

Sandrine Fleurant
Cyril Fleurant

Bases de mathématiques pour la géologie et la géographie

Cours et exercices

DUNOD

Illustration de couverture © zlikovec – iStockphoto.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074808-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	V
Remerciements	IX
Chapitre 1. Grandeurs et mesures	1
1.1 Les nombres	2
1.2 Grandeurs et mesures	9
1.3 Valeurs approchées	14
1.4 Pourcentages, taux quotients	19
Exercices	20
Chapitre 2. Variables et fonctions	29
2.1 Variables, grandeurs et valeurs	30
2.2 Lien entre les variables, fonctions	30
2.3 Formules et paramètres	32
2.4 Représentation des fonctions, premiers éléments	32
2.5 Échelles et représentation graphique	37
2.6 Les fonctions usuelles	40
2.7 Évolution et tendance	51
Exercices	56
Chapitre 3. Trigonométrie, géométrie du plan et de l'espace	69
3.1 Les mesures d'angle	69
3.2 Géométrie du plan (partie 1) : trigonométrie, pente	70
3.3 Fonctions trigonométriques	75
3.4 Géométrie du plan (partie 2)	80
3.5 Géométrie de l'espace	85
Exercices	87
Chapitre 4. Cartographie	99
4.1 Échelles	99
4.2 Mesures d'angles, coordonnées géographiques	100
4.3 Géométrie de la sphère	106
4.4 Les différents systèmes de cartographie	110
Exercices	112
Chapitre 5. Dérivation	117
5.1 Pente et dérivée en un point	117
5.2 Fonction dérivée et formules usuelles	120
5.3 Variations d'une fonction et dérivation	127
Exercices	134

Chapitre 6. Intégration et équations différentielles	143
6.1 Intégrales : introduction, valeur moyenne	144
6.2 Notion de primitive	146
6.3 Calcul d'intégrales	149
6.4 Calcul de valeurs approchées d'intégrales par la méthode des rectangles	155
6.5 Équations différentielles	158
6.6 Équations aux dérivées partielles	166
Exercices	168
Corrigés des exercices	179
 Annexe A. Le logiciel libre R	 265
A.1 Installation	265
A.2 Bonnes pratiques	266
A.3 Aide en ligne	269
A.4 Utilisation de packages	269
A.5 Principes de fonctionnement	270
A.6 Sauvegarde	272
A.7 Structuration des données	272
A.8 Importation de données	276
A.9 Faire des graphiques	276
 Annexe B. Le logiciel libre Xcas	 281
B.1 Introduction et présentation	281
B.2 Principe de fonctionnement	281
B.3 Principales commandes	282
 Bibliographie	 287
 Index	 289

AVANT-PROPOS

La géographie (qu'elle soit d'orientation physique ou humaine et sociale) et la géologie sont des sciences du complexe qui nécessitent des outils de quantification élaborés pour en comprendre les processus et les fondements.

Cet ouvrage est un manuel de cours et d'exercices corrigés permettant d'acquérir et de consolider les bases de mathématiques nécessaires à la géographie physique et à la géologie. L'esprit de ce manuel est d'entrer par des problématiques géographiques et géologiques concrètes pour étudier les outils mathématiques réellement utiles à ces disciplines.

Cet ouvrage est construit autour de la géographie et de la géologie : ce sont des situations-problèmes qui vont motiver la nécessité d'apports théoriques et pratiques mathématiques. Le cours est illustré d'exemples développés et issus de la géographie et de la géologie. Ce manuel part donc du vécu et des besoins des étudiants pour les accompagner dans leur construction d'outils mathématiques. Les apports théoriques mathématiques seront ceux réellement utiles à la construction d'une culture géographique ou géologique solide.

Une place est également faite aux applications numériques et à l'informatique. En effet, les auteurs souhaitent que le lien géographie-géologie-mathématiques soit le plus complet possible, aussi des outils informatiques (les gratuits R et Xcas) seront utilisés.

À QUI S'ADRESSE CET OUVRAGE ?

Cet ouvrage s'adresse principalement aux étudiants de première et deuxième année d'étude de géographie et de géologie (licence, classes préparatoires BCPST, école d'ingénieur) et à leurs enseignants, et bien sûr également au-delà (étudiants en licence 3 ou en master souhaitant un retour sur des bases de mathématiques).

Ces étudiants se répartissent entre deux grands profils de formation initiale aux mathématiques :

- les étudiants ayant suivi un cursus secondaire scientifique, avec une formation solide en mathématiques. Ces étudiants ont besoin de consolider leur connaissances mathématiques et surtout d'apprendre à utiliser ces connaissances dans des contextes non mathématiques, issus des disciplines étudiées.

- les étudiants ayant suivi un cursus moins scientifique, pour lesquels il est nécessaire de revenir sur les bases des mathématiques. Ces bases sont ici directement données dans le contexte de la géographie et de la géologie.

Cet ouvrage s'adresse aussi aux professeurs de l'enseignement secondaire (que ce soit en sciences ou en mathématiques), qui trouveront dans cet ouvrage de nombreuses pistes d'enseignement interdisciplinaire.

POURQUOI CET OUVRAGE ?

Les auteurs travaillent au quotidien au contact d'élèves, d'étudiants et de leurs enseignants. Le constat est fait des difficultés de nombreux étudiants à utiliser des connaissances mathématiques simples en contexte (tracer une droite, manipuler les unités, dériver une fonction). Il nous est apparu nécessaire de mettre l'accent sur ces besoins pour compléter les enseignements prévus à l'université et les ouvrages existants.

L'ouvrage reprend volontairement de très nombreuses notions et donne des conseils de méthode (comment effectuer des conversions, comment tracer une droite). Les fonctions mathématiques utiles sont abordées, avec des exemples contextualisés. L'ouvrage aborde aussi (toujours de manière très contextualisée) des notions plus fines, comme celles d'intégrale, d'équation différentielle et de dérivée partielle.

Un autre but est d'aider les lecteurs à acquérir une culture des ordres de grandeur et des unités ainsi que des réflexes de méthode de résolution et une meilleure confiance face aux données chiffrées.

LE CONTENU

L'ouvrage se décline en six chapitres qui amènent progressivement vers des notions de plus en plus avancées.

Le **chapitre 1 « Grandeurs et mesures »** s'intéresse aux systèmes de numération décimale et sexagésimale. Il présente les notions de symbole, de mesure, d'unité et de valeur approchée (arrondi, chiffres significatifs, incertitude, erreur), ainsi que les conversions d'unité, les pourcentages, les taux et les quotients. Il aborde également la notation scientifique et les puissances de dix.

Le **chapitre 2 « Variables et fonctions »** aborde les variables, leurs valeurs et les liens entre elles afin de définir la notion de fonction. On montre également l'intérêt de la représentation de ces fonctions pour illustrer des phénomènes naturels. Quelques fonctions usuelles en géographie et en géologie sont développées, ainsi que les notions de croissance, décroissance, minimum et maximum, utiles à l'étude de leurs évolutions et tendances.

Le **chapitre 3 « Trigonométrie, géométrie du plan et de l'espace »** développe les notions de trigonométrie du plan, de fonctions trigonométriques, et de géométrie du plan et de l'espace.

Le **chapitre 4 « Cartographie »** donne des bases de mathématiques permettant de comprendre la cartographie, notamment concernant le repérage sur le globe, les projections et la trigonométrie sphérique.

Le **chapitre 5 « Dérivation »** montre les apports de la dérivation pour l'étude des fonctions usuelles. Il s'agira de bien comprendre l'intérêt de la dérivation pour l'étude des variations d'une fonction. Des éléments de technique de calcul sont fournis, les calculs plus lourds pourront être effectués grâce à un logiciel de calcul formel.

Le **chapitre 6 « Intégration et équations différentielles »** expose deux outils fondamentaux liés aux fonctions : l'intégration et la notion d'équation différentielle. Est présentée également la notion d'équation aux dérivées partielles.

Chacun des chapitres propose **deux types d'exercices entièrement corrigés** :

- des exercices d'application mathématiques permettent la prise en main des éléments essentiels du cours et aident à leur mémorisation. Ils ne sont pas contextualisés, mais sont tout de même centrés sur les savoirs et savoir-faire qui seront effectivement utiles aux étudiants en géologie et en géographie ;
- des exercices d'application à la géographie et à la géologie dans lesquels on trouve des situations-problèmes. Ces exercices ont pour objectif de contextualiser les outils mathématiques dans des problématiques concrètes rencontrées par les étudiants.

Ces exercices (**plus de 110 au total**) sont pour la moitié contextualisés et tous corrigés.

COMMENT UTILISER CE MANUEL ?

À chaque début de série d'exercices d'un chapitre, on trouve trois séries de **questions rapides**. Ces questions permettent au lecteur d'évaluer si le contenu du chapitre est connu et compris dans ses grandes lignes. Il faut d'abord essayer de répondre aux questions sans regarder le cours et utiliser celui-ci ensuite pour vérifier ou conforter les méthodes et calculs. Il ne s'agit pas de traiter toutes les séries à suivre.

En fonction de ses connaissances et de son envie, l'étudiant peut :

- commencer directement par une série de questions rapides (à titre de test diagnostique) puis aborder (ou non) le contenu du cours en fonction du résultat ;
- commencer par lire les points clés figurant en fin de chapitre pour évaluer la familiarité avec les contenus du cours puis décider de travailler d'abord le cours ou d'abord des exercices ;

Bases de mathématiques pour la géologie et la géographie

- travailler d'abord le cours puis vérifier sa compréhension à l'aide des différents exercices ;
- démarrer directement par les exercices de géographie ou de géologie et se reporter au cours et aux exercices de mathématiques selon les besoins.

Un conseil général : pour les calculs à effectuer, commencer par chercher de tête un ordre de grandeur du résultat, puis avancer dans les calculs au maximum à la main et terminer à l'aide d'une calculatrice ou du logiciel de calcul R.

LES BONUS WEB SUR DUNOD.COM

www



Tous les scripts R et Xcas de ce manuel, ainsi que les données nécessaires à certains exercices, peuvent être téléchargés sur www.dunod.com sur la page de présentation de l'ouvrage.

BONNE LECTURE !

Les auteurs souhaitent à chacun une bonne lecture de cet ouvrage. C'est une **lecture active** qui sera efficace : crayon en main, en cherchant à résoudre les exercices et en prenant le temps de rassembler ses connaissances personnelles avant de lire les corrigés.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier les relecteurs de cet ouvrage :

Arnaud Banos, géographie, directeur de recherche au CNRS, université Paris I Panthéon-Sorbonne

Arnaud Bodin, mathématiques, maître de conférences, université de Lille I

Stéphanie Bodin, mathématiques, professeure agrégée, lycée Baudelaire à Roubaix, académie de Lille

Olivier Bourgeois, géologie, professeur des universités, université de Nantes

Nathalie Corson, mathématiques, maître de conférences, université du Havre

Jean-Paul Doerane, mathématiques, maître de conférences, université de Lille I

Annick Tollis, mathématiques, professeure agrégée, lycée de Borda à Dax, académie de Bordeaux

Merci à Bernard Parisse et Renée De Graeve, maîtres de conférences, université de Grenoble, pour leur relecture et leurs commentaires sur la partie Xcas.

À Victor, Abel, Martin et Jeanne

GRANDEURS ET MESURES

1

PLAN

- 1.1 Les nombres
- 1.2 Grandeurs et mesures
- 1.3 Valeurs approchées
- 1.4 Pourcentages, taux quotients

OBJECTIFS

- Savoir manipuler les nombres, savoir passer d'une échelle à l'autre et manipuler différents ordres de grandeur.
- Être à l'aise avec les nombres et leur comparaison ($0,1 < 0,2$ mais $-0,1 > -0,2$) ainsi qu'avec la notation scientifique et sa signification (on doit voir immédiatement que 10^{-1} est plus grand que 10^{-2}).
- Pour les objets rencontrés fréquemment, connaître leurs unités et avoir des ordres de grandeurs de leur valeur.
- Savoir convertir les unités (réussir par exemple à convertir sans erreur des m^3 en cm^3 , des m/s en cm/h).

En géographie comme en géologie, les données sont chiffrées, quantifiées (c'est-à-dire traduites en termes de grandeurs) et le besoin de manipuler des nombres est permanent. Ce chapitre s'intéresse aux systèmes de numération décimale et sexagésimale. Il présente les notions de symbole, de mesure, d'unité et de valeur approchée (arrondi, chiffres significatifs, incertitudes), ainsi que les conversions d'unité, les pourcentages, les taux et les quotients. Il aborde également la notation scientifique et les puissances de dix. Ces notions sont fondamentales en science appliquée.

1.1 LES NOMBRES

1.1.1 Numération et nombres entiers

Un **système de numération** est un ensemble de symboles et de règles permettant d'écrire les nombres (c'est une manière de compter). On regroupe les symboles par paquets et la taille d'un paquet s'appelle la **base**.

Le système de numération usuel est en base 10 : les symboles usuels sont 0, 1, 2, 3, ..., 9. On donne un nom à dix **unités** (une **dizaine**, notée 10^1 ; lire : « 10 puissance 1 »), un nom à dix dizaines (une **centaine**, valant $100 = 10 \times 10$, notée 10^2), un nom à dix centaines (un **millier**, valant $1\,000 = 10 \times 10 \times 10$, noté 10^3), etc.

D'autres bases sont utilisées : la base 60 (pour les mesures de temps et d'angle) ou encore la base 2 dans laquelle les nombres s'écrivent uniquement avec des 0 et des 1. Cette dernière écriture a révolutionné le monde actuel puisqu'elle est la clé du fonctionnement des ordinateurs : 1, le courant passe ; 0, il ne passe pas (toutes les informations, codées en nombres, peuvent donc se traduire par un courant électrique et réciproquement).

1.1.2 La numération décimale

Le système de numération le plus souvent utilisé est le système de numération décimale de position (« décimal » pour « 10 », parce que nous avons 10 doigts). Deux éléments importants sont à retenir :

- Le **système décimal** utilise dix symboles de numération (les **chiffres**) : 0, 1, 2, ..., 9 ;
- Dans l'écriture d'un nombre, la position d'un chiffre indique une puissance de dix et le chiffre précise le nombre de fois que cette puissance intervient. Un zéro indique l'absence de puissance correspondant à cette position.

C'est ainsi que l'on décrit les nombres entiers positifs.

Par exemple, dans le nombre « 525 005 », le chiffre 5 prend trois valeurs différentes. En lisant de gauche à droite : le premier 5 prend la valeur « cinq cent mille », le deuxième 5 la valeur « cinq mille » et le troisième 5 la valeur « cinq unités ». On a ainsi :

$$525\,005 = 5 \times 100\,000 + 2 \times 10\,000 + 5 \times 1\,000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1.$$



Le langage courant confond souvent les notions de chiffre et de nombre. En mathématiques, les chiffres sont les symboles utilisés pour écrire des nombres, de même que les lettres sont les symboles utilisés pour écrire des mots. Tout comme il existe des mots à une lettre (« y » dans la phrase « On y va »), il existe des nombres à un chiffre (« Victor a 3 ans »).

En associant aux nombres entiers (appelés **entiers naturels**) les signes + ou –, on décrit les **nombres entiers relatifs** (figure 1.1). Par exemple, le nombre –246 est plus petit que le nombre 37.

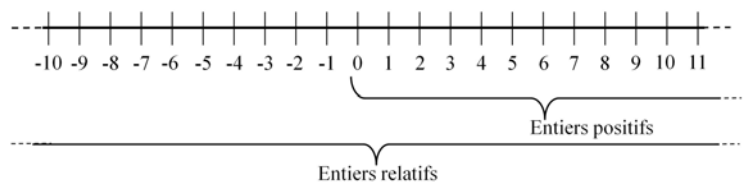


Figure 1.1– L'ensemble des nombres entiers relatifs.

L'ensemble des nombres entiers positifs (entiers naturels) est inclus dans celui des nombres entiers relatifs.

1.1.3 Puissances de 10 et nombres décimaux

Définition

Pour n entier positif, on définit 10^n par $\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $10^0 = 1$ (voir tableau 1.1).

Tableau 1.1– Notation scientifique vs. notation classique.

Notation scientifique	Notation classique
10^n	$\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$
...	...
10^3	$10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
10^2	$10 \times 10 = 100$
10^1	10
10^0	1
10^{-1}	0,1
10^{-2}	$0,1 \times 0,1 = 0,01$
10^{-3}	$0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$
...	...
10^{-n}	$\underbrace{10^{-1} \times 10^{-1} \times \cdots \times 10^{-1}}_{n \text{ fois}}$

Remarque

10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros.