ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA PARA ENGENHEIROS

Vital Pereira Batista Júnior

2016

A minha noiva Angélica Mariana.

Agradecimentos

Quero agradecer a todas as pessoas que me dizem que sou um exemplo de persistência e determinação e ao meu grande amor Angélica Mariana que me ajudou na digitação desse livro.

SUMÁRIO

Prefácio

Este livro vem trazer alguns conceitos de álgebra linear e geometria analítica voltada para os cursos de engenharias.

Capítulo 1

Matrizes

Definição de Matriz

Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de mxn elementos dispostos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n3} \end{pmatrix}$$

Representação da Matriz

Cada elemento da matriz A tem dois índices: a_{ij}, o primeiro índice "i" indica a linha e o segundo a coluna "j".

A ordem de uma matriz é m por n, $A_{(m,n)}$;

Exemplo:

3 linhas e 4 colunas ⇨ $A_{(3,4)}$, (se lê ordem 3 por 4).

A matriz de ordem n por 1 é uma matriz-coluna.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

A matriz de ordem 1 por n é uma matriz-linha.

Exemplo:

$A = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$

A matriz quadrada o número de linha é igual ao número de colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A matriz unidade ou identidade; $a_{ij} = 1$ para i=j e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soma de Matrizes

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

I) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$

Propriedades da Adição de Matrizes

I) $A + (B + C) = (A + B) + C$

II) $A + 0 = 0 + A = A$

III) $-A + A = A - A = 0$

IV) $A + B = B + A$

Propriedade de uma matriz por um escalar

Se λ é um escalar, o produto de uma matriz $A = [a_{ij}]$ por esse escalar é uma matriz $B = [b_{ij}]$ tal que:

$$b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$$

Exemplo:

$$5 \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 5 \\ 15 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de uma matriz

I) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

II) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

III) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

IV) $1A = A$

Produto de uma matriz por outra

Sejam as matrizes $A_{(1,4)}$ e $B_{(4,1)}$

$A = [\ 4\ 3\ 2\ 5\ ]$ e $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

A condição para multiplicar a matriz $A_{(1,4)}$ pela matriz $B_{(4,1)}$, é que o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B. E a ordem da nova matriz será dada pelo número de linhas de A e pelo número de colunas de B.

Exemplo:

$$A_{1,4} \times B_{4,1}$$

A ordem da nova matriz possibilita a multiplicação.

Exemplo de multiplicação:

$$A = [\ 4\ 3\ 2\ 5\ ] \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Para efetuar o produto da matriz-linha de $A_{(1,4)}$ pela matriz $B_{(4,2)}$, considera-se cada coluna de B como uma matriz-coluna e efetua-se o produto da matriz-linha A pela primeira matriz-coluna de B, obtendo-se o primeiro elemento de C; a seguir, efetua-se o produto da matriz-linha A, pela segunda matriz-coluna de B, obtendo-se o segundo elemento de C.

$$A_{1,4} \times B_{4,1}$$

É possível multiplicar

Ordem = 1 x 2

$$\begin{array}{c} 4 \times 6 = 24 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 5 \times 3 = 15 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \times 1 = 4 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 2 \times 7 = 14 \\ 5 \times 4 = 20 \end{array}$$

Soma igual a 61 Soma igual a 44

$$C_{1\times 2} = [61 \quad 44]$$

Propriedade de matrizes

I) $AB = BA = I$

Diz-se inversa de A e se representa por A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Exercícios Resolvidos

1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$, calcular y e x de modo que A seja igual a B.

Resolução:

$A = B$

Logo,

$y + 4 = 12$

$\therefore\ y = 12 - 4$

$\boxed{y = 8}$

$x^2 + 4 = 53$

$x^2 = 53 - 4$

$x = \pm\sqrt{49}$

$\boxed{x = \pm 7}$

2) Calcular $A + B$ sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ -9 & 11 & -1 \\ 7 & 13 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Calcular o produto das matrizes:

$A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ e $B_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$A_{2,4} \times B_{4,2} = C_{2,2}$$

Para efetuar a multiplicação, vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\left.\begin{array}{l} -8 \times 0 = 0 \\ 4 \times 2 = 8 \\ -6 \times 1 = -6 \\ 1 \times 3 = 3 \end{array}\right. \longrightarrow 5$$

$$\left.\begin{array}{l} -8 \times 4 = -32 \\ 4 \times -2 = -8 \\ -6 \times -5 = 30 \\ 1 \times 8 = 8 \end{array}\right. \longrightarrow -2$$