Sandrine Le Ballois

L2
L3

Automatique

Systèmes linéaires et continus

Cours et exercices traités sous Matlab/Simulink



ellipses

L2
L3

Automatique

Systèmes linéaires et continus

Cours et exercices traités sous Matlab/Simulink

Références sciences

L2
L3

Automatique

Systèmes linéaires et continus

Cours et exercices traités sous Matlab/Simulink

Sandrine Le Ballois

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-096974
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

L'objectif principal de l'ouvrage est de permettre au lecteur d'analyser le comportement d'un système vis-à-vis d'un certain nombre de contraintes pour pouvoir mettre en œuvre des solutions. Au terme de la lecture, on doit savoir synthétiser un correcteur classique pour un système linéaire, invariant, continu et monovariable, même si on n'a aucune connaissance préalable en automatique. Les prérequis sont assez faibles et nous avons procédé aux rappels mathématiques nécessaires à la compréhension des notions abordées.

En conséquence, ce livre s'adresse aux :

- étudiants de 1er cycle (Licences L2 et L3, BUT, BTS) ;
- élèves de classes préparatoires PSI ;
- élèves ingénieurs des grandes écoles ;
- étudiants préparant les concours d'enseignants (agrégation) ;
- enseignants qui veulent disposer d'un support de cours ;
- ingénieurs qui souhaitent remettre à jour leurs connaissances.

Nous avons articulé notre ouvrage autour de six chapitres. Les cinq premiers forment une progression normale puisque nous présentons, petit à petit, tous les outils de l'automaticien : outils mathématiques, outils d'analyse propres à l'automatique des systèmes linéaires et continus et enfin outils de synthèse que sont les correcteurs. Le sixième chapitre concerne quelques méthodes d'identification des systèmes. Ce sont des méthodes de base qu'il nous a semblé intéressant de présenter mais ce chapitre ne saurait en rien remplacer un ouvrage dédié à l'identification.

De nombreux exemples et exercices jalonnent l'ouvrage pour illustrer certaines notions de façon concrète. Certains sont traités sous Matlab/Simulink, logiciel de référence du calcul scientifique et technique, tant dans l'industrie que dans l'enseignement.

Nous espérons que tous les concepts introduits répondront à votre attente même si vous ne devenez pas un automaticien chevronné. Nous avons mis à profit notre expérience dans l'enseignement pour présenter au mieux le domaine de l'automatique continue. Les nombreux échanges que nous avons pu avoir avec les étudiants au cours de notre carrière nous ont permis un retour d'expérience appréciable. Celui-ci nous a conduit à enrichir l'ouvrage pour le rendre le plus pédagogique possible. Cependant, il ne faut pas oublier que l'ouvrage ne peut être qu'un support et qu'il faut surtout pratiquer. C'est en analysant vous-même des systèmes pour régler des correcteurs que vous comprendrez les concepts présentés ici et que vous vous forgerez une expérience.

En pratiquant, vous réaliserez que l'automatique continue et monovariable, traitée dans cet ouvrage, ne représente qu'une toute petite portion de la théorie de l'automatique. La plupart des systèmes modernes, toujours plus complexes et ayant à répondre à des exigences toujours plus pointues, nécessitent des méthodes de réglage de plus en plus spécifiques. Aujourd'hui, les commandes numériques implantées sur des microcontrôleurs, des DSP ou des FPGA deviennent la norme et il faut avoir recours à l'automatique échantillonnée pour élaborer des correcteurs en temps discret. De même, pour traiter des systèmes complexes dans leur globalité, il faut souvent faire appel à l'automatique dite multivariable. Cependant, on ne peut attaquer ces domaines sans auparavant maîtriser correctement l'automatique continue et monovariable. En effet, la plupart des méthodes plus avancées en découlent ou en sont des extensions.

Table des matières

Introduction générale 11

I. But de l'automatique 11

II. Notion de système 12

III. Notion de bouclage 13

IV. Structure d'un système asservi 14

Chapitre 1 – Outils mathématiques 15

Introduction 15

I. Équations différentielles 15

1. Définitions 15
2. Résolution 16
3. Exemple 16

II. Produit de convolution 18

1. Définition 18
2. Existence 18
3. Propriétés du produit de convolution 18

III. Fonctions de la variable complexe 19

1. Définition 19
2. Exemple 19

IV. Transformée de Laplace 20

1. Définition 20
2. Existence 21
3. Exemples 21

a. Échelon unité 21
b. Rampe causale 22
4. Propriétés de la transformation de Laplace 23
V. Transformation de Laplace inverse 24
1. Les racines du dénominateur sont réelles et simples 24
2. Les racines du dénominateur sont réelles et multiples 26
3. L'une des racines au moins du dénominateur n'est pas réelle 26
VI. Résolution d'équations différentielles par Laplace 27
VII. Résumé 29
VIII. Exercices 30
1. Transformée de Laplace d'un signal 30
2. Transformée de Laplace d'un signal périodique 32
3. Transformée de Laplace inverse 34
4. Réponse temporelle d'un circuit *R-L-C* 36
Chapitre 2 – Représentation des systèmes 39
Introduction 39
I. Systèmes continus, linéaires, invariants 39
1. Définitions 39
2. Représentation des systèmes 41
a. Représentation à partir de la réponse impulsionnelle 41
b. Représentation d'un système par sa fonction de transfert 42
c. Représentation d'un système par équation différentielle 43
d. Représentation d'un système par schémas-blocs 44
II. Résumé 46
III. Exercices 47
1. Système mécanique tournant 47
2. Système mécanique en translation 48

Chapitre 3 – Étude de systèmes standard 51

Introduction 51

I. Réponses temporelles 51

1. Définitions préliminaires 51
2. Signaux tests 52
3. Réponse indicielle : données caractéristiques 53
4. Systèmes du 1er ordre 55
    a. Définition 55
    b. Réponse indicielle 56
    c. Réponse impulsionnelle 57
    d. Caractéristiques temporelles d'un système du 1er ordre 58
5. Systèmes du 2e ordre 59
    a. Définition 59
    b. Réponse indicielle 59
    c. Réponse impulsionnelle 69
    d. Caractéristiques temporelles d'un système du 2e ordre 72

II. Réponses harmoniques 72

1. Introduction 72
2. Définitions préliminaires 73
3. Les représentations graphiques usuelles 74
4. Propriétés fréquentielles - Définitions 74
5. Systèmes du 1er ordre 75
    a. Lieu de Bode 75
    b. Caractéristiques fréquentielles d'un système du 1er ordre 79
    c. Lieu de Nyquist 79
    d. Lieu de Black-Nichols 80
6. Systèmes du 2e ordre 81
    a. Lieu de Bode 81
    b. Caractéristiques fréquentielles d'un système du 2e ordre 89
    c. Lieu de Nyquist 90

d. Lieu de Black-Nichols 91

III. Systèmes instables 93

IV. Systèmes avec zéros 96

1. Système du 1er ordre + zéro 97

a. Réponse indicielle 98

b. Réponse harmonique 99

2. Système du 2e ordre + zéro 101

a. Réponse indicielle 101

b. Réponse harmonique 104

V. Cas de l'intégrateur et du dérivateur 107

1. Intégrateur 107

a. Réponse indicielle 107

b. Réponse harmonique 107

2. Dérivateur 108

VI. Résumé 109

VII. Exercices 110

1. Système du 1er ordre 110

2. Système du 2e ordre 113

3. Utilisation des abaques 116

4. Tracé de lieu de Bode 118

Chapitre 4 – Analyse de systèmes 123

Introduction 123

I. Exemples de cahier des charges 123

II. Définition des objectifs 125

III. Nécessité de bouclage 128

1. Rejet de perturbation 129

2. Sensibilité paramétrique 130

3. Stabilisation d'un système instable 131
4. Amélioration des performances 131
5. Avantages de la structure boucle fermée 131

IV. Structure d'une boucle fermée – définitions 132

V. Stabilité 136

1. Domaine temporel 137
2. Domaine fréquentiel 138
3. Carte des pôles et des zéros 140
4. Exemples récapitulatifs 140
5. Stabilité boucle ouverte et stabilité boucle fermée 143
6. Critères de stabilité 144
    a. Critère de Routh-Hurwitz 144
    b. Critère de Routh-Hurwitz : exemples 146
    c. Critère de Nyquist 148
    d. Critère de Nyquist : cas particuliers 154
    e. Critère du revers 157
7. Marges de stabilité 158
    a. Marge de gain 161
    b. Marge de phase 161
    c. Abaque de Black-Nichols 164
    d. Marge de module 164
    e. Marge de retard 164

VI. Précision 167

1. Erreur due à une modification de consigne 167
2. Erreur due à une perturbation 168

VII. Résumé 170

VIII. Exercices 171

1. Sensibilité 171
2. Stabilité conditionnelle 172

3. Marges de stabilité 175

Chapitre 5 – La correction 177

Introduction 177

I. Structures de correction 177

II. Choix du domaine de synthèse 181

III. Quelques clefs pour un bon réglage 182

IV. Les correcteurs classiques 184

1. Correcteur Proportionnel Dérivé 185
   a. Principes - Définitions 185
   b. Lieu de Bode 185
   c. Exemple 187
2. Correcteur Proportionnel Intégral 191
   a. Principes - Définitions 191
   b. Lieu de Bode 191
   c. Exemple 193
3. Correcteur Proportionnel Intégral Dérivé 198
   a. Principes - Définitions 198
   b. Lieu de Bode 200
   c. Exemple 200
4. Correcteur à Avance de Phase 207
   a. Principes - Définitions 207
   b. Lieu de Bode 207
   c. Réglage d'un correcteur à avance de phase 209
   d. Exemple 210
   e. Pointage d'un télescope 213
5. Correcteur à Retard de Phase 218
   a. Principes - Définitions 218
   b. Lieu de Bode 218
   c. Exemple 219
6. Correcteur à actions combinées : retard/avance – avance/retard 223

7. Correction tachymétrique 223

V. Résumé 226

VI. Exercices 227

1. Commande en position d'un moteur à courant continu 227
2. Correction par retard/avance de phase 232
3. Commande en vitesse d'un axe de satellite 237

Chapitre 6 – Notions d'identification 245

Introduction 245

I. Identification en boucle ouverte 245

II. Identification par réponse indicielle 246

1. Modèle à deux constantes de temps 246
2. Modèle de Broïda 250
3. Modèle de Strejc 251

III. Identification par réponse harmonique 253

IV. Résumé 254

Annexe 1 – Transformées de Laplace 255

Annexe 2 – Systèmes du second ordre 259

Index 263

Introduction générale

I. But de l'automatique

L'automatique est un domaine de l'ingénierie qui consiste en l'analyse des systèmes et l'étude des moyens à mettre en œuvre pour qu'ils se comportent de manière autonome, sans intervention humaine directe. Ces systèmes peuvent être des machines, des véhicules, des robots… On distingue deux grands domaines de l'automatique : les automatismes séquentiels et les asservissements. Dans le 1er cas, on recherche l'automatisation d'une séquence d'instructions connues à l'avance, on a alors affaire à un système dit séquentiel. Ce travail est réalisé à l'aide d'un automate programmable industriel (API). Dans le 2e cas, on cherche à assurer la régulation d'une grandeur physique (son maintien à une valeur constante) ou bien à imposer à une grandeur physique une certaine évolution (on parle de suivi de consigne). Le but principal des asservissements est donc de faire en sorte que les grandeurs de sortie aient le comportement souhaité et ceci malgré d'éventuelles perturbations externes ou de possibles variations des conditions de fonctionnement.

L'automatique s'est introduite dans quasiment tous les domaines de la vie quotidienne. On sait que la température des pièces est régulée pour rester constante quelle que soit la température extérieure mais le domaine des transports recèle également de très nombreux exemples. Autrefois, les marins devaient être à la barre en permanence pour conserver leur cap. De nos jours, la barre est sous le « contrôle » du pilote automatique. Seules les entrées et sorties de port, c'est-à-dire les opérations délicates, nécessitent l'intervention humaine. Les avions sont sous pilote automatique pendant une bonne partie de leurs vols et seules les phases difficiles, décollage, atterrissage, sont aux mains du commandant de bord. Nos voitures contiennent de plus en plus de systèmes automatiques : régulateur d'allure, contrôle de trajectoire, essuie-glaces s'adaptant à l'importance de la pluie, phares s'allumant automatiquement selon la luminosité… L'industrie fait aussi très largement appel à l'automatique : on trouve des robots dans les chaînes de montage automobile ou dans des milieux trop hostiles pour l'homme (domaine nucléaire par exemple). Même l'être humain a un comportement régulateur : quand il fait froid, on se couvre puis on allume le chauffage ; quand il fait trop chaud, on ouvre une fenêtre, voire deux pour produire un courant d'air.

En résumé, un système automatique cherche toujours à réaliser un certain nombre d'opérations sans intervention humaine. Dans certains cas, le but est de remplacer l'homme pour des raisons économiques ou pour lui éviter des tâches pénibles, dans d'autres ce sera pour obtenir un produit de meilleure qualité. Dans cet ouvrage, nous

ne traiterons que les asservissements et en particulier ceux des systèmes linéaires continus et invariants (ces termes seront précisés par la suite).

II. Notion de système

Nous allons chercher à commander des systèmes, mais qu'est-ce qu'un système ? De façon succincte, nous dirons que c'est une boîte noire qui possède des entrées sur lesquelles nous allons pouvoir agir et des sorties qui nous permettent d'observer les réactions induites. Schématiquement, nous avons la représentation suivante :

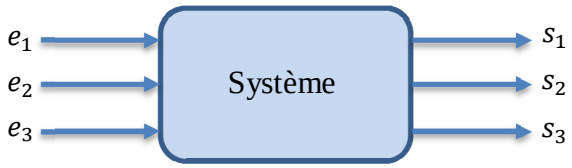


Figure I.1

Le système évolue en fonction de lois physiques qui le régissent mais il s'inscrit aussi dans un certain environnement et subit donc des interactions avec ce dernier. Une représentation plus réaliste d'un système est donnée sur la figure ci-après. Notons que les entrées p_1, p_2, p_3 sont subies. Ce sont des perturbations dont l'automaticien se passerait bien.

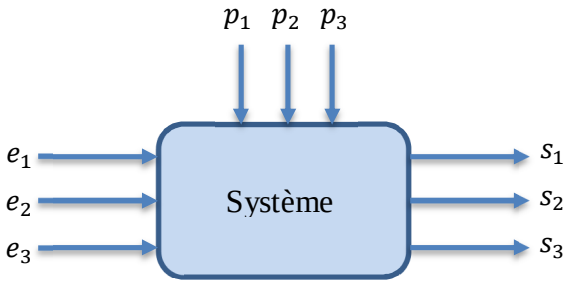


Figure I.2

Prenons l'exemple d'une automobile. Elle peut être vue comme un système physique possédant, de manière très grossière, trois entrées et deux sorties. Pour les entrées, nous considérons le volant qui permet de diriger le véhicule, l'accélérateur de le faire avancer, le frein de l'arrêter. Pour les sorties, nous citerons la position de la voiture et sa vitesse. Il existe une multitude de perturbations extérieures parmi lesquelles on peut citer les rafales de vent, les autres véhicules, l'état de la route... Nous pouvons représenter une automobile par un schéma comme celui de la figure I.3.

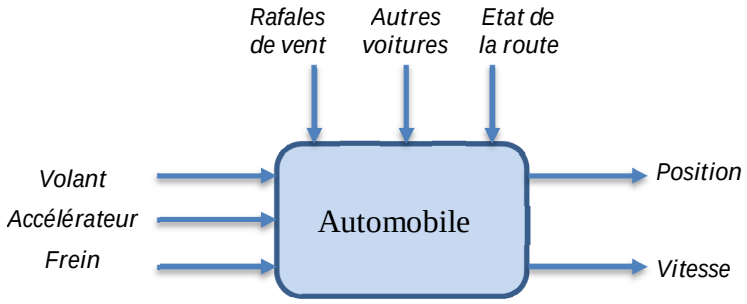


Figure I.3

Dans le cas où il existe plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties, nous dirons que le système est multivariable. Quand il n'y a qu'une seule entrée et qu'une seule sortie, le système est dit monovariable. Bien que ce dernier cas ne soit pas le plus fréquent, la plupart des systèmes étant multivariables, l'automaticien cherche très souvent à se ramener à de tels systèmes du fait de leur relative facilité d'étude. Nous nous limiterons à l'étude des systèmes monovariables dans cet ouvrage.

III. Notion de bouclage

Nous avons introduit précédemment le système représentant une automobile. Analysons maintenant le comportement du conducteur.

Supposons le conducteur sur une route parfaitement rectiligne, dans une zone où le vent est nul, route qu'il est le seul à emprunter. Les conditions sont « idéales » et nous considérerons donc que les perturbations sont nulles. Dans cette configuration, le conducteur n'a qu'à orienter son volant correctement et appuyer sur l'accélérateur pour donner la vitesse adéquate à son véhicule. Il peut ensuite profiter du paysage. Pour être tranquilles, il nous faudra supposer que cette belle route n'est pas faite de revêtements différents. On appellera la situation que l'on vient de décrire le cas n°1.

Maintenant, nous allons envisager une route qui serpente. Si le conducteur connaît parfaitement l'itinéraire, il sait à l'avance l'évolution que suit son chemin. Il peut, sans regarder la route, connaissant sa vitesse, orienter le volant dans le bon sens et au bon moment de façon à suivre correctement la route. Ce sera notre cas n°2.

Laissons de côté les cas idéaux pour nous rapprocher de la réalité. La route a été refaite sur 2 km donc le revêtement change de nature, il y a du vent, des voitures roulant moins vite... Le conducteur est obligé de regarder la route pour en « corriger » les défauts à l'aide du volant (c'est l'une des entrées du système qu'il commande), de ralentir lorsqu'une voiture est devant lui... On constate, dans ce troisième cas, que le conducteur, dans la mesure où il observe la route et surtout sa position sur celle-ci, agit en permanence sur les commandes de son véhicule afin

d'assurer un bon suivi de sa trajectoire. Dans ce dernier cas, l'automobiliste assure un bouclage naturel : nous sommes en présence d'un système en boucle fermée.

Dans les cas n°1 et n°2, le fait de ne pas regarder la route engendre une commande de l'automobile en boucle ouverte. Le résultat risque d'être désastreux…

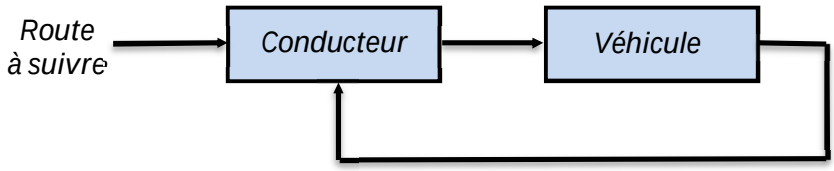


Figure I.4 Système en boucle fermée

IV. Structure d'un système asservi

Nous allons donner les définitions d'une régulation et d'un asservissement. La régulation permet de maintenir une grandeur physique constante. On a déjà cité l'exemple de la régulation de température d'une pièce. Ceci se fera via un thermostat.

Un asservissement est une opération qui cherche à asservir les sorties du système sur les grandeurs d'entrée. Ces dernières sont dites grandeurs de consigne ou de référence. On souhaite, en introduisant un bouclage, que les sorties du système suivent le plus fidèlement possible les entrées, en dépit de variations sur celles-ci ou malgré d'éventuelles perturbations extérieures.

La structure générale d'un système asservi se représente par le synoptique suivant :

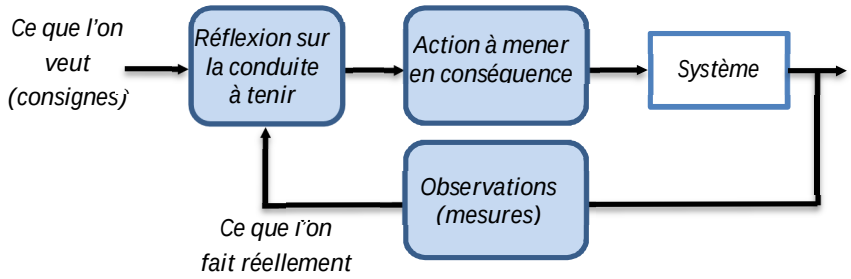


Figure I.5 Structure d'un système asservi

Par rapport au schéma du conducteur et de son véhicule (figure I.4), on pourrait dire que les trois blocs (observations, réflexion, action) sont symbolisés sur la figure I.4 par le seul conducteur. On a l'habitude, en automatique, de séparer ces trois opérations et d'associer à chacune un bloc différent. En effet, en pratique, il est rare qu'elles soient toutes trois dues à un seul organe. Nous reverrons cette structure de système asservi et nous associerons des noms plus précis à chacun des blocs.

Chapitre 1 – Outils mathématiques

Introduction

L'automatique repose en grande partie sur l'utilisation des mathématiques appliquées et fait appel à de nombreux outils mathématiques. Afin d'éviter des rappels au cours des chapitres suivants, il nous a semblé intéressant de regrouper ici les notions mathématiques dont nous aurons besoin.

Nous nous intéressons, dans ce volume, aux systèmes linéaires, invariants et décrits dans le domaine continu. Ces systèmes voient leur évolution temporelle décrite, mathématiquement parlant, par des équations différentielles à coefficients constants. Nous rappelons ce qu'est une équation différentielle et nous en donnons des éléments de résolution mais nous supposons que ce domaine n'est pas totalement inconnu.

Nous rappelons brièvement ce qu'est une fonction du plan complexe et nous présentons la transformée de Laplace et sa transformée inverse.

I. Équations différentielles

1. Définitions

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants a la forme générale :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} \dots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u \qquad (1.1)$$

De façon générale, y et u sont des fonctions du temps continu dont les dérivées successives sont données ci-dessous. On omettra souvent la variable t si elle n'est pas nécessaire à la compréhension.

$$y^{(n)} = \frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \cdots \quad \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} \quad u^{(m)} = \frac{d^m u(t)}{dt^m} \cdots \quad \dot{u} = \frac{du(t)}{dt}$$

Une équation différentielle linéaire fait donc apparaître une combinaison linéaire des dérivées successives de y et u. L'équation différentielle est dite d'ordre n lorsque, dans le membre de gauche, la dérivée n-ième de la variable y apparaît. Les coefficients $a_0, a_1, a_2 \dots a_n, b_0, b_1, b_2 \dots b_m$ sont des constantes réelles.

Par la suite, nous nous limitons aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre inférieur ou égal à 2. Nous pourrions aller plus loin mais la résolution de telles équations pour un ordre supérieur devient vite compliquée. Nous verrons plus loin que nous avons des outils plus agréables à manipuler.

2. Résolution

L'équation (1.1) limitée à l'ordre 2 peut se réécrire :

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u \qquad (1.2)$$

On obtient toutes les solutions de (1.2) en ajoutant à une solution particulière de l'équation (1.2) – dite équation avec second membre (EASM) – toutes les solutions de l'équation sans second membre (ESSM), dite encore équation homogène.

Classiquement, on commence donc par chercher les solutions de l'ESSM :

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0 \qquad (1.3)$$

On cherche les solutions de (1.3) sous la forme : $y = e^{rt}$ où $r \in \mathbb{C}$. On a donc $\dot{y} = re^{rt}$ et $\ddot{y} = r^2 e^{rt}$ que l'on remplace ensuite dans (1.3). On obtient :

$$e^{rt}(a_0 r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \qquad (1.4)$$

La résolution de l'équation du 2e degré en r nous donne les solutions de l'ESSM. En posant $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$, les solutions de (1.4) sont :

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_0} \qquad \begin{matrix} r_1 \\ \bar{r}_1 \end{matrix} = \frac{-a_1 \pm j\sqrt{\Delta'}}{2a_0} \qquad (1.5)$$

Remarque : Les solution sont réelles si $\Delta \geq 0$ (r_1 et r_2) et complexes conjugués si $\Delta < 0$ (r_1 et $\bar{r}_1$). On a évidemment dans ce dernier cas $\Delta' = -\Delta$.

Les solutions de l'ESSM sont :

$$\begin{cases} y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ y(t) = (At + B)e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ y(t) = Ae^{r_1 t} + \bar{A}e^{\bar{r}_1 t} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Remarque : A et *B* sont déterminées si l'on connaît des valeurs particulières de $y(t)$.

Considérons l'EASM et cherchons une solution particulière. On peut écrire :

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = f(u, \dot{u}, \ddot{u}) \qquad (1.7)$$

où $f(u, \dot{u}, \ddot{u})$ est, par exemple, un polynôme de degré 2 en t que l'on écrit $P_2(t)$. Trois cas se présentent pour la recherche de la solution particulière :

$a_2 \neq 0$	*y* est un polynôme d'ordre 2 *:* $y = Q_2(t)$	
$a_2 = 0, a_1 \neq 0$	*y* est un polynôme d'ordre 3 *:* $y = Q_3(t)$	(1.8)
$a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 \neq 0$	*y* est un polynôme d'ordre 4 : $y = Q_4(t)$	

La solution finale de (1.2) est donc constituée de (1.6) + (1.8).

3. Exemple

Soit à résoudre l'équation (1.9). Suivons la démarche proposée précédemment :

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 12t + 20 \qquad (1.9)$$

Résolution de l'ESSM

L'équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$. Le discriminant Δ vaut 25 donc les deux racines r_1 et r_2 sont réelles et distinctes :

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad y = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

Résolution de l'EASM

On a $a_2 \neq 0$, on cherche alors la solution particulière sous la forme d'un polynôme $Q_1(t)$ puisque le membre de droite de (1.9) est d'ordre 1 : $f(u, \dot{u}, \ddot{u}) = 12t + 20$.

$$\begin{cases} y(t) = at + b \\ \dot{y}(t) = a \\ \ddot{y}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow a - 6at - 6b = 12t + 20$$

Par identification terme à terme, on trouve :

$$\begin{cases} -6at = 12t \\ a - 6b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 6b = -22 \end{cases}$$

La solution complète de l'équation (1.9) est finalement :

$$y(t) = -11/3 - 2t + Ae^{2t} + Be^{-3t} \qquad (1.10)$$

On détermine A et B si l'on connaît des CI ($y(0)$ et $\dot{y}(0)$) ou des points particuliers. On peut vérifier (1.10) en utilisant Maple (*cf.* figure 1.1). On constate que l'on retrouve le même résultat que celui auquel nous avons abouti « à la main », il suffit de considérer $A = _C_2$ et $B = _C_1$.

Remarque : Si $f(u, \dot{u}, \ddot{u})$ n'est pas un polynôme en t, nous invitons le lecteur à consulter des ouvrages mathématiques dédiés aux équations différentielles. Dans le domaine de l'automatique, le cas du polynôme est, en effet, l'un des plus courants.

Définition de l'équation différentielle à résoudre

```
> eq:=diff(y(t),t,t)+diff(y(t),t)-6*y(t)=12*t+20;
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t)\right) - 6\,y(t) = 12\,t + 20$$

Résolution de l'équation différentielle

```
> dsolve(eq, y(t));
```

$$y(t) = -\frac{11}{3} - 2\,t + _C1\,e^{(-3\,t)} + _C2\,e^{(2\,t)}$$

Figure 1.1 Feuille de calcul Maple

II. Produit de convolution

1. Définition

Soient deux fonctions temporelles $x(t)$ et $y(t)$. On appelle produit de convolution de ces deux signaux, s'il existe, la fonction donnée par :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \qquad (1.11)$$

2. Existence

Le produit de convolution de $x(t)$ par $y(t)$ existe si l'une des fonctions est sommable et l'autre bornée.

Remarque : Si l'une des fonctions est continue, le produit de convolution est continu.

3. Propriétés du produit de convolution

On suppose que les différents produits de convolution considérés existent.

Commutativité

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

Associativité

$$x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$$

Distributivité par rapport à l'addition

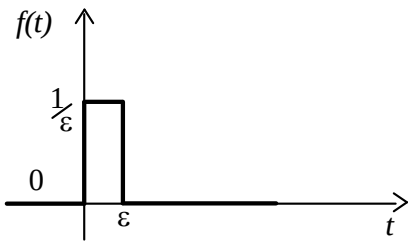
$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

Unité de convolution

Il n'existe pas de fonction $u(t)$ – au sens mathématique du terme – telle que :

$$x(t) * u(t) = u(t) * x(t)$$

$\forall\, x(t)$ mais l'impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$, peut jouer ce rôle. L'impulsion de Dirac peut être définie à partir de la fonction $f(t)$ représentée sur la figure 1.2, lorsque ε tend vers 0. On a alors $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t)$.



$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(t)$$

Figure 1.2 Représentation symbolique de l'impulsion de Dirac

III. Fonctions de la variable complexe

La théorie des systèmes continus en automatique est basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace. Celle-ci sera introduite au paragraphe suivant. La variable de Laplace, notée p, est une variable complexe. Nous avons jugé qu'un bref rappel sur les variables complexes et les fonctions les utilisant avait sa place ici.

1. Définition

Une variable complexe p est formée de 2 composantes, l'une réelle, l'autre complexe. On pourra l'écrire $p = \sigma + j\omega$. Graphiquement, on peut la représenter dans un plan XY où l'axe X est classiquement l'axe réel et Y l'axe imaginaire.

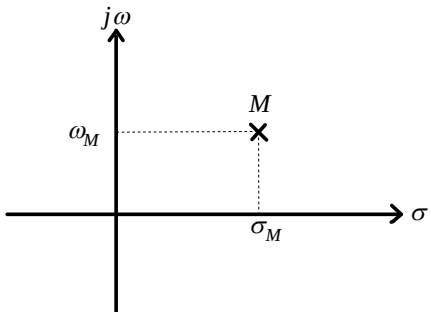


Figure 1.3 Plan complexe

Une fonction $G(p)$ est une fonction de la variable complexe p si pour chaque valeur de p, on a au moins une valeur de $G(p)$. On peut séparer $G(p)$ en partie réelle et partie imaginaire, de sorte que :

$$G(p) = \Re\mathrm{e}[G(p)] + j\,\Im\mathrm{m}[G(p)]$$

2. Exemple

La fonction $G(p) = p + 3$ peut s'écrire également $G(p) = (\sigma + 3) + j\omega$ en considérant $p = \sigma + j\omega$. On a alors :

$$\begin{cases} \Re\mathrm{e}[G(p)] = \sigma + 3 \\ \Im\mathrm{m}[G(p)] = \omega \end{cases}$$

Une fonction de la variable complexe peut se représenter graphiquement dans un plan XY, qualifié de plan complexe associé à $G(p)$. L'axe X supporte la partie réelle de $G(p)$ et l'axe Y la partie imaginaire de la fonction. Une fonction de la variable complexe p sera dite analytique dans le plan complexe p si elle, ainsi que toutes ses dérivées, sont définies en tout point du plan p.

Par exemple, la fonction $G(p) = 1/(p + 3)$ est analytique en tout point du plan p excepté le point $p = -3$. En ce point, appelé singularité, $G(p)$ n'est pas définie. La fonction $G(p) = p + 3$, en revanche, est analytique dans le plan complexe p, fini.

IV. Transformée de Laplace

La transformation de Laplace (Pierre–Simon de Laplace : 1749–1827) est l'un des outils les plus importants de l'automatique dite continue. Il permet la résolution, dans le domaine fréquentiel, de problèmes posés dans le domaine temporel. Par exemple, son utilisation simplifie la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants que nous avons précédemment introduites.

1. Définition

La transformée de Laplace monolatère d'une fonction $x(t)$ de la variable réelle t est donnée, si elle existe, par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt \qquad (1.12)$$

où p est la variable de Laplace définie dans le plan complexe ($p = \sigma + j\omega$). On trouve souvent les notations suivantes :

$$x(t) \overset{TL}{\rightarrow} X(p) \qquad x(t) \ ] \ X(p) \qquad TL\{x(t)\} = X(p)$$

Le fait que l'on envisage l'intégration de $t = 0$ jusqu'à $+\infty$ dans (1.12) signifie que l'on ignore toute information portée par $x(t)$ avant l'instant $t = 0$. Ceci ne limite pas la généralité de l'outil puisque l'on prend souvent $t = 0$ comme origine temporelle. De plus, ceci illustre le phénomène de causalité[1] propre à tout système physique. Si l'on applique à l'entrée d'un système un signal en $t = 0$, la réponse apparaîtra au plus tôt en $t = 0$: l'effet ne peut précéder la cause.

Remarque : En toute rigueur, la borne inférieure de l'intégrale (1.12) devrait être prise en $t = 0^-$ et non en $t = 0$. Cette précaution est nécessaire lorsqu'on envisage des fonctions $x(t)$ présentant des sauts en $t = 0$. Cependant, la transformation de Laplace est peu utilisée sous la forme (1.12) – on utilise des tables, *cf.* plus bas – le problème de savoir si la borne inférieure est $t = 0$ ou $t = 0^-$ se pose donc rarement.

Remarque : Il existe une transformée de Laplace dite bilatère, utilisée en mathématique mais pas en automatique. Elle est définie par (1.12) mais avec une borne d'intégration inférieure prise en -∞ au lieu de $t = 0$. Nous la mentionnons uniquement pour information.

---

[1] Un signal causal $x(t)$ est défini pour $t \geq 0$ et nul pour $t < 0$.

2. Existence

$X(p)$ existe si l'intégrale (1.12) converge donc si $\int_0^{+\infty}|x(t)e^{-pt}|dt$ existe.

Théorème :

Si $|x(t)| \leq Ae^{\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$ alors $X(p)$ existe au moins pour $\Re e(p) > \alpha$

En effet, l'intégrale $\int_0^{+\infty}|x(t)e^{-pt}|dt$ vaut $\int_0^{+\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}dt$ et avec $|x(t)| \leq Ae^{\alpha t}$, on obtient $\int_0^{+\infty}|x(t)e^{-pt}|dt = \int_0^{+\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}dt \leq A\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-\sigma)t}dt$.

Cette dernière intégrale existe si $\alpha - \sigma < 0$. Si on appelle σ_0 la plus petite des valeurs α satisfaisant la condition de convergence, on dira que σ_0 est l'abscisse de sommabilité de l'intégrale de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$ est donc définie par (1.12) et le domaine de convergence $\Re e(p) > \sigma_0$.

Remarque : Si $\sigma_0 = +\infty$, la transformée de Laplace n'existe pas.

3. Exemples

a. Échelon unité

L'échelon unité, signal très courant en automatique, est représenté sur la figure 1.4. Sa transformée de Laplace est donnée par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \quad \Rightarrow \quad X(p) = -\frac{1}{p}[e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

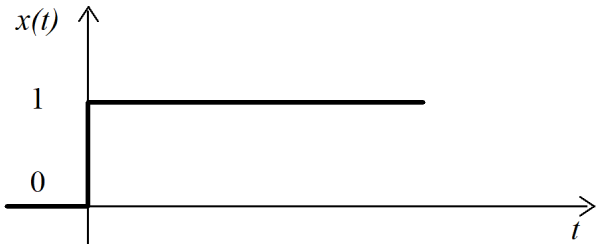


Figure 1.4 Échelon unité

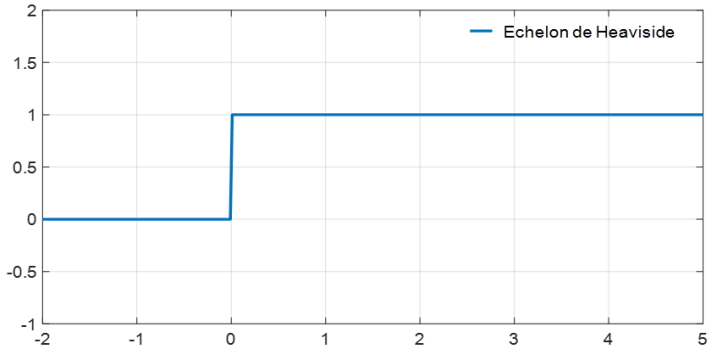
L'abscisse de convergence est ici $\sigma_0 = 0$ et le domaine de convergence est tel que $\Re e(p) > 0$. La transformée de Laplace $X(p)$ du signal $x(t)$ défini précédemment existe si p appartient au domaine de convergence déterminé.

En résumé :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t < 0 \end{cases} \quad \overset{TL}{\rightarrow} \quad X(p) = \frac{1}{p} \quad \text{pour } \Re e(p) > 0$$

Remarque : L'Échelon unité est souvent noté $U(t)$ et appelé fonction de Heaviside.

```
% Représentation de l'Echelon Unité
t = [-2:0.01:5];
plot(t, heaviside(t),'LineWidth',4); grid
xlim([-2 5]);ylim([-1 3]);legend('Echelon de Heaviside');
```




```
% Calcul de la TL de l'Echelon Unité
syms t;
U = heaviside(t);
F = laplace(U,p)

       F = 1/p
```

Figure 1.5 Transformée de Laplace de l'échelon unité sous Matlab

b. Rampe causale

La rampe causale est définie par la figure 1.6. Sa transformée de Laplace est :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{1}{p^2}$$

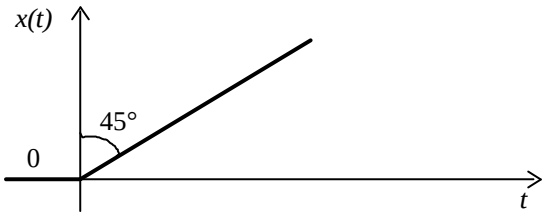


Figure 1.6 Rampe unitaire causale

Pour faire l'intégration par parties, on posera :

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-pt}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(p) = \left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt$$

Le 1er terme est nul et l'intégrale du 2e a été calculée pour l'exemple précédent.