axe Ox. Ce gradient est obtenu en appliquant une différence de température $T_1 - T_2$ entre les deux plans P_1 et P_2 distants de L (Fig. 1.6). On s'intéresse au transport de l'énergie thermique à travers une section de surface S perpendiculaire à l'axe Ox.

Le flux d'énergie thermique J_Q par unité de section et de temps varie linéairement avec $T_1 - T_2$, ce que l'on peut exprimer par la relation de proportionnalité :

$$J_Q = \frac{\delta Q}{S\,\delta t} = k\,\frac{T_1 - T_2}{L} = -k\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\cdot \tag{1.4}$$

La dernière égalité vient du fait que, à l'équilibre, la température varie linéairement entre les valeurs extrêmes T_1 et T_2, ce que nous justifierons plus loin. Le signe moins indique que le flux d'énergie thermique est dirigé dans le sens opposé du gradient thermique. Le coefficient k (appelé *conductivité thermique*) est fonction uniquement des propriétés du matériau. Il vérifie l'équation aux dimensions :

$$[k] = \frac{[M][L]^2[T]^{-3}}{[L]^2.[\Theta]\,/\,[L]} = [M][L][T]^{-3}[\Theta]^{-1} \tag{1.5}$$

($[L]$ correspond à la longueur, $[M]$ à la masse, $[T]$ au temps, $[\Theta]$ à la température). Des valeurs typiques de ce coefficient sont données dans le tableau 1.2 à la fin de ce chapitre.

La relation (1.4) peut être généralisée sous une forme vectorielle dans le cas où la température T varie dans les trois directions de l'espace avec :

$$\mathbf{J_Q}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{grad}\;T(\mathbf{r}). \tag{1.6}$$

Cette relation a la même forme que la loi d'Ohm locale $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\sigma\,\mathbf{grad}\,V(\mathbf{r})$, qui relie la densité de courant électrique $\mathbf{j}$ au potentiel $V(\mathbf{r})$ en électrocinétique (σ est la conductivité électrique du milieu). Nous comprenons maintenant pourquoi, en régime stationnaire, la température varie linéairement avec la distance dans la géométrie de la figure 1.6, tout comme le potentiel électrique varie linéairement entre deux électrodes parallèles portées à des potentiels différents et plongées dans un fluide conducteur. La relation linéaire (1.6) exprime une proportionnalité entre un *flux* (l'énergie thermique) et une *force thermodynamique* (le gradient thermique) ; on retrouvera des relations similaires dans les autres phénomènes de transport au voisinage de l'équilibre.

Conductivité thermique en géométrie cylindrique

L'expérience suivante permet de mesurer la conductivité thermique du matériau constituant le cylindre creux de rayon a, représenté sur la figure 1.7. Initialement, le cylindre est plongé dans un bain isotherme à la température uniforme T_1, de telle façon que $T(r = a) = T_1$ quel que soit t. La zone creuse à l'intérieur du cylindre ($r < b$) n'est en communication avec le bain extérieur que par l'intermédiaire du cylindre. On y place un thermomètre qui permet de mesurer la température intérieure $T_i(t)$, et une résistance chauffante R qui délivre une puissance P constante et uniforme sur la hauteur H du cylindre. Si cette hauteur H est assez grande devant le rayon a du cylindre, on peut supposer que le flux d'énergie thermique $\mathbf{J}_Q(r)$ est radial et ne varie pas le long de l'axe. À l'instant $t = 0$, on branche la résistance chauffante et on enregistre les variations de la température intérieure $T_i(t)$ du cylindre mesurée par le thermomètre. Au bout d'un temps suffisamment long, cette température se stabilise à une valeur T_2.

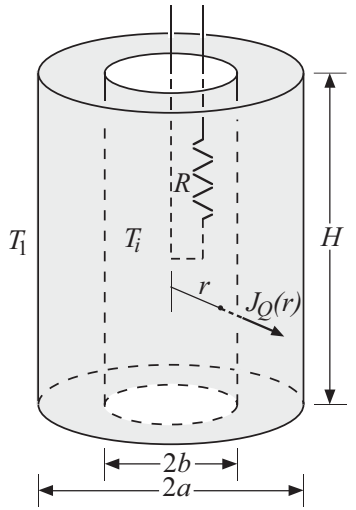


FIG. 1.7 – Principe de l'expérience de la mesure de conductivité thermique à l'aide d'un cylindre creux.

La mesure de $T_2 - T_1$ donne accès à la valeur de la conductivité thermique k du cylindre. En effet, évaluons le flux d'énergie thermique radial $\mathbf{J_Q}(r)$ par unité de surface ($b < r < a$) circulant entre deux cylindres de rayons infiniment voisins r et $r + \mathrm{d}r$. Son module $J_Q(r)$ vérifie :

$$P = 2\pi r\, H\, J_Q(r) \tag{1.7}$$

avec :

$$J_Q(r) = -k\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}, \tag{1.8}$$

où P est la puissance de chauffe qui est constante en régime stationnaire. En combinant ces deux relations, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{2\pi H\, k}{P}\,\mathrm{d}T. \tag{1.9}$$

En intégrant cette équation, compte tenu des conditions aux limites sur la température, on obtient :

$$k = \frac{P}{2\pi H(T_2 - T_1)}\ \mathrm{Log}\,\frac{a}{b}. \tag{1.10}$$

Remarque. Ce calcul, valable en régime permanent, est identique à celui de la conductivité électrique d'un conducteur formé de deux cylindres coaxiaux entre lesquels est appliquée une différence de potentiel $(V_2 - V_1)$ (analogue à la différence de température $T_2 - T_1$) et parcourus par un courant d'intensité I (analogue à la puissance de chauffe P).

Échange thermique en régime non stationnaire – Équation de Fourier

Nous avons traité l'exemple précédent en supposant que l'on avait atteint un régime stationnaire où la température en chaque point est indépendante du temps. On mesure alors un effet de diffusion sous gradient imposé. Considérons maintenant le cas plus général où la température T est à la fois fonction de la position et du temps. Nous traiterons ici, tout d'abord, le cas plus simple de la variation de température avec la géométrie unidimensionnelle de la figure 1.6. L'évolution de la température $T(x,t)$ est décrite par l'équation de Fourier à une dimension qui relie les dérivées partielles de la température T par rapport au temps et à la coordonnée d'espace x :

$$\rho\, C \frac{\partial T(x,\ t)}{\partial t} = k\, \frac{\partial^2 T(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{1.11a}$$

ou :

$$\frac{\partial T(x,\ t)}{\partial t} = \kappa\, \frac{\partial^2 T(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{1.11b}$$

avec :

$$\kappa = \frac{k}{\rho C}\cdot \tag{1.12}$$

ρ est la masse volumique du corps et C sa capacité thermique par unité de masse, le coefficient κ est la *diffusivité thermique* (une grande diffusivité thermique correspond à une grande conductivité thermique et à une faible inertie au transfert thermique, mesurée par $\rho\, C$). Dimensionnellement, l'équation (1.11b) implique que le rapport de κ au carré d'une distance est homogène à l'inverse d'un temps ; on a donc $[\kappa] = [L]^2[T]^{-1}$ avec, pour unité, le mètre carré par seconde. On trouvera les valeurs des coefficients k, ρ et C pour plusieurs fluides usuels en fin du présent chapitre.

Démonstration. Exprimons le bilan thermique pour un élément de volume de corps limité par les plans voisins x et $x + \mathrm{d}x$ (Fig. 1.6). La quantité d'énergie thermique entrant pendant le temps $\mathrm{d}t$ par la surface S est, d'après l'équation (1.6) :

$$q_x(x)\, S\, \mathrm{d}t = -k\, \frac{\partial T(x,\ t)}{\partial x} S\, \mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

Le flux sortant est de même :

$$q_x(x + \mathrm{d}x)\, S\, \mathrm{d}t = -k\, \frac{\partial T(x + \mathrm{d}x,\ t)}{\partial x} S\, \mathrm{d}t. \tag{1.14}$$

La différence de ces deux flux est l'énergie thermique algébrique accumulée dans le volume limité par les deux plans soit :

$$\begin{aligned} q_x(x)\, S\, \mathrm{d}t - q_x(x + \mathrm{d}x)\, S\, \mathrm{d}t &= k\, S\, \mathrm{d}t \left[-\frac{\partial T(x,\ t)}{\partial x} + \frac{\partial T(x + \mathrm{d}x,\ t)}{\partial x} \right] \\ &= k\, S\, \mathrm{d}t\, \frac{\partial^2 T(x,\ t)}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{1.15}$$

en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\partial T(x,\, t)/\partial x$. Cette énergie thermique accumulée entraîne une variation de température $\partial T(x,\, t)/\partial t$ donnée par l'égalité :

$$\rho\, C\, S\, \mathrm{d}x\, \frac{\partial T(x,\, t)}{\partial t}\, \mathrm{d}t = k\, S\, \mathrm{d}t\, \frac{\partial^2 T(x,\, t)}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x. \tag{1.16}$$

En simplifiant l'équation (1.16), on obtient les équations (1.11). ■

La forme de l'équation (1.11b) est très générale et caractéristique de tous les phénomènes de diffusion : on la retrouve avec des variables différentes, dans les problèmes de transport de masse ou de quantité de mouvement. Il est souvent utile d'exploiter cette correspondance où les coefficients de diffusivité gardent la même dimension, mais prennent des valeurs différentes.

Notons que, en régime stationnaire et dans une géométrie unidimensionnelle, l'équation (1.11b) se ramène à : $\partial^2 T(x,\, t)/\partial x^2 = 0$. Dans ce cas, on a donc un gradient de température constant le long de la coordonnée x et, par suite, une variation linéaire de la température avec la distance, comme nous l'avons supposé dans l'établissement de la relation (1.4).

Plus généralement, dans un problème où la température varie dans les trois directions de l'espace, il convient de remplacer le terme $\partial^2 T(x,\, t)/\partial x^2$ dans l'équation (1.11) par le Laplacien :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T(\mathbf{r},\, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r},\, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r},\, t)}{\partial z^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial T(\mathbf{r},\, t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho C}\, \Delta T(\mathbf{r},\, t) = \kappa\, \Delta T(\mathbf{r},\, t) \tag{1.17}$$

qui est l'*équation de Fourier* à trois dimensions.

Propagation d'une variation de température dans une direction

Nous considérons maintenant un milieu homogène, limité par le plan $x = 0$ et occupant un demi espace infini dans les directions $x > 0$, y et z. Le corps est initialement à une température uniforme $T = T_0$ aux temps $t \leq 0$. À l'instant $t = 0$, on impose une variation de température sur le plan limite $x = 0$, en le mettant en contact avec un thermostat à la température uniforme : $T_1 = T(x = 0,\, t > 0)$. Le profil de température en fonction de la distance au plan origine est montré sur la figure 1.8a, à différents instants ; on observe l'étalement progressif de la perturbation introduite dans le plan origine sous l'effet de la diffusion thermique.

La solution de ce problème nous éclairera sur de nombreux autres exemples de diffusion. Remarquons d'abord que, à partir de la diffusivité thermique κ et du temps t, on peut construire la variable $\sqrt{\kappa t}$ qui a la dimension d'une longueur. Il est donc raisonnable de normaliser les abscisses x par cette longueur, en formant le rapport sans dimensions $u = x/\sqrt{\kappa t}$; de même, au lieu de calculer $T(x,\, t)$, nous déterminons la fonction normalisée $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$,

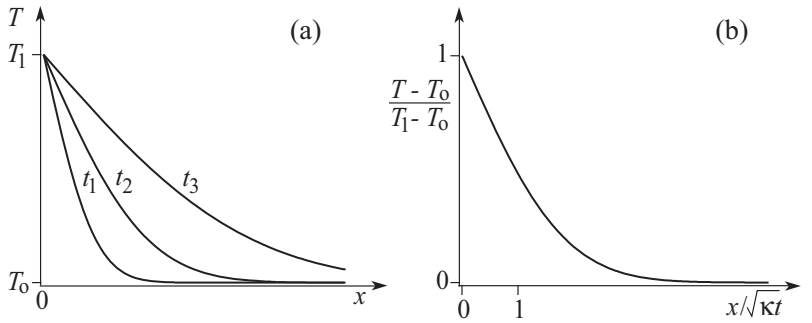


FIG. 1.8 – Profils de variations de la température avec la distance dans un milieu semi-infini limité par le plan $x = 0$: (a) profils à des instants différents $t_1 < t_2 < t_3$ après une variation initiale en échelon sur le plan origine $x = 0$; (b) profils à des instants différents en fonction de la distance normalisée $u = x/\sqrt{\kappa t}$. La courbe normalisée unique est donnée par la formule (1.18).

qui varie entre 1 (pour $x = 0$) et 0 (pour $x \to \infty$). On trouve alors, comme nous le démontrerons plus bas, la solution :

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{u}{2}\right)\right], \tag{1.18}$$

où erf (z) est la fonction définie par $\mathrm{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \mathrm{e}^{-\zeta^2} \mathrm{d}\zeta$; erf(u) est égale à zéro pour $u = 0$ et à l'unité lorsque u tend vers l'infini. Ainsi, *pour les conditions aux limites* que nous avons considérées, nous avons obtenu une solution qui ne dépend pas séparément de x et t, mais seulement de la variable réduite $x/\sqrt{\kappa t}$. La figure 1.8b montre que les profils spatiaux de la température normalisée correspondant à différents instants coïncident lorsqu'ils sont tracés en fonction de cette variable. Pour des conditions aux limites différentes, il aurait pu être nécessaire de rechercher des solutions plus complexes dépendant séparément de x et t.

On voit que, à un instant t donné, l'effet de la perturbation de la température s'est propagé sur une distance de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$ (à un préfacteur de l'ordre de l'unité près), ce qui est bien en accord avec la forme dimensionnelle de κ. Nous rencontrons ici la caractéristique essentielle des phénomènes diffusifs, à savoir la proportionnalité entre la distance moyenne de diffusion et la racine carrée du temps. Ce résultat explique, en particulier, l'inefficacité des mécanismes diffusifs à grande distance ; s'il faut un temps t_L pour qu'une perturbation de température diffuse sur une distance L, il faut un temps $t_{10L} = 100\, t_L$ pour qu'elle diffuse sur une distance dix fois plus grande. Pour l'air, par exemple, $\sqrt{\kappa t} = 1$ cm, pour $t = 10$ s ; $\sqrt{\kappa t} = 10$ cm, pour $t = 10^3$ s.

Démonstration de l'équation (1.18). À titre d'essai, recherchons des solutions de la forme :

$$T(x,\ t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa t}}\right) = f(u). \tag{1.19}$$

En reportant la fonction (1.19) dans l'équation (1.17) et en exprimant les dérivées de T par rapport à t et à x sous la forme :

$$\left(\frac{\partial T(x,\ t)}{\partial t}\right)_x = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\frac{x}{\sqrt{\kappa}}f'(u) \quad \text{et} : \quad \left(\frac{\partial^2 T(x,\ t)}{\partial x^2}\right)_t = \frac{1}{\kappa t}f''(u),$$

on obtient l'équation :

$$f''(u) + \frac{1}{2}\,u f'(u) = 0. \tag{1.20}$$

En posant $F(u) = f'(u)$, cette équation différentielle de la variable réduite u devient :

$$F'(u) + \frac{u\,F(u)}{2} = 0 \tag{1.21}$$

dont la solution s'écrit :

$$F = F_0\,\mathrm{e}^{-u^2/4}. \tag{1.22}$$

On en déduit alors :

$$f(u) = A\ \mathrm{erf}\left(\frac{u}{2}\right) + B \qquad \text{avec} : \qquad u = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}. \tag{1.23}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des valeurs de la température pour $x = 0$ ($T = T_1 = B$) et pour $x \to \infty$ ($T = T_0 = A + B$).

Diffusion thermique en géométrie cylindrique

Nous avons discuté précédemment le transport thermique radial en régime stationnaire dans un cylindre creusé d'une cavité cylindrique. Analysons maintenant les variations transitoires de température dans le cas limite où la cavité cylindrique intérieure, dans laquelle on mesure la variation de température, a un rayon et une capacité calorifique négligeables : nous supposons que le cylindre de rayon a, initialement à une température T_0, est plongé brusquement à l'instant $t = 0$ dans un fluide de température $T_0 + \delta T_0$. Sans faire le calcul qui fait appel à un développement en série de fonctions, montrons simplement les résultats obtenus.

La figure 1.9 représente les profils de la température réduite $\delta T(r/a)/\delta T_0$ à différentes valeurs de t (r est la distance à l'axe du cylindre et $\delta T(r/a)$ est l'écart de la température locale par rapport à la température initiale T_0). Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du rapport t/τ_κ où $\tau_\kappa = a^2/\kappa$ représente, comme nous l'avons vu plus haut, l'ordre de grandeur du temps de diffusion sur la distance a. On constate que, pour les temps faibles, la variation de température est limitée à une couche proche de la surface ($r = a$), d'épaisseur de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$. Les profils sont similaires à ceux que nous avons montrés sur la figure 1.8 pour une surface limite plane, donc de rayon de courbure infiniment grand. Pour des temps plus longs, de l'ordre de

$0{,}1\tau_\kappa$, la perturbation de température se fait sentir sur l'axe du cylindre. Elle devient partout pratiquement égale à $T_0+\delta T_0$ lorsque $t \approx \tau_\kappa$. Nous verrons à la section 2.1.2 que ces profils décrivent tout aussi bien les variations temporelle et spatiale de la vitesse dans un cylindre rempli de fluide auquel on impose un mouvement de rotation.

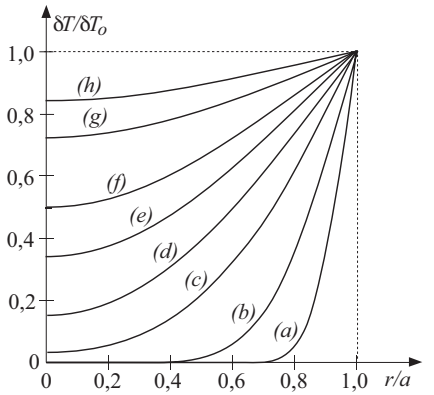


FIG. 1.9 – Diffusion de la chaleur dans un cylindre dont la surface extérieure est soumise, à l'instant t, à une brusque variation de température de T_0 à $T_0 + \delta T_0$. La distribution de la température réduite $\delta T/\delta T_0$ est portée en fonction de la distance réduite r/a à l'axe du cylindre. Les différentes courbes sont obtenues à différents instants, caractérisés par le temps réduit $(\tau/\tau_\kappa) = 0{,}005$ (a) ; $0{,}02$ (b) ; $0{,}06$ (c) ; $0{,}1$ (d) ; $0{,}15$ (e) ; $0{,}2$ (f) ; $0{,}3$ (g) ; $0{,}4$ (h).

Propagation par diffusion et par ondes

Pour évaluer l'efficacité des différents processus, comparons l'équation de Fourier (1.17) à l'équation classique de propagation d'une onde d'amplitude A dans la direction Ox :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \tag{1.24}$$

où c est la célérité de l'onde. On recherche pour cette équation des solutions de la forme : $A(x,\, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Elles décrivent la propagation d'une onde dans les directions $+x$ et $-x$ à une vitesse c constante ; la distance parcourue augmente proportionnellement au temps. Au contraire, l'équation (1.17) admet des solutions pour lesquelles la distance de propagation x varie comme la racine carrée du temps t : la « vitesse effective » de propagation (x/t) décroît avec la distance. Physiquement, ce résultat est dû au fait que le flux de la variable qui diffuse (température, concentration...) est proportionnel au gradient de cette dernière : plus le front de variation s'étale, plus la propagation se fait lentement.

Ainsi, le simple changement de l'ordre de la dérivation par rapport au temps donne des comportements tout à fait différents pour les phénomènes de propagation des ondes et pour ceux de diffusion. Ceux-ci sont efficaces à des temps courts ou sur de très petites distances ; la propagation par ondes ainsi que la convection par le fluide en mouvement (qui donne elle aussi un déplacement linéaire avec le temps) sont dominants dans les autres cas.

1.2.2 Diffusion de masse

Équation de conservation de la masse

Dans l'exemple à une dimension de la figure 1.6, remplaçons la température T par la concentration d'un élément dilué dans le fluide principal : ce traceur peut être un autre gaz ou une fumée dans le gaz, des ions, des molécules de colorant ou des isotopes radioactifs dans un liquide.

Note. L'étude microscopique des phénomènes de diffusion s'applique également à des objets plus gros que la molécule, comme des particules colloïdales, tant que leur taille est suffisamment faible (typiquement inférieure au μm) pour que les effets d'agitation thermique soient prédominants.

Dans ce phénomène de *diffusion sous gradient*, on s'intéresse au flux de traceur induit par son gradient de concentration. On peut aussi s'intéresser à l'*autodiffusion* décrivant la redistribution de molécules marquées évoluant, en l'absence de gradient, parmi d'autres molécules de même espèce mais non marquées. Dans une solution diluée, les coefficients de diffusion sous gradient et d'autodiffusion ont des valeurs identiques. Dans le cas où les particules diffusantes interagissent entre elles, ces deux coefficients peuvent devenir différents.

La concentration peut être mesurée par le nombre $n(x,\ t)$ de particules de traceur par unité de volume ou par la masse ρ_A de traceur par unité de volume de mélange. L'équivalent de la relation (1.6) est l'*équation de Fick* :

$$\mathbf{J}_m = -D_m\ \mathbf{grad}\rho_A \tag{1.25}$$

où $\mathbf{J}_m$ est la densité de courant de traceur (masse par unité de surface et de temps) et D_m est le coefficient de *diffusion moléculaire* du traceur. Sa valeur est fonction à la fois des propriétés du traceur et de l'espèce diffusante. D_m vérifie l'équation aux dimensions :

$$[D_m] = \frac{[M][L]^{-2}[T]^{-1}[L]}{[M][L]^{-3}} = [L]^2[T]^{-1}$$

et a donc la même dimensionnalité que le coefficient de diffusion thermique. En annexe à ce chapitre, nous donnons quelques valeurs de ce coefficient.

On peut établir l'équation aux dérivées partielles qui relie les variations de la densité avec la position et le temps en suivant pas à pas la procédure utilisée pour le problème thermique, c'est-à-dire en exprimant la conservation de la

masse de traceur dans un volume élémentaire fixe de deux façons différentes ; on obtient ainsi, dans le cas unidimensionnel, l'équation équivalente à (1.11b) :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2}. \tag{1.26}$$

À la section 1.2.1, nous avons discuté des exemples de conduction thermique où sont fixées des conditions aux limites de température sur une paroi. Ils correspondent à des problèmes où sont imposées des valeurs aux limites de concentration d'espèces chimiques. Dans ce cas, les solutions mathématiques se transposent directement en changeant la variable T en ρ, et en remplaçant κ par D_m.

En pratique, il est plus simple de créer une répartition de concentration initiale donnée de traceur et de regarder comment elle évolue. L'équivalent thermique consisterait à injecter une certaine énergie thermique en un point pendant un temps court et à la laisser diffuser ensuite.

Étalement d'un traceur initialement localisé dans un plan

On suppose que, à l'intérieur du fluide, on introduit de façon uniforme une masse M_A de traceur, initialement localisée sur une très faible épaisseur autour du plan $x = 0$. Mathématiquement, cette distribution initiale est du type distribution de Dirac δ avec $\rho_A = M_A\,\delta(x)$. Par ailleurs, si le traceur ne réagit pas avec le fluide, la conservation de la masse de traceur s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(x)\,\mathrm{d}x = M_A = \text{cte}. \tag{1.27}$$

Pour vérifier ces conditions, on utilise la dérivée $g(x,t)$ par rapport à la variable x de la solution (1.23) de l'équation de diffusion thermique que nous avons déterminée à la section 1.2.1 :

$$g(x,\ t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}} \tag{1.28}$$

avec $u = x/\sqrt{\kappa t}$. La fonction $g(x,t)$ est bien solution de l'équation (1.11b) : en effet, en dérivant cette équation par rapport à x, on trouve que, si une fonction est solution de l'équation, sa dérivée par rapport à x l'est aussi. En remplaçant κ par D_m, on obtient donc :

$$\rho_A(x,\ t) = \frac{M_A}{2\sqrt{\pi D_m t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4D_m t}}. \tag{1.29}$$

La solution de ce problème est donc une courbe Gaussienne (Fig. 1.10). Sa largeur augmente comme la racine carrée du temps, ce qui est caractéristique des phénomènes diffusifs. Dans le même temps, l'amplitude décroît comme $1/\sqrt{t}$ de façon à conserver l'aire sous la courbe (cette aire représente la masse

totale de colorant injecté). Comme nous l'avons fait pour la courbe de la figure 1.8b, nous pourrons superposer les différentes variations en utilisant la coordonnée $u = x/\sqrt{D_m t}$ comme abscisse et le produit $2\sqrt{\pi D_m t}\,\rho_A(x,\ t)/M_A$ comme ordonnée.

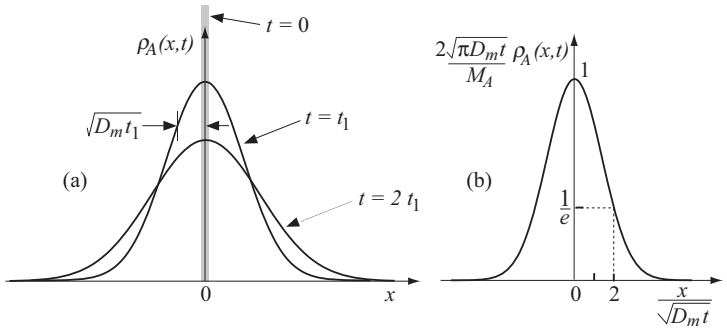


FIG. 1.10 – Étalement par diffusion moléculaire d'une tache de traceur initialement localisée dans le plan $x = 0$; (a) profils de concentration à différents instants $t = 0$, $t = t_1$ et $t = 2t_1$, après l'instant d'injection du traceur ; (b) profil obtenu en utilisant la variable normalisée $x/\sqrt{D_m t}$ en abscisse et l'amplitude $2\sqrt{\pi D_m t}\,\rho_A(x,\ t)/M_A$ en ordonnée. La courbe correspond à la fonction gaussienne de la formule (1.29).

Remarque. La solution (1.23), obtenue pour la diffusion de chaleur, correspond à la réponse à une variation spatiale en échelon de la température initiale (ou de la concentration de traceur dans le fluide). Ici, nous avons considéré une injection très localisée d'une quantité finie de traceur, ce qui conduit à la solution (1.28) différente de la solution (1.23) (et qui représente la dérivée spatiale de cette dernière).

1.3 Modèles microscopiques des coefficients de transport

Les lois macroscopiques que nous avons écrites pour l'énergie thermique et la masse s'appliquent de façon générale aux fluides et aux solides. Jusqu'à présent, nous n'avons pas envisagé la nature microscopique de ces processus de transport, ni la liaison entre les coefficients de diffusion et la structure du milieu. Nous allons maintenant donner une description simplifiée des mécanismes microscopiques du transport. Nous analyserons tout d'abord la diffusion massique en termes de marche au hasard, puis nous appliquerons la théorie cinétique au transport dans les gaz ; nous discuterons enfin le cas des liquides.

1.3.1 La marche au hasard

Nous nous intéressons ici à l'étalement d'une tache de traceur initialement localisée en un point. Analysons le mouvement de particules de traceur qui

peuvent être des molécules ou des particules très petites, dites browniennes, de taille inférieure à un micromètre : en raison de l'agitation thermique, celles-ci ne sont pas immobiles mais ont des trajectoires complexes comportant une suite de changements de direction aléatoires (mouvement brownien).

Pour analyser ce processus, nous utiliserons le modèle de la *marche au hasard*, la marche de l'homme ivre ! Partant d'un point origine O au temps initial $t = 0$ (qui représente la position initiale du traceur), il effectue des pas de même longueur ℓ et de même durée τ avec une vitesse caractéristique de module $\bar{u} = \ell/\tau$. Après chaque pas, il repart immédiatement dans une nouvelle direction indépendante de celle du pas précédent. Physiquement, ℓ correspond au libre parcours moyen des molécules, τ au temps de trajet entre deux chocs et $\bar{u}$ à la vitesse d'agitation thermique (dans ce cas, comme pour la marche au hasard, la trajectoire entre deux chocs est rectiligne). L'équivalent de l'étalement carré moyen de la tache de traceur sera la moyenne $\langle R(t)^2 \rangle$ où R est le module de la distance du marcheur au point de départ : pour obtenir une valeur statistiquement significative, cette moyenne est prise sur un ensemble de marches aléatoires indépendantes.

Remarque. La moyenne de la distance vectorielle $\mathbf{R}(t)$ est, en revanche, nulle car toutes les directions sont équivalentes.

On trouve alors que :

$$\langle R(t)^2 \rangle = \frac{t}{\tau}\,\ell^2 = \frac{\ell^2}{\tau}\,t = D_m t \tag{1.30}$$

avec :

$$D_m = \frac{\ell^2}{\tau} = \bar{u}\ell = \bar{u}^2\tau. \tag{1.31}$$

L'écart moyen $\sqrt{\langle R(t)^2 \rangle}$ par rapport à la position initiale augmente donc comme la racine carrée du temps, ce qui correspond bien à une loi d'étalement diffusif.

Démonstration. Au bout du premier pas, $\langle R(\tau)^2 \rangle = R(\tau)^2 = \ell^2$. Nous allons montrer par récurrence que, après N pas, on a :

$$\langle R^2(N\tau) \rangle = N\ell^2. \tag{1.32}$$

Supposons que, après $(N-1)$ pas, $\langle R^2((N-1)\tau) \rangle = (N-1)\ell^2$. Pour une marche donnée telle que celle de la figure 1.11, appelons M_{N-1} le point d'arrivée du pas $N-1$ et M_N celui du pas suivant.

On obtient donc l'égalité vectorielle :

$$\begin{aligned}(\mathbf{OM}_N)^2 &= (\mathbf{OM}_{N-1} + \mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)^2 \\ &= (\mathbf{OM}_{N-1})^2 + (\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)^2 + 2(\mathbf{OM}_{N-1}).(\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N).\end{aligned} \tag{1.33}$$

Prenons la moyenne de cette égalité sur tout un ensemble de marches indépendantes partant de O au temps $t = 0$. Par suite de l'indépendance de la direction d'un pas

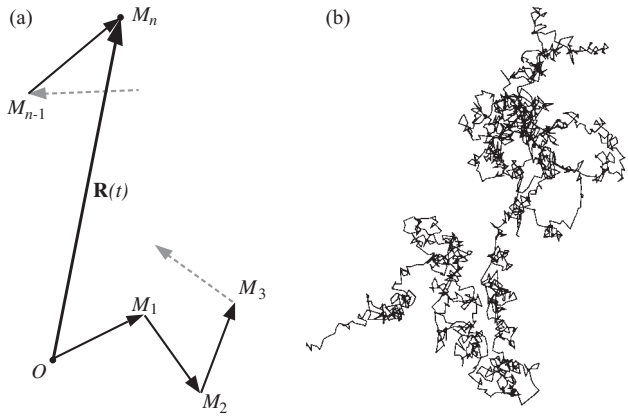


FIG. 1.11 – (a) Déplacement d'une particule de traceur au cours d'une marche au hasard brownienne ; la longueur de tous les pas est supposée la même. (b) Trajectoire brownienne réelle, obtenue par l'analyse de l'image d'une sphère de polystyrène suivie dans son mouvement pendant 2 000 s. Un déplacement élémentaire dure une seconde en moyenne ; 1 cm sur la figure représente environ 3,5 μm (doc. G. Bossis).

et de celle du pas précédent, la moyenne du produit scalaire $(\mathbf{OM}_{N-1}).(\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)$ est nulle : il peut en effet prendre, avec la même probabilité, des valeurs positives et négatives. On trouve donc bien le résultat final :

$$(\mathbf{OM}_N)^2 = (N-1)\ell^2 + \ell^2 + 0 = N\ell^2 \tag{1.34}$$

que l'on peut bien récrire sous la forme (1.30) puisque $t = N\tau$.

Il est à noter que la démonstration de la formule (1.30) ne demande pas de connaître la dimension de l'espace dans lequel se fait la marche au hasard ou la diffusion. Dans le cas particulier où cette marche se fait le long d'une ligne, il est assez facile de montrer que la loi donnant la probabilité d'étalement à partir d'un point situé sur cette ligne est une courbe de Gauss. On retrouve ainsi indépendamment le résultat de l'équation (1.29) obtenu par une approche purement macroscopique. La démonstration part de la formule du binôme appliquée à :

$$(p+q)^N = p^N + Np^{N-1}q + \ldots + C_r^N p^r q^{N-r} + \ldots + q^N. \tag{1.35}$$

Si p (respectivement q) (avec $p+q=1$) représente la probabilité de faire un pas à droite (respectivement à gauche), le terme général $C_r^N p^r q^{N-r}$ donne la probabilité que l'on ait eu r pas à droite et $N-r$ pas à gauche. Dans la limite d'un très grand nombre de pas (N tend vers l'infini), on montre que la distribution des termes du binôme tend vers une distribution gaussienne, qui est centrée à l'origine si $p = q = 1/2$. ■

– Si la marche au hasard se fait sur un plan légèrement incliné, chaque pas est légèrement biaisé dans le sens de la descente. Au bout d'un nombre de pas N, la distribution de marcheurs n'est plus centrée autour de l'origine

O, comme dans la distribution de Gauss précédente, mais on a centrage autour d'un point O' tel que $\mathbf{OO'}$ est orienté vers le bas. Nous avons alors la manifestation d'un phénomène convectif qui se superpose au phénomène diffusif de la marche au hasard : ce phénomène convectif sera prépondérant aux temps longs car le déplacement OO' varie linéairement avec le temps, alors que la distance de transport diffusif ne croît que comme $\sqrt{t}$. Il est possible d'étudier ce problème dans le modèle à une dimension précédent, en prenant des probabilités p et q différentes d'aller vers la droite et vers la gauche. On trouve alors que le déplacement du centre de gravité de la tache varie comme $|\mathbf{OO'}| = N(p-q)\ell$, mais que l'étalement reste gaussien. Ce résultat représente, par exemple, la diffusion d'un traceur en présence d'un champ de forces permanent en volume, tel que la gravité sur des particules pesantes pour la sédimentation (section 9.6.2) ou un champ électrique sur des ions.

Remarque. Dans l'analyse précédente, nous avons envisagé le cas où tous les pas de la marche au hasard étaient de longueur identique. On peut montrer que le modèle gaussien obtenu dans ces conditions reste valable si la distribution de la taille des pas de la marche au hasard n'est pas trop large (plus précisément, il suffit que la probabilité d'avoir un pas de taille ℓ décroisse plus vite que $1/\ell^2$). Si tel n'est pas le cas, alors l'écart quadratique moyen du déplacement dans la marche au hasard varie avec le temps plus vite qu'en $\sqrt{t}$, ce qui est dû au fait que les pas rares et très longs dominent le comportement diffusif. On parle dans ce cas de *diffusion anormale* (ici, il s'agit *d'hyperdiffusion*).

1.3.2 Coefficients de transport des gaz parfaits

Volume élémentaire représentatif

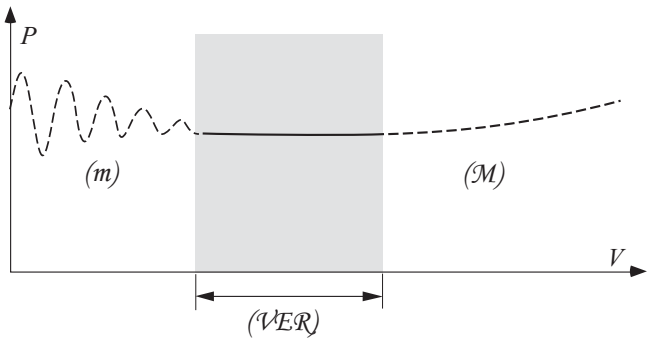


FIG. 1.12 – Le paramètre P est obtenu par une moyenne de la grandeur microscopique correspondante sur un volume V.

Avant d'aborder l'interprétation microscopique des coefficients de transport, nous donnons ici la définition du *volume élémentaire représentatif*

($\mathcal{VER}$). En mécanique des milieux continus, on est amené à définir des grandeurs macroscopiques : pression, température, vitesse, masse volumique. Ces quantités sont des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, sur une taille grande (le $\mathcal{VER}$) devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques (m), mais petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique ($\mathcal{M}$) (Fig. 1.12). Ce volume élémentaire représentatif n'existe pas dans tous les cas, en particulier dans les milieux très inhomogènes, pour lesquels les variations macroscopiques se font sur de très courtes distances.

Diffusion moléculaire pour un gaz parfait

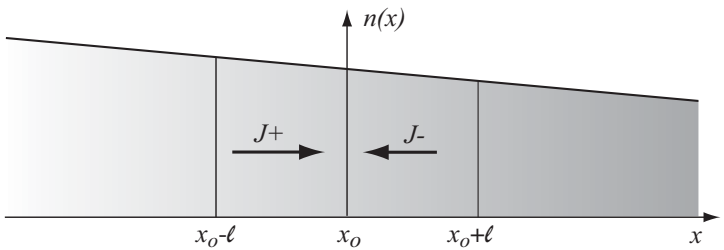


FIG. 1.13 – Schéma du modèle de transport de particules par diffusion unidimensionnelle en théorie cinétique des gaz.

Nous nous plaçons dans le cas de la géométrie unidimensionnelle de la section 1.2.1 (Fig. 1.6) et nous étudions un gaz dilué de molécules de traceur, dont le nombre $n(x)$ par unité de volume varie régulièrement dans la direction Ox (Fig. 1.13). Les molécules de traceur sont accompagnées d'autres molécules qui se redistribuent pour compenser les variations de pression associées à celles de la densité $n(x)$. Les molécules sont animées d'une vitesse moyenne d'agitation thermique. On obtient alors la valeur suivante pour le coefficient de diffusion :

$$D_m = \frac{1}{3}\bar{u}\ell. \tag{1.36}$$

Nous constatons que l'équation (1.36) coïncide (au facteur 1/3 près) avec le résultat obtenu par le modèle de marche au hasard de la section 1.3.1, en utilisant comme vitesse entre les chocs la vitesse d'agitation thermique des molécules et en prenant la longueur des pas égale au libre parcours moyen. Dans ce cas particulier, cela montre l'équivalence des deux phénomènes d'étalement d'une tache de traceur et de flux induit par un gradient de concentration : les deux approches de la théorie cinétique des gaz et de la marche au hasard sont donc équivalentes.

Démonstration. Afin de déterminer D_m, nous évaluons le flux total de particules de traceur à travers une section plane d'abscisse x_0 et d'aire unité. Nous notons

J_+ (respectivement J_-) le flux de particules de traceur venant de la gauche (respectivement de la droite) de ce plan (le flux représente le nombre de particules qui traversent l'unité de surface par unité de temps). Par suite de l'effet du gradient de la concentration de particules $n(x)$, ces deux flux sont différents. Le rapport entre la différence $(J_+ - J_-)$ et $(-\partial n/\partial x)$ nous donne le coefficient de diffusion moléculaire D_m. Le calcul exact utilise la distribution en module et en direction des vitesses d'agitation thermique. Nous ferons ici plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Nous considérons qu'un tiers seulement des molécules se déplacent suivant la direction $\pm x$ avec la vitesse d'agitation thermique $\bar{u}$; les deux tiers restants se déplacent dans les directions y et z et ne contribuent pas, de ce fait, au transport dans la direction considérée.
- Pour évaluer les flux venant de la gauche ou de la droite, nous divisons l'espace en cellules de taille égale au libre parcours moyen ℓ des particules de traceur. C'est à cette échelle microscopique, mais grande cependant devant la taille des particules, que se font les échanges. Le libre parcours moyen sera considéré dans la suite comme l'échelle minimale de variation des propriétés moyennes : concentration, température, vitesse.

Avec ces hypothèses, le flux J_+ s'écrit :

$$J_+ = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,n\,(x_0 - \ell)\,\bar{u}. \tag{1.37a}$$

Le facteur supplémentaire $1/2$ donne la fraction de particules qui se dirigent dans la direction des x positifs ; $n(x_0 - \ell)$ est le nombre de molécules de traceur par unité de volume dans le plan d'abscisse $x_0 - \ell$. La formule (1.37a) représente simplement la définition classique du flux où le facteur $1/6$ permet de tenir compte des différentes orientations des vitesses. L'hypothèse principale est l'introduction de l'abscisse $x_0 - \ell$ ce qui revient à supposer que toutes les particules ont fait, pour arriver en x_0, un saut d'une longueur juste égale à ℓ. On écrit de même le flux J_- des particules venant de la droite :

$$J_- = \frac{1}{6}\,n(x_0 + \ell)\,\bar{u}. \tag{1.37b}$$

Le flux global $J = J_+ - J_-$ résultant du gradient de concentration $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ est donc :

$$J = \frac{1}{6}\bar{u}\,[n(x_0 - \ell) - n(x_0 + \ell)] = -\frac{1}{3}\,\bar{u}\,\ell\,\frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x} = -D_m\,\frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{1.38}$$

L'équation (1.36), qui en résulte immédiatement, coïncide exactement (y compris le coefficient $1/3$) avec le résultat que donne un calcul plus exact dans l'approximation des gaz parfaits.

■

Application numérique à l'hélium gazeux

On applique la formule (1.36) à l'hélium dans les conditions normales de température et de pression. La masse d'un atome d'hélium est $m = \mathcal{M}/\mathcal{N}$ où

$\mathcal{N} = 6{,}02 \times 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro et $\mathcal{M} = 4 \times 10^{-3}$ kg est la masse molaire de l'hélium. La vitesse thermique moyenne $\bar{u}$ de l'atome d'hélium est donnée par :

$$\frac{1}{2}\, m\bar{u}^2 = \frac{3}{2}\, k_B T \tag{1.39a}$$

soit :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \tag{1.39b}$$

où $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann. On en déduit la valeur $\bar{u} = 1\,370 \text{ m s}^{-1}$.

Le libre parcours moyen ℓ est donné par le résultat classique de la théorie cinétique des gaz :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} n\, \sigma_c} \tag{1.40}$$

où $\sigma_c = 1,5 \times 10^{-19}$ m^2 est la section efficace de l'atome d'hélium et le nombre n d'atomes par unité de volume est $n = \mathcal{N}/\mathcal{V}$ où le volume molaire $\mathcal{V}$ vaut $22{,}4 \times 10^{-3}$ m^3.

On en déduit :

$$\ell = 1{,}8 \times 10^{-7} \text{ m} \qquad \text{et :} \qquad D_m = \frac{1}{3}\, \bar{u}\ell = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Justification de l'équation (1.40). Elle signifie que, dans un cylindre de section σ_c et de longueur ℓ, il y a en moyenne une particule : ce cylindre représente en effet le volume « balayé » par la molécule lorsqu'elle se déplace d'une distance ℓ. À l'intérieur de ce volume devra se trouver une autre particule pour qu'il puisse y avoir choc.

Notons que, dans ce modèle valable pour un gaz parfait (particules sans interactions), la diffusivité D_m croît comme $\sqrt{T}$ avec la température, à densité n constante (puisque $\bar{u}$ varie de même).

Remarque. Dans une approche plus rigoureuse de la « théorie cinétique », on distingue la vitesse quadratique moyenne $u_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{u}^2} = \sqrt{3k_B T/m}$ et la moyenne de la valeur absolue de la vitesse $\bar{u} = \overline{|u|} = \sqrt{8k_B T/m}$. La première ($u_{rms}$) apparaît dans la dérivation microscopique de la pression dans un gaz parfait de particules sans interaction. La seconde ($\bar{u}$) est celle qui intervient dans la détermination des propriétés de transport. Cependant, ces valeurs ne diffèrent que de 60 %. Cette distinction n'est donc pas nécessaire dans le cas présent, puisque nous sommes surtout intéressés par des ordres de grandeur.

Calcul de la diffusivité thermique pour un gaz parfait

Avec un raisonnement du même type que celui utilisé pour le coefficient de diffusion moléculaire, on trouve les valeurs suivantes pour la conductivité et la diffusivité thermiques :

$$k = \frac{1}{2}\, \rho\, C_v \bar{u}\, \ell \tag{1.41a}$$

et :

$$\kappa = \frac{k}{\rho\, C_v} = \frac{\bar{u}\,\ell}{2}. \tag{1.41b}$$

où la vitesse d'agitation thermique $\bar{u}$ est donnée par l'équation (1.39b), ρ est la masse volumique et C_v la capacité thermique à volume constant. La diffusivité thermique κ a une expression très proche de D_m. Le mécanisme qui contrôle le transport – la diffusion par agitation thermique – est en effet le même dans les deux cas.

Notons que la conductivité thermique k est indépendante du nombre n de molécules par unité de volume tant que l'approximation de gaz parfait reste valable. En effet, ρC_v est proportionnel à la densité n et la relation (1.41a) contient donc le produit $\ell\, n = n/(\sqrt{2}n\sigma)$ qui est indépendant de n. Ce résultat, *a priori* surprenant, se comprend si l'on réalise que, en augmentant le nombre n de particules par unité de volume, on augmente la fréquence des chocs entre particules, mais on diminue d'autant le libre parcours moyen et, par suite, l'efficacité du transport.

Démonstration. Ici, on suppose que l'on a, d'une part, une seule sorte de particules et que leur nombre n par unité de volume est constant. D'autre part, on suppose que l'on a un gradient de température constant suivant Ox. Compte tenu de la relation (1.39b), on aura donc également un gradient de la vitesse $\bar{u}$. Par ailleurs, les relations comme (1.37) et (1.38), qui évaluaient des flux de particules, vont représenter maintenant des flux thermiques notés J_Q avec :

$$J_{Q+} = \frac{1}{6}\rho\, C_v T(x_0 - \ell)\, \bar{u}\,(x_0 - \ell) \tag{1.42a}$$

et :

$$J_{Q-} = \frac{1}{6}\rho\, C_v T(x_0 + \ell)\, \bar{u}\,(x_0 + \ell). \tag{1.42b}$$

La quantité $\rho\, C_v T$ représente l'énergie par unité de volume associée au mouvement d'agitation thermique des molécules.

Remarquons que, à la différence du cas précédent de la diffusion de masse, il intervient dans les flux thermiques J_{Q+} et J_{Q-} à la fois les variations spatiales de température et les variations spatiales de la vitesse moyenne $\bar{u}$ d'agitation thermique, dues au gradient de température. Le flux thermique global J_Q s'écrit à l'aide des relations (1.40) et (1.41) :

$$J_Q = J_{Q+} - J_{Q-} = -\frac{1}{2}\,\rho\, C_v \bar{u}(x_0)\ell\, \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = -k\, \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.43}$$

d'où l'on déduit immédiatement les expressions (1.41a-b). ■

Validité des modèles de gaz parfait

Les résultats obtenus ci-dessus ne s'appliquent ni aux gaz à très faibles pressions, ni aux gaz denses qui ont des propriétés proches de celles des liquides.

– Dans le premier cas, si le libre parcours moyen ℓ devient très supérieur à la taille L du récipient qui le contient, il y a essentiellement des chocs avec la paroi et peu de collisions entre particules. Or, ces collisions sont nécessaires pour établir l'état d'équilibre statistique décrit par la théorie cinétique des gaz. Ce régime, dit de *Knudsen*, est obtenu dans des cavités sous très faible pression : en effet, pour une pression de l'ordre de 0,1 Pascal, le libre parcours moyen des molécules de gaz devient de l'ordre de la dizaine de centimètres. On peut donc atteindre le régime de Knudsen dans des tubes de taille macroscopique.

– L'autre limite est celle où la distance moyenne entre particules (de l'ordre de $n^{-1/3}$) est comparable au libre parcours moyen. C'est le cas des liquides que nous allons traiter maintenant.

1.3.3 Phénomènes de transport diffusif dans les liquides

À la différence des gaz, on ne peut pas comprendre les différents coefficients de transport dans les liquides à partir d'un modèle simple et unique comme celui de la théorie cinétique. Nous discutons ici brièvement les cas de la diffusion de masse et de la diffusion thermique.

Coefficient de diffusion moléculaire dans les liquides

Lorsque nous avons étudié le transport dans les gaz, nous avons négligé les interactions entre molécules dans l'intervalle de temps entre deux chocs. Dans les liquides, les interactions restent toujours très importantes. Aussi, nous allons commencer par étudier la diffusion de particules sphériques de rayon R utilisées comme traceurs : dans ce cas, si la particule se déplace par rapport au liquide avec une vitesse $\mathbf{v}$, la force d'interaction avec celui-ci est égale à la *force de Stokes* :

$$\mathbf{F}_1 = -6\pi\,\eta R\mathbf{v}, \tag{1.44}$$

où η est un coefficient appelé coefficient de viscosité, caractéristique du fluide, qui sera défini au chapitre 2. Cette expression de la force d'interaction sera établie à la section 9.4.2. Si la particule est assez petite (typiquement pour R inférieur à un micromètre), les effets d'agitation thermique sont suffisamment importants pour que l'on puisse calculer le coefficient de diffusion moléculaire correspondant. Il suffit alors d'extrapoler vers les petites tailles pour estimer le coefficient de diffusion d'un traceur moléculaire. On peut mettre la relation (1.44) sous la forme :

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\mathbf{v}}{\mu} \tag{1.45}$$

avec :

$$\mu = \frac{1}{6\,\pi\,\eta\,R} \tag{1.46}$$

(μ est appelé *coefficient de mobilité*). Dans un célèbre article sur le mouvement brownien publié en 1905, Einstein a établi la relation générale suivante entre le coefficient de diffusion moléculaire D_m et la mobilité μ :

$$D_m = \mu k_B T \tag{1.47}$$

soit, d'après (1.46) :

$$D_m = \frac{k_B T}{6\,\pi\,\eta\,R}. \tag{1.48}$$

On note que le coefficient D_m représente un étalement en l'absence de force extérieure mais en présence d'agitation thermique, alors que la mobilité μ est définie en présence d'une force extérieure $\mathbf{F}_1$.

La relation (1.48) s'applique assez bien jusqu'à des rayons de particules de taille moléculaire et donne donc un ordre de grandeur de coefficients de diffusion de liquides. Ainsi, pour une molécule de 1 nm de diamètre avec une viscosité $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, on trouve : $D_m = 2{,}2 \times 10^{-10}$ m^2 s^{-1}. Cette valeur est très inférieure à celle obtenue dans les gaz.

Démonstration de la relation d'Einstein. Pour démontrer la relation d'Einstein, nous allons écrire, dans un cas particulier, l'équilibre entre les effets de l'agitation thermique et d'une force extérieure. Supposons un ensemble de particules d'un traceur quelconque (moléculaire ou non), de mobilité μ et de coefficient de diffusion D_m placé dans un champ de force $\mathbf{f}$ constant parallèle à l'axe Ox. En pratique, ce modèle peut, par exemple, correspondre au comportement d'un ensemble de particules browniennes sédimentant sous l'effet de la gravité. Elles sont supposées en équilibre thermique avec un thermostat à température T. Le champ de force $\mathbf{f}$ crée un potentiel $U = -fx$. La présence de ce potentiel crée un gradient $(\mathrm{d}n/\mathrm{d}x)$ du nombre n de particules par unité de volume ; localement, $n(x)$ vérifie la loi de distribution de Boltzmann :

$$n(x) = n_0\,\mathrm{e}^{-\frac{U}{k_B T}} = n_0\,\mathrm{e}^{\frac{fx}{k_B T}} \tag{1.49}$$

d'où :

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{f}{k_B T}. \tag{1.50}$$

Le gradient $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ induit un flux diffusif J_m de particules avec :

$$J_m = -D_m \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = -D_m n\,\frac{f}{k_B T}. \tag{1.51}$$

La force f induit une vitesse de dérive moyenne des particules $v_d = \mu f$. Notons que v_d est une vitesse moyenne de l'ensemble des particules ; elle peut être très inférieure à la vitesse d'agitation thermique d'orientation aléatoire des particules prises individuellement. À v_d correspond un flux J_d de particules avec :

$$J_d = n\ v_d = n\,\mu f. \tag{1.52}$$

À l'équilibre statistique, les deux flux doivent se compenser avec $J_m + J_d = 0$. En reportant les équations (1.51) et (1.52) dans cette égalité, on retrouve bien la relation d'Einstein (1.47).

Conductivité thermique des liquides

Dans un liquide, il existe deux mécanismes de transfert thermique. Le premier correspond à la propagation de proche en proche des vibrations des particules individuelles du liquide, telle que l'on peut se la représenter approximativement dans l'expérience modèle qui utilise un ensemble dense de palets mis en vibration (Fig. 1.1). Le second existe pour les métaux à l'état liquide (Hg, Na...) et se fait par l'intermédiaire des électrons responsables de la conduction électrique. Ces deux mécanismes sont similaires à ceux qui assurent la conduction thermique dans un solide cristallin ; nous ne les étudierons pas ici. Notons toutefois la grande efficacité du mécanisme par transport électronique qui fait que les métaux liquides sont de bons conducteurs thermiques tout en ayant une capacité thermique élevée. Le sodium liquide est, par exemple, utilisé comme fluide caloporteur dans les échangeurs thermiques des réacteurs nucléaires surgénérateurs.

Valeurs des coefficients de transport diffusif

Dans le tableau 1.2, on trouvera des valeurs des coefficients de transport diffusif pour quelques corps purs. Aux coefficients D_m et κ analysés au cours de ce chapitre, nous avons ajouté le coefficient de *viscosité cinématique* ν. Il représente la diffusivité de la quantité de mouvement et sa signification physique sera discutée en détail au chapitre 2 (ν est relié à la viscosité dynamique η introduite dans la relation (1.44) et à la masse volumique ρ par $\nu = \eta/\rho$). Les coefficients D_m, κ et ν ont tous trois la même dimension $[L]^2[T]^{-1}$. Dans de nombreux processus, deux phénomènes de diffusion pourront intervenir simultanément ; leur efficacité relative sera alors un paramètre très important. On la caractérise par un nombre sans dimension qui est le rapport des constantes de temps de diffusion des quantités considérées sur une distance de l'ordre de la taille caractéristique L de l'écoulement. Nous verrons plusieurs exemples de tels nombres sans dimension dans la section 2.3. Ils jouent un rôle important dans de nombreux phénomènes de transfert d'énergie thermique et de matière.

1.4 Effets de surface et tension superficielle

Les interfaces entre un liquide et un autre corps, qu'il s'agisse d'un gaz, d'un autre liquide ou d'un solide, jouent un rôle très important dans l'équilibre et l'écoulement de films ou de nappes fluides. Nous allons d'abord introduire le coefficient de tension superficielle et discuter sa relation avec l'énergie de ces interfaces.

1.4.1 La tension superficielle

Mise en évidence des effets de la tension superficielle

Considérons l'expérience représentée par la figure 1.14 : un film de liquide (de l'eau savonneuse par exemple) est supporté par un cadre rectangulaire

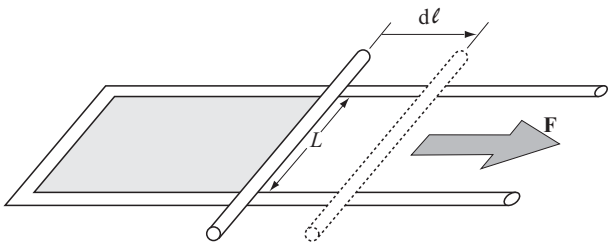


FIG. 1.14 – Principe de la mise en évidence de la tension superficielle.

dont l'un des côtés est mobile. Si nous laissons ce côté libre, on constate qu'il se déplace de façon à diminuer la surface du film. Pour le maintenir en place, il est nécessaire d'exercer une force F qui est proportionnelle à la longueur L du côté libre. Pour accroître la surface du film d'une quantité $\mathrm{d}S = L\ \mathrm{d}\ell$, il faut fournir une énergie $\mathrm{d}W$ qui correspond au travail de la force F et s'exprime par :

$$\mathrm{d}W = F\ \mathrm{d}\ell = 2\gamma\ L\ \mathrm{d}\ell = 2\gamma\ \mathrm{d}S. \tag{1.53}$$

γ est appelé coefficient de *tension superficielle* entre le liquide considéré et l'air ; le facteur 2 traduit le fait que le film de liquide est constitué de deux interfaces liquide-air. La relation (1.53) montre que γ correspond à une énergie par unité de surface de chaque interface ; il représente également la norme de la force par unité de longueur exercée par chaque interface sur le côté du cadre. Son unité est donc le newton par mètre ($\mathrm{N.m^{-1}}$). Sa valeur pour l'eau pure à la température ambiante est environ 70×10^{-3} $\mathrm{N.m^{-1}}$. Dans le tableau 1.1 sont reportées les valeurs numériques de la tension superficielle et de sa variation avec la température pour quelques liquides usuels (les valeurs données correspondent à la tension superficielle entre les liquides et l'air ; elles sont différentes dans le cas d'interfaces entre deux liquides, ou entre un liquide et un solide, comme nous le verrons au paragraphe suivant).

Les phénomènes de tension superficielle ont pour effet de minimiser l'aire de l'interface, compte tenu des contraintes imposées par ailleurs au système (gravité, pression...). En particulier, en l'absence de gravité, une goutte prend une forme sphérique car celle-ci assure une surface minimale pour un volume donné.

Origine physique des forces de tension superficielle

La tension superficielle est associée aux forces de cohésion internes qui s'exercent entre les molécules d'un fluide : forces de van der Waals, liaisons hydrogène (dans l'eau par exemple), liaisons ioniques, liaisons métalliques (dans les métaux comme le mercure). Dans un fluide en volume, les forces exercées par chaque molécule sont équilibrées par celles exercées par les molécules voisines. Si l'on introduit une interface, par exemple avec le vide, les forces

TAB. 1.1 – Ordre de grandeur de quelques paramètres physiques caractérisant les propriétés interfaciales de liquides usuels.

	Tension superficielle γ ($\mathrm{N.m^{-1}}$)	Variation de γ avec la température $b = -\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}T$ ($\mathrm{mN.m^{-1}.K^{-1}}$)	Longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ (m)
Métaux liquides	7×10^{-2} à 2,5	10^{-2}–10^{-1}	2 à 5×10^{-3}
Liquides organiques	50×10^{-3}	10^{-2}–10^{-1}	1 à 3×10^{-3}
Sels fondus	10^{-1}	10^{-2}	2 à 3×10^{-3}
Huiles silicones	20×10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}
Eau	70×10^{-3}	10^{-1}	3×10^{-3}
Verre fondu	10^{-1}	10^{-2}	5×10^{-3}

exercées dans sa direction ne sont plus équilibrées : c'est l'origine de l'énergie superficielle. La valeur de la tension superficielle sera très variable suivant la nature des forces qui s'exercent entre les atomes ou les molécules. La tension superficielle élevée de beaucoup de métaux liquides (0,48 $\mathrm{N.m^{-1}}$ pour le mercure et jusqu'à 2,5 $\mathrm{N.m^{-1}}$ pour l'osmium à 3 000 K) s'explique par la forte valeur des énergies associées aux liaisons métalliques ; les forces de Van der Waals, qui jouent un rôle prépondérant dans de nombreux corps moléculaires, donnent des valeurs seulement de l'ordre de 20×10^{-3} à 25×10^{-3} $\mathrm{N.m^{-1}}$.

La tension superficielle définie précédemment concerne une interface entre un corps et le vide. Dans le cas du contact entre deux corps, l'énergie de surface de chacun des corps est modifiée par la présence de l'autre et l'on parle alors de *tension interfaciale*. Cette dernière dépend de la tension superficielle de chacun des deux composés, ainsi que de l'énergie d'interaction entre les deux composés. Pour bien indiquer qu'il s'agit d'une tension interfaciale, on précise en indice les corps en présence ; ainsi, γ_{AB} représente la tension interfaciale (c'est-à-dire l'énergie par unité de surface) entre le corps A et le corps B.

Influence de la température sur la tension superficielle

La diminution de la cohésion d'un liquide lorsque la température augmente se traduit par une diminution de la tension superficielle avec la température. Pour des variations modérées de température, on peut utiliser la dépendance linéaire suivante :

$$\gamma(T) = \gamma(T_0)[1 - b(T - T_0)]. \tag{1.54}$$

Le coefficient b, de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} $\mathrm{K^{-1}}$, est positif, ce qui traduit la diminution de l'énergie de surface lorsque la température augmente. Ainsi, le coefficient de tension superficielle s'annule au point critique. Nous verrons à la section 8.2.4 que ces variations peuvent induire des écoulements (effet Marangoni).