

Nicolas Simon | Séverine Bagard

VISA POUR LA PRÉPA

PHYSIQUE-CHIMIE

MPSI · PCSI · MP2I
PTSI · TSI · BCPST · TPC

l'intel

DUNOD

© Dunod, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088478-0

Table des matières

Outils	1
Outil 1 Calcul mental et approximations numériques	1
Outil 2 Dérivation, intégration : bases, utilisation et interprétation	5
Outil 3 Logarithmes et exponentielles	16
Outil 4 Manipulation d'équations	23
Outil 5 Équations différentielles	26
Outil 6 Trigonométrie	29
Outil 7 Analyse vectorielle	34
1. Structure de la matière	39
1.1 Les atomes	39
1.2 La liaison de covalence	47
1.3 Les associations d'atomes	48
1.4 Les molécules de la chimie organique	54
1.5 Spectres d'émission et d'absorption des atomes	64
1.6 Analyse spectrale en chimie	67
Exercices et solutions	70
2. Méthodes physiques de détermination d'une quantité de matière	76
2.1 Mesure de l'abondance d'un échantillon de matière	76
2.2 Les méthodes physiques d'analyse d'une solution	79
Exercices et solutions	91
3. Transformations chimiques en solutions aqueuses	98
3.1 Modélisation d'une transformation chimique	98
3.2 Interprétation des équilibres chimiques et détermination de la composition d'un système à l'équilibre	105
3.3 Équilibres acido-basiques	111
3.4 Équilibres d'oxydoréduction	121
Exercices et solutions	132
4. Méthodes chimiques de détermination d'une quantité de matière	140
4.1 Principe d'un titrage	140
4.2 Méthodes de suivi d'un titrage	145
Exercices et solutions	156

5.	Cinétique d'une transformation chimique	164
5.1	Facteurs cinétiques	164
5.2	Cinétique chimique : loi de vitesse d'ordre 1	166
	Exercices et solutions	171
6.	Les lois de Newton et leurs applications	178
6.1	La cinématique	178
6.2	La dynamique et les lois de Newton	183
6.3	Les interactions	185
6.4	Mouvement d'un point matériel dans un champ uniforme	187
6.5	Mécanique céleste	188
	Exercices et solutions	192
7.	Caractérisation des phénomènes ondulatoires	198
7.1	Généralités sur les ondes mécaniques progressives (OMP)	198
7.2	Les phénomènes liés aux ondes	205
	Exercices et solutions	217
8.	Introduction à la mécanique quantique	225
8.1	La physique des quantas	225
8.2	La structure de l'atome et l'interaction noyau-électron	230
8.3	La dualité onde-corpuscule	232
	Exercices et solutions	234
9.	Optique géométrique	241
9.1	Généralités sur la lumière	241
9.2	Les lentilles minces	244
9.3	Les instruments d'optique	253
	Exercices et solutions	258
10.	Électrocinétique	262
10.1	Phénomènes, grandeurs et lois de base de l'électrocinétique	262
10.2	Les dipôles et leurs caractéristiques	268
10.3	Exemple d'étude d'un régime transitoire : cas du circuit RC	274
	Exercices et solutions	280
11.	Aspects énergétiques	289
11.1	Énergie et puissance	289
11.2	Aspects énergétiques des phénomènes mécaniques	292
11.3	Aspects énergétiques des phénomènes électriques	298
11.4	Aspects énergétiques des phénomènes thermodynamiques	303
11.5	Un mot concernant les gaz	310
	Exercices et solutions	313
	Index	323

Outils



Les outils mathématiques développés dans les pages qui suivent sont présentés dans une version simplifiée à outrance, avec pour seul but d'offrir quelques axes de compréhension générale et quelques techniques utiles à la physique et à la chimie.

En particulier, les obligations préalables à l'exécution de tel ou tel calcul (domaine de définition, dérivabilité d'une fonction, conditions de signe...) seront régulièrement omises, en ce que notre but n'est pas de dresser une théorie exhaustive, mais un mode d'emploi pratique et aussi concis que possible.

On gardera en particulier à l'esprit que cette approche ne prétend en aucun cas se substituer aux merveilles de rigueur démonstrative que vous aurez loisir d'étudier auprès de nos ami-e-s mathématicien-ne-s.

Les outils présentés ci-après sont donc une aide mais leur lecture n'est pas un préalable indispensable. Vous trouverez en marge du cours ou en pied de page des exercices les outils auxquels vous référer si vous en éprouvez le besoin.

Outil 1 Calcul mental et approximations numériques

Intérêt

Un premier outil à maîtriser pour évoluer avec aisance dans les exercices de sciences physiques est le calcul mental. Celui-ci permet notamment de :

- Se dispenser de la calculatrice pour mener certaines applications numériques. L'usage abusif de la calculatrice s'accompagne en effet d'inconvénients non négligeables :
 - perte de temps ;
 - multiplication du risque d'erreur lors de la saisie des calculs (touche erronée, mal enfoncée ou au contraire enfoncée plusieurs fois par mégarde, oubli de parenthèses...).
- Résoudre certains exercices lorsque la calculatrice est interdite, ou que seul un ordre de grandeur est demandé par l'énoncé (dans ce second cas, même si la calculatrice est autorisée, tout gain de temps est le bienvenu, en particulier dans le cadre d'un concours).
- Déterminer l'ordre de grandeur d'un résultat intermédiaire afin d'en vérifier la crédibilité.
- Montrer à un jury d'oral que vous disposez d'une compétence dont il regrette souvent la rarefaction chez les étudiant-e-s.
- Réduire votre dépendance psychologique à cet instrument, et ce faisant vous permettre de garder la tête froide en cas d'imprévu (piles à plat, panne, question à brûle-pourpoint lors d'un oral...).

Axes de travail et de progression

Vous pouvez agir à plusieurs niveaux pour améliorer vos capacités dans ce domaine.

Connaître quelques résultats simples

- tables de multiplication ;
- inverses courants ; en se fondant sur la suite d'approximations suivantes :

$$2 \times 50 \approx 3 \times 33 \approx 4 \times 25 \approx 5 \times 20 \approx 6 \times 17 \approx 7 \times 14 \approx 8 \times 12 \approx 9 \times 11 \approx 100$$

On trouve aisément les résultats approchés suivants :

$\frac{1}{2} = 0,50$	$\frac{1}{3} \approx 0,33$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,20$	$\frac{1}{6} \approx 0,17$	$\frac{1}{7} \approx 0,14$	$\frac{1}{8} \approx 0,12$	$\frac{1}{9} \approx 0,11$
----------------------	----------------------------	----------------------	----------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

$\frac{1}{11} \approx 0,09$	$\frac{1}{12} \approx 0,08$	$\frac{1}{14} \approx 0,07$	$\frac{1}{17} \approx 0,06$	$\frac{1}{20} = 0,05$	$\frac{1}{25} = 0,04$	$\frac{1}{33} \approx 0,03$	$\frac{1}{50} = 0,02$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------

En outre, la fonction inverse étant strictement décroissante, on sait que si l'on divise par un nombre situé entre deux de ceux recensés ci-dessus, la valeur obtenue se situera entre leurs inverses respectifs. Par exemple on peut en première approximation envisager que :

$$12 < 13 < 14 \Rightarrow 0,08 \approx \frac{1}{12} > \frac{1}{13} > \frac{1}{14} \approx 0,07 \Rightarrow \frac{1}{13} \approx 0,075$$

Et de fait, en toute rigueur $13 \times 0,075 = 0,975$: cette approximation induit moins de 3 % d'erreur ; pour un calcul ouvertement approximatif, l'écart n'a rien de scandaleux.

Maîtriser les puissances de 10, en particulier les relations suivantes (valables pour toute puissance)

$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$	$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$	$10^{-b} = \frac{1}{10^b}$	$(10^a)^b = 10^{a \times b}$
-------------------------------	--------------------------------	----------------------------	------------------------------

- Penser à utiliser les identités remarquables.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

- Idem pour les identités remarquables trigonométriques (cf. Outil 6 sur la trigonométrie).
- Décomposer les calculs complexes en calculs plus simples.
- Repérer un terme négligeable devant un autre dans une addition ou une soustraction.
- Connaître les approximations usuelles sur certaines fonctions et leur contexte de validité.

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta_{\text{rad}} \quad \text{dès lors que} \quad \theta \ll 1 \text{ rad} \approx 60^\circ$$

$$(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1+\alpha \times \varepsilon$$

dès lors que $\varepsilon \ll 1$ en particulier si $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$$

Et de manière plus générale :

$$f(1+\varepsilon) \approx f(1) + [f'(1)] \times \varepsilon$$

dès lors que $\varepsilon \ll 1$

NB : l'approximation ci-dessus se comprend aisément en partant de la définition de la dérivée de f au voisinage de $x=1$ (cf. Outil 2 sur les calculs différentiel et intégral). Vous apprendrez en CPGE à développer ce type de technique à des degrés plus élevés, appelés **développements limités**.

- Reformuler une expression numérique sous forme plus simple.
- Vous astreindre à travailler cette compétence dès que l'occasion se présente (le cerveau est un muscle comme les autres : entraîné il gagne en puissance, négligé il fait du gras).

Exemples

Volume molaire des gaz dans les conditions ordinaires de température et de pression

$$\text{L'expression de départ est : } V_m = \frac{RT}{P} = \frac{8,314 \text{ SI} \times 293 \text{ K}}{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

On constate ici que R est un peu plus grand que 8, tandis que T est un peu plus petit que 300. Le produit des deux a donc de bonnes chances de nous donner un résultat de l'ordre de $3 \times 8 \times 10^2 = 24 \cdot 10^2 = 2,4 \times 10^3$ SI. Avec le dénominateur très proche de 10^5 Pa, le résultat final se situera donc autour de $2,4 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, soit encore $24 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Dans le cas présent, il se trouve que la valeur est précisément la bonne. Il s'agit clairement d'un coup de chance, mais aurions-nous commis une erreur de 10 ou même 20 %, que l'ordre de grandeur resterait respecté.

Valeur du champ de gravitationnel à 100 km au-dessus du niveau de la mer

L'expression de départ est :

$$g_T = G \times \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI} \times \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,38 \cdot 10^6 \text{ m} + 1,00 \cdot 10^5 \text{ m})^2}$$

Dans un premier temps, on constate que l'altitude envisagée est faible devant le rayon terrestre : bien que les deux puissances aient de quoi impressionner à l'échelle humaine (10^7 m pour l'une, 10^5 m pour l'autre), il n'en demeure pas moins que l'altitude considérée est plus de 60 fois plus faible que le rayon terrestre R_T . Dans le cadre d'un calcul approché, il est donc licite de négliger h devant R_T , et l'on peut réduire le calcul à :

$$g_T = G \times \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \approx G \times \frac{M_T}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI} \times \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,38 \cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

À partir de là, le calcul se résume à une affaire de puissances de 10, et de radicaux tous assez proches de 6.

Le produit des radicaux au numérateur sera donc voisin de 36, tout comme le carré du 6,38 figurant au dénominateur. Il ne reste donc plus qu'à effectuer la puissance de 10 :

$$\frac{10^{-11} \text{ SI} \times 10^{24} \text{ kg}}{10^{12} \text{ m}^2} = \frac{10^{13} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}}{10^{12} \text{ m}^2} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La vraie valeur est cette fois de $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On constate une nouvelle fois que la valeur approchée est, au moins en ordre de grandeur, largement satisfaisante.

Vouloir obtenir précisément la valeur selon cette démarche de calcul approché serait d'un coupable optimisme. On peut cependant tout de même tirer une information supplémentaire liée au fait que la valeur du champ soit calculée en altitude. En effet, si nous reprenons l'égalité vue plus haut, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} g_T(h) &= G \times \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \\ &= \frac{GM_T}{R_T^2} \times \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = g_T(0) \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) \end{aligned}$$

On peut ainsi obtenir une approximation de la variation relative du champ de pesanteur à l'altitude h par rapport à sa valeur au niveau de la mer :

$$\frac{\Delta g_T}{g_T(0)} = \frac{|g_T(h) - g_T(0)|}{g_T(0)} = \frac{2h}{R_T}$$

Avec $h = 100 \text{ km}$ et $R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$, on trouve un rapport de l'ordre de :

$$\frac{2h}{R_T} \approx \frac{200}{6400} = \frac{1}{32} \approx \frac{1}{33} = 0,03$$

On peut ainsi conclure que la variation de la valeur du champ de pesanteur terrestre consécutive à une élévation de 100 km au-dessus du niveau de la mer est de l'ordre de 3 %.

Une autre méthode serait de considérer que $\frac{1}{32} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{0,125}{4} \approx \frac{0,12}{4} + \frac{0,005}{4} = 0,03 + 0,00125 = 3,125 \%$. Une fois encore, l'erreur commise est minime et l'approximation précédente est valide.

Valeur de la force électrique entre un proton et un électron dans un atome d'hydrogène

L'expression de départ est :

$$F_{e,p/e} = k \times \frac{e^2}{r^2} = 8,99 \cdot 10^9 \text{ SI} \times \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(0,50 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2}$$

Ici encore, il peut être judicieux de traiter les puissances de 10 d'un côté, et les radicaux de l'autre. On constate par ailleurs que le calcul à effectuer engage le rapport de deux carrés, autrement dit le carré du rapport : il suffit de calculer $\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{0,50 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$, puis de le porter au carré, et ensuite de multiplier le résultat obtenu par la valeur de la constante de Coulomb, k . Dans le quotient évoqué ci-dessus, le rapport des puissances de 10 donne 10^{-9} , qui porté au carré donnera 10^{-18} . Pour ce qui est du rapport des radicaux, la division par 0,50 revient à une multiplication par 2, et le résultat sera donc de l'ordre de 3,2. Cette dernière valeur étant légèrement supérieure à 3, son carré sera légèrement supérieur à 9 et une approximation par 10 ne semble donc pas absurde (les plus avertis auront peut-être même repéré un 32 caché, autrement dit une puissance de 2, dont le carré est 1024 ; autrement dit $3,2^2 = \left(\frac{32}{10}\right)^2 = \frac{32^2}{10^2} = \frac{1024}{100} = 10,24$). Le quotient des carrés serait donc de l'ordre de $10 \times 10^{-18} = 10^{-17} \text{ C}^2 \cdot \text{m}^{-2}$. En approximant $8,99 \cdot 10^9$ par $9 \cdot 10^9$, le résultat sera donc voisin de $9 \cdot 10^9 \text{ SI} \times 10^{-17} \text{ C}^2 \cdot \text{m}^{-2}$, soit finalement $9 \cdot 10^{-8} \text{ N}$.

Outil 2 Dérivation, intégration : bases, utilisation et interprétation

Nombre dérivé d'une fonction en une valeur particulière de sa variable

Pour commencer revenons aux fondamentaux de la dérivation, trop souvent ignorés ou mécompris par beaucoup d'étudiant.e.s. On appelle **nombre dérivé** $f'(x_0)$ d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'une valeur x_0 de sa variable, la valeur définie par :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque : vous avez probablement vu en mathématiques une version où l'élément variable était réduit à l'écart h entre x et x_0 :

$$h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

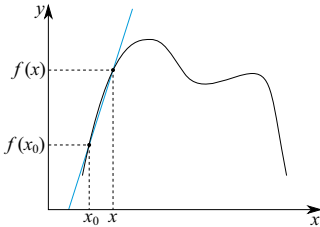
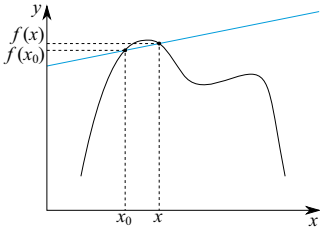
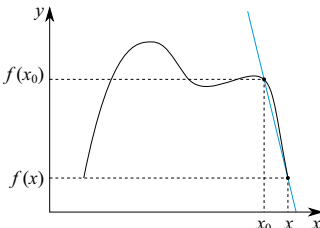
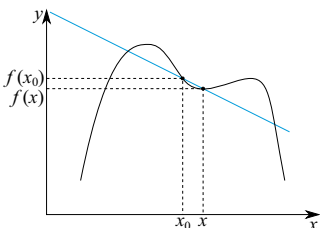
Les deux versions se valent, cependant nous utiliserons la première qui nous permet de mieux faire le lien avec la notion d'accroissement, ainsi qu'avec l'interprétation graphique (cf. plus loin). La seconde version ci-dessus est rappelée pour faire le lien avec ce que vous avez pu voir en cours de mathématiques au lycée.

Cette définition assez abstraite mérite quelques détails pour être bien comprise. Partons donc du **taux d'accroissement** ; il s'agit d'une fonction $T_{(f, x_0)}(x)$ associée à la fonction f au voisinage d'une certaine valeur x_0 de sa variable, et qui établit un rapport entre la variation de cette fonction au voisinage de cette valeur, et la variation correspondante de la variable en question :

$$T_{(f, x_0)}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0}$$

Dans la notation de droite, les « Δ » désignent des variations, et l'indice x_0 précise que ces variations sont prises au voisinage de la valeur x_0 de la variable x .

Le taux d'accroissement de la fonction $f(x)$ permet ainsi qualifier l'évolution globale de celle-ci entre x et x_0 :

	$ T_{(f,x_0)}(x) $ élevé $ f(x) - f(x_0) $ forte pour $ x - x_0 $ donnée	$ T_{(f,x_0)}(x) $ faible : $ f(x) - f(x_0) $ faible pour $ x - x_0 $ donnée
$T_{(f,x_0)}(x) > 0$: $[f(x) - f(x_0)]$ et $(x - x_0)$ sont de même signe	Croissance rapide 	Croissance lente 
$T_{(f,x_0)}(x) < 0$: $[f(x) - f(x_0)]$ et $(x - x_0)$ sont de signes opposés	Décroissance rapide 	Décroissance lente 

Graphiquement, la valeur du taux d'accroissement correspond donc à la pente (ou « coefficient directeur » si l'on adopte la terminologie mathématique) de la droite passant par les points d'abscisses respectives x et x_0 , de la courbe représentative de la fonction $f(x)$.

Notons également qu'en sciences physiques, l'objectif d'une fonction est en général de modéliser la dépendance d'une grandeur physique vis-à-vis d'un autre. Si par exemple on considère l'expression de la pression P exercée par un gaz parfait en fonction du volume V qui lui est offert, alors à quantité de matière et température constantes nous savons que (loi de Boyle-Mariotte) :

$$P = \frac{A}{V}$$

avec $A = \text{cte}$. P apparaît donc comme dépendant de V , et à ce titre on peut l'exprimer comme une fonction de V :

$$P(V) = \frac{A}{V}$$

Notons au passage que $P(V)$ est une fonction inverse ; en mathématiques, on noterait $f(x) = \frac{A}{x}$.

Dans ce cas le taux d'accroissement de $P(V)$ au voisinage d'une valeur particulière V_0 de la variable V aura pour expression :

$$T_{(P,V_0)}(V) = \frac{P(V) - P(V_0)}{V - V_0} = \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_{V_0}$$

À ce niveau, il importe de bien noter 3 points essentiels :

1. Les sciences physiques jouant avec une multitude de grandeurs différentes, **toutes les fonctions ne s'appellent pas f , et toutes les variables ne s'appellent pas x** . Dans le cas ci-dessus, la fonction se nomme P et la variable V . Mais la mise en scène a beau avoir changé, la pièce de théâtre reste la même.
2. Une même grandeur physique dépend souvent de plusieurs variables. Nous savons par exemple que la pression exercée par le gaz dépend certes du volume qui lui est offert, mais également de la quantité de matière n de molécules qu'il contient, et de la température T à laquelle celles-ci se trouvent portées (nous avons considéré ces deux paramètres constants dans l'exemple précédent pour plus de simplicité, mais dans le cas général P dépend bien de 3 variables). Or toutes ces variables n'auront en général pas la même influence sur la grandeur étudiée (P est par exemple proportionnelle à n et à T avec des coefficients de proportionnalité différents l'un de l'autre, et inversement proportionnelle à V). Il importera donc de bien **préciser par rapport à quelle variable est étudié l'accroissement** (et donc par rapport à quelle variable est considéré le taux d'accroissement).
3. Dans le cadre des sciences physiques, les grandeurs dont les variations sont portées au numérateur et au dénominateur dans l'expression du taux d'accroissement sont des grandeurs physiques. À ce titre elles ont en général des unités, et en tant que rapport de celles-ci, **le taux d'accroissement a également une unité** ; plus précisément, cette unité sera :

$$\text{Unité} \left[T_{(f,x_0)}(x) \right] = \frac{\text{Unité} [\text{grandeur } f]}{\text{Unité} [\text{grandeur } x]} = \text{Unité} [\text{grandeur } f] \cdot (\text{Unité} [\text{grandeur } x])^{-1}$$

Dans le cas de l'exemple traité ci-dessus (étude des variations de la pression exercée par un gaz en fonction du volume qui lui est offert), le taux d'accroissement s'exprimerait ainsi (en USI) en Pa (de variation de pression) par m^3 (de variation de volume), ou de manière plus concise, en $\text{Pa} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le taux d'accroissement d'une fonction $f(x)$ par rapport à sa variable x mesure donc l'importance d'une variation de f consécutive à une variation de x , à travers le rapport de la première à la seconde.

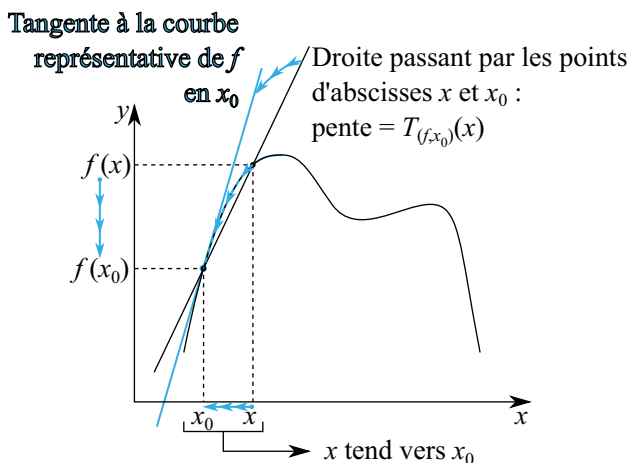
Une fois comprise la signification du taux d'accroissement, celle du nombre dérivé devient très simple puisque le nombre dérivé peut s'écrire :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} T_{(f,x_0)}(x)$$

Le nombre dérivé apparaît donc comme la **limite du taux d'accroissement lorsque l'intervalle de calcul tend vers 0** ($x \rightarrow x_0$ donc $(x - x_0) \rightarrow 0$). Elle représente donc la valeur du taux d'accroissement calculé sur un intervalle infiniment petit au voisinage de x_0 , autrement dit sans aucun effet de moyennage sur le résultat obtenu (si la variable est par exemple le temps, on accède ainsi à la **valeur instantanée** du taux d'accroissement de la fonction).

C'est pour cette raison que :

- Tout comme le taux d'accroissement, **en sciences physiques la dérivée d'une fonction s'exprime avec une unité.**
- La dérivée d'une fonction en une valeur x_0 de sa variable s'identifie à la pente de la tangente à la courbe représentative de cette fonction, au niveau du point d'abscisse x_0 .



Graphiquement :

- Le point d'abscisse x se rapproche de celui d'abscisse x_0
- La droite passant par les points d'abscisses x et x_0 tend vers la tangente

Analytiquement :

- $T_{(f, x_0)}(x)$ tend vers $f'(x_0)$
- La pente tend vers $f'(x_0)$

En effet, la droite passant par les points de la courbe représentative, d'abscisses respectives x et x_0 , devient la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0 , lorsque le second point (celui d'abscisse x) se rapproche indéfiniment du premier. Le taux d'accroissement dont nous avons vu qu'il pouvait être interprété comme la pente de la droite passant par ces deux points tend alors vers sa limite lorsque $x \rightarrow x_0$, qui est par définition la dérivée de la fonction considérée en x_0 .

Il importe par ailleurs de noter qu'en physique, la dérivée d'une fonction $f(x)$ en une valeur x_0 de sa variable ne se notera pas simplement $f'(x_0)$, mais :

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}$$

Cette notation présente en effet plusieurs avantages dans le cadre qui est le nôtre :

- Les « d » sont supposés figurer de petites variations (version infinitésimale des « Δ » utilisés plus haut dans la définition du taux d'accroissement). Ils explicitent ainsi le fait que la dérivée est un taux d'accroissement, et ce faisant rappellent constamment le sens physique de cette grandeur.

- En détaillant les grandeurs dont on prend les variations respectives au numérateur et au dénominateur :
 - On évite le risque de confusion dans le cas où la grandeur étudiée dépend de plusieurs variables. Si par exemple on reprend l'étude de la pression exercée par un gaz, une notation du type « $P'(V, n, T)$ » ne permettrait pas de savoir par rapport à laquelle des trois variables V , n ou T on considère la dérivation. Vous apprendrez d'ailleurs en CPGE la notion de **dérivée partielle**, qui permettra justement de considérer tour à tour les dérivées d'une même fonction par rapport à chacune des variables dont elle dépend.
 - Du même coup, on connaît d'emblée l'unité de la dérivée en question.

Pour des dérivées successives (ci-dessous l'exemple de la dérivée seconde), on note :

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \right]_{x=x_0} = \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0}$$

Une exception malgré tout : la physique étudiant des phénomènes évolutifs, le paramètre temps est une variable extrêmement courante, et par rapport à laquelle on est souvent amené à dériver. Ce statut particulier fait que la dérivation par rapport au temps dispose du privilège d'une notation dédiée, la notation « f point » (prononcer « f point point » pour la dérivée seconde) :

$$\left(\frac{df}{dt} \right)_{t=t_0} = \dot{f}(t_0) \qquad \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)_{t=t_0} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) \right]_{t=t_0} = (\dot{f})(t_0) = \ddot{f}(t_0)$$

— Fonction dérivée

Maintenant que nous avons donné un sens au nombre dérivé d'une fonction, reste la question de savoir comment il se calcule concrètement. Dans la définition du nombre dérivé donnée ci-dessus, on constate que celui-ci peut être vu comme une fonction de x_0 . On peut ainsi passer de la notion de nombre dérivé d'une fonction, à celle de **fonction dérivée** de la fonction considérée.

Prenons l'exemple d'une fonction parabolique :

$$f(x) = x^2$$

Nous avons vu que pour calculer le nombre dérivé d'une fonction en une valeur x_0 de la variable x de cette fonction, il suffit de déterminer la limite de son taux d'accroissement lorsque $x \rightarrow x_0$. Commençons donc par exprimer ce taux d'accroissement :

$$T_{(f, x_0)}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En explicitant $f(x)$ dans le cas présent, cette expression devient :

$$T_{(f, x_0)}(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

Or nous pouvons réécrire le dénominateur comme :

$$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$$

Le taux d'accroissement devient alors, après simplification par $(x - x_0)$:

$$T_{(f,x_0)}(x) = \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = (x+x_0)$$

En cherchant sa limite lorsque $x \rightarrow x_0$, on obtient alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x+x_0) = 2x_0$$

f' apparaît ainsi comme une fonction de la variable x_0 ; plus précisément, en adoptant la notation générique x pour désigner la variable, la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est :

$$f'(x) = 2x$$

Dès lors pour connaître la valeur du nombre dérivé de $f(x)$ en une valeur particulière de sa variable (mettons par exemple en $x_0 = 3$), il suffit de :

1. Calculer la fonction dérivée de $f(x)$; soit donc ici $f'(x) = 2x$.
2. Prendre la valeur de cette fonction à la valeur qui nous intéresse ; soit donc ici :

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 2 \times 3 = 6$$

Il n'est évidemment pas question de recalculer la limite du taux d'accroissement à chaque fois que nous souhaitons déterminer le nombre dérivé d'une fonction (d'autant que les fonctions auxquelles vous allez avoir affaire vont gagner en complexité à mesure que vous allez avancer). Quelques techniques permettent cependant de calculer assez vite la fonction dérivée d'une fonction quelconque.

Techniques de calcul de fonctions dérivées

Pour calculer la dérivée d'une fonction quelconque, on retiendra essentiellement les 2 points suivants :

1. Les dérivées des fonctions les plus courantes :

$f(x)$	x^α	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\ln x$	e^x
$f'(x)$	$\alpha x^{(\alpha-1)}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + (\tan x)^2$	$\frac{1}{x}$	e^x

Notons à ce sujet que la première des fonctions évoquées ci-dessus est valable quelle que soit la valeur de l'exposant α (positif, négatif, décimal...) ; en particulier :

α	-1	0	1 / 2	1	2
x^α	$\frac{1}{x}$	1	$\sqrt{x}$	x	x^2
$\alpha x^{(\alpha-1)}$	$(-1) \times x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	0	$\left(\frac{1}{2}\right) \times x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	1	2x

2. Les règles permettant de calculer la dérivée d'une fonction sophistiquée en décomposant celle-ci en fonctions plus simples, puis en s'appuyant sur les dérivées de ces fonctions simples :

$(k \times f)'$ $k = \text{cte}$	$(f + g)'$	$(f \times g)'(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$	$[f(g)]'$ également notée $(f \circ g)'$
$k \times (f')$	$f' + g'$	$f' \times g + f \times g'$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g' \times f'(g)$

Notons en particulier que dans le dernier cas, l'écriture en convention physicienne donne :

$$g' \times f'(g) = \frac{dg}{dx} \times \frac{df}{dg}$$

Évaluer le taux d'accroissement de $f[g(x)]$ par rapport à x apparaît donc spontanément comme la conjugaison du taux d'accroissement de f par rapport à g , et du taux d'accroissement de g par rapport à x , en suivant une simplification du type :

$$\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

La notation physicienne permet ainsi une nouvelle fois de mettre en évidence le sens physique d'une dérivée, et ce y compris à un niveau de complexité accrue.

Par ailleurs, en combinant les dérivées du type $(k \times f)'$, $(f + g)'$ et le fait que la dérivée d'une fonction constante est nulle, on obtient notamment la dérivée d'une fonction affine comme :

$$(ax + b)' = \underbrace{(ax)'}_a + \underbrace{(b)'}_0 \quad \Rightarrow \quad (ax + b)' = a$$

Exemple

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

Et décomposons-la en une série de fonctions simples ; on peut par exemple écrire que :

$$f(x) = g[h(x)] \quad \text{en posant} \quad g(X) = Ke^X \quad \text{et} \quad h(x) = \left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5} \right)$$

Par ailleurs, nous pouvons également exprimer $h(x)$ sous la forme :

$$h(x) = \frac{i(x) \times j(x)}{k(x)} \quad \text{avec} \quad i(x) = x^2 \quad j(x) = \sin x \quad k(x) = 2x + 5$$

La dérivée de $f(x)$ peut ainsi dans un premier temps s'écrire :

$$f'(x) = h'(x) \times g'[h(x)]$$

On voit que $g'[X] = Ke^X$ soit donc, appliquée à l'argument $X = h(x) = \frac{x^2 \sin x}{2x+5}$:

$$g'[h(x)] = Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

Par ailleurs, $h(x)$ apparaît comme le quotient de la fonction $i(x) \times j(x)$ par la fonction $k(x)$; on en déduit que (nous supprimons la dépendance explicite en x pour plus de lisibilité) :

$$h' = \frac{(i \times j)' \times k - (i \times j) \times k'}{k^2}$$

Il ne nous reste plus qu'à développer la dérivée du produit $(i \times j)$:

$$(i \times j)' = (i' \times j) + (i \times j') \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{[(i' \times j) + (i \times j')] \times k - (i \times j) \times k'}{k^2}$$

En explicitant les fonctions et leurs dérivées respectives, on trouve alors :

$$h'(x) = \frac{[2x \sin x + x^2 \cos x](2x+5) - x^2 \sin x \times 2}{(2x+5)^2}$$

Et finalement :

$$f'(x) = \frac{[2x \sin x + x^2 \cos x](2x+5) - 2x^2 \sin x}{(2x+5)^2} \times Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

En factorisant $\frac{x^2 \sin x}{2x+5}$ dans le premier terme, on obtient :

$$f'(x) = \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{2x+5} \right] \times \left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5} \right) \times Ke^{\frac{x^2 \sin x}{2x+5}}$$

Ou encore :

$$f'(x) = K \left[\frac{2}{x} \left(\frac{x+5}{2x+5} \right) + \frac{1}{\tan x} \right] \left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5} \right) e^{\left(\frac{x^2 \sin x}{2x+5} \right)}$$

— Fonction primitive

Nous avons vu dans ce qui précède qu'une fonction $f(x)$ pouvait être dérivée, comment obtenir sa fonction dérivée $f'(x) = \frac{df}{dx}$, et comment interpréter la valeur de cette dérivée pour une valeur x_0 de sa variable.