PC



Une collection dirigée par
Sylvain Rondy

Fiches-méthodes

Maths

Exercices corrigés

Maxime Bailleul
Jean-Paul Bonnet
Franck Nguyen Van Sang
Denis Petrequin

ellipses

PC



Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Maths

Maxime Bailleul
Professeur au lycée Robespierre à Arras

Jean-Paul Bonnet
Professeur au lycée Wallon à Valenciennes

Franck Nguyen Van Sang
Professeur au lycée Raspail à Paris

Denis Petrequin
Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes

ellipses



Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

La maquette de cet ouvrage a été adaptée en Latex par Stéphane Préteseille.

ISBN 9782340-033290
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2019
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Sommaire

Espaces vectoriels

1 Montrer qu'une somme est directe 9
2 Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque 13
3 Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie 19
4 Montrer qu'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme 23

Réduction des endomorphismes

5 Déterminer le spectre d'une matrice carrée sans le polynôme caractéristique 31
6 Calculer un polynôme caractéristique 36
7 Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable « à la main » 42
8 Montrer qu'une matrice carrée est trigonalisable et trigonaliser (cas n = 2 et n = 3) 49
9 Montrer qu'un endomorphisme (une matrice) est nilpotent(e) et l'utiliser 55

Espaces vectoriels normés

10 Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est convexe 63
11 Montrer qu'une application est une norme 66
12 Montrer qu'une suite d'un espace vectoriel normé converge ou diverge 71
13 Montrer qu'un ensemble est ouvert (ou fermé) avec définition ou stabilité 76
14 Montrer qu'une partie est dense dans un ensemble 81
15 Montrer qu'une application est continue 86
16 Montrer qu'une fonction linéaire est continue 91
17 Utiliser une fonction polynomiale en ses coordonnées 95
18 Montrer qu'une partie est compacte 98

Algèbre bilinéaire

19 Montrer qu'une application est un produit scalaire 105
20 Déterminer le projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie 109
21 Mettre en place le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 116
22 Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est symétrique 121
23 Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est orthogonal 126
24 Utiliser le théorème spectral 130
25 Réduire une isométrie en dimension 3 134

Séries numériques

26 Étudier la nature d'une série à termes positifs 143
27 Étudier la nature d'une série alternée 147
28 Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant 153
29 Utiliser le critère de d'Alembert 157
30 Reconnaitre un produit de Cauchy 161
31 Utiliser une comparaison suite-série 166
32 Mettre en place une comparaison série-intégrale 171

Suites et séries de fonctions

33 Déterminer la limite simple d'une suite de fonctions. Cas des séries de fonctions 181
34 Étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions 185
35 Montrer qu'une série de fonctions converge uniformément en utilisant la convergence normale 190
36 Montrer qu'une série de fonctions qui ne converge pas normalement converge uniformément 194
37 Montrer que la limite d'une suite de fonctions est continue. Cas des séries de fonctions 198
38 Calculer des limites d'une fonction définie comme somme de série 202
39 Intervertir une limite et une intégrale sur un segment par convergence uniforme 206
40 Intervertir une somme et une intégrale sur un segment par convergence uniforme 210
41 Montrer que la limite d'une suite de fonctions est de classe C^1. Cas des séries de fonctions 214

Séries entières

42 Déterminer le rayon de convergence d'une série entière 223
43 Calculer la somme d'une série entière 229
44 Montrer qu'une fonction est développable en série entière et calculer son développement 235
45 Utiliser des séries entières pour résoudre une équation différentielle 240
46 Déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle 246

Arcs paramétrés

47 Étudier un arc paramétré 255

Intégration

48 Déterminer la nature d'une intégrale 263
49 Montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) intégrable 269
50 Calculer une intégrale impropre à l'aide d'une intégration par parties 273
51 Calculer une intégrale impropre à l'aide d'un changement de variables 277
52 Utiliser le théorème de convergence dominée 282
53 Utiliser le théorème d'intégration terme à terme 286
54 Étudier la continuité et la dérivabilité d'une intégrale à paramètre 292

Compléments de probabilité

55 Montrer qu'un ensemble est un événement 301
56 Utiliser la continuité d'une probabilité ; événements négligeables ou presque sûrs 304
57 Utiliser un système complet d'événements et la formule des probabilités totales 310
58 Utiliser la formule de Bayes 316
59 Utiliser les lois usuelles pour modéliser une expérience aléatoire 320
60 Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance finie et la calculer 326
61 Utiliser la formule de transfert pour calculer une espérance 332
62 Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance et la calculer 335
63 Calculer la covariance de deux variables aléatoires 341
64 Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires 344
65 Utiliser les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev 349
66 Déterminer et utiliser une fonction génératrice 353

Calcul différentiel

67 Résoudre un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants 361
68 Résoudre une ED scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une indication 367
69 Recoller les solutions d'une équation différentielle 372
70 Calculer des dérivées partielles. Calculer la différentielle 378
71 Rechercher les extrema d'une fonction 383
72 Utiliser la règle de la chaine 388
73 Résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles 391

Espaces vectoriels



Montrer qu'une somme est directe



Quand on ne sait pas !

Soit $p \geq 2$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- **(Définition d'une somme directe)**

$$\left[\begin{array}{c}\text{La somme } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \\ \text{et l'on note } \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k\end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{c}\text{La décomposition de tout vecteur de } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{sous la forme } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k, \text{ avec } u_k \in F_k, \text{ est unique}\end{array}\right]$$

On dit alors que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

- **(Caractérisation 1)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c}\text{Si } 0_E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k \text{ avec } u_k \in F_k, \\ \text{alors tous les } u_k \text{ sont nuls}\end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 2)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c}\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p) \text{ est une base de } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{où les } \mathscr{B}_k \text{ sont des bases de } F_k\end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 3 - en dimension finie)**
On suppose de plus que $F_1, \cdots, F_p$ sont de dimension finie.

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

- **(Cas particulier important : $p = 2$)**

$$\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

Que faire ?

- Pour montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe, on peut utiliser une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
    on suppose que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$ avec $u_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, puis on exploite les propriétés des F_k pour montrer que tous les u_k sont nuls.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
    on commence par déterminer une base $\mathscr{B}_k$ de F_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p)$ est une base de la somme $F_1 + \cdots + F_p$.
  - **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
    on montre que la dimension de la somme des F_k est égale à la somme des dimensions des F_k.
  - **Méthode 4 (uniquement si $p = 2$)**
    on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est nulle.
    Dans le cas où $p \geq 3$, ce résultat ne se généralise pas aisément (cf exercice 1).

Conseils

- En pratique, on privilégie les méthodes 1 et 4 pour montrer qu'une somme est directe.
  La méthode 4 est illustrée dans la fiche 3 sur les sous-espaces supplémentaires.
  Les méthodes 1 à 3 sont comparativement illustrées dans la rubrique *Exemple traité*.

Exemple traité

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \text{Vect}(X^k Q)$.
Montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

SOLUTION

- **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
  Soit $(R_1, \cdots, R_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $R_1 + \cdots + R_p = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad (\star)$.
  Montrons que $R_1 = \cdots = R_p = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
  Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, comme $R_k \in F_k$, il existe un scalaire λ_k tel que $R_k = \lambda_k (X^k Q)$.
  On en déduit alors les équivalences suivantes :

$$(\star) \iff \lambda_1 XQ + \lambda_2 X^2 Q + \cdots + \lambda_p X^p Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \underset{Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}{\iff} \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_p X^p = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

  Or la famille $(X^k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ est libre, donc tous les λ_k sont nuls, a fortiori les R_k aussi.

- **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
  Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la famille $\mathscr{B}_k = (X^k Q)$ est génératrice de F_k et est libre (car

constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de F_k. Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \text{Vect}(X^k Q) = \text{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

La famille concaténée $\mathscr{B} = (X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$ et est libre (car constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés), donc est bien une base de $F_1 + \cdots + F_p$.

- **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim F_k = \text{rg}(X^k Q) = 1$ (car Q est non nul). Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \text{Vect}(X^k Q) = \text{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}), \text{ d'où : } \dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \text{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

Or la famille $(X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc est libre, d'où :

$$\dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \text{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = \text{Card}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = p = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

Exercices

EXERCICE 1.1

Soit $p \geq 3$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1 On suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
Les sous-espaces F_1, F_2 et F_3 sont-ils nécessairement en somme directe ?

2 Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{la somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \forall k \in [\![1, p-1]\!],\ (\sum_{i=1}^{k} F_i) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

1 Considérer trois droites judicieusement choisies de $E = \mathbb{R}^3$.

2 Utiliser la méthode 2 pour l'implication $\Leftarrow$.

EXERCICE 1.1

1 Considérons trois droites coplanaires et deux à deux distinctes de $E = \mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \text{Vect}((1,0,0)) \quad \text{et} \quad F_2 = \text{Vect}((0,1,0)) \quad \text{et} \quad F_3 = \text{Vect}((1,1,0))$$

Ces trois espaces sont bien deux à deux en somme directe (car d'intersection deux à deux nulle). Par contre, ils ne sont pas en somme directe. En effet :

$$0_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(-1,0,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in F_2} + \underbrace{(1,1,0)}_{\in F_3}$$

Ainsi, des sous-espaces qui sont deux à deux d'intersection nulle ne sont pas nécessairement en somme directe.

2 Montrons la double implication :

(⇒) Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrons l'égalité ensembliste demandée.

(⊃) Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

(⊂) Soit $u \in \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1}$ i.e. $\begin{cases} \exists (u_1, \cdots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k,\ u = u_1 + \cdots + u_k \\ u \in F_{k+1} \end{cases}$
On en déduit l'égalité vectorielle suivante :

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{u_k}_{\in F_k} + \underbrace{(-u)}_{\in F_{k+1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_{k+2}} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E$$

Or la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, d'où $u_1 = \cdots = u_k = -u = 0_E$.
En particulier, $u = 0_E$.

(⇐) Supposons $\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.
Montrons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $(u_1, \cdots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$.
On a alors l'équivalence suivante :

$$u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff \underbrace{u_1 + \cdots + u_{p-1}}_{\in F_1 + \cdots + F_{p-1}} = \underbrace{-u_p}_{\in F_p}$$

D'où $u_1 + \cdots + u_{p-1} = -u_p \in (F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0_E\}$, et on en déduit alors que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = u_p = 0_E$.
Sachant que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = 0_E$ et $(F_1 + \cdots + F_{p-2}) \cap F_{p-1} = \{0_E\}$, on montre par un raisonnement analogue au précédent que $u_{p-1} = 0_E$.
De proche en proche, on montre que tous les u_k sont nuls.

Ainsi, on a bien montré l'équivalence souhaitée.

Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque



Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- **(Définition de la supplémentarité)**

$$\left[\ F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E\ \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} E = F \oplus G, \text{ c'est-à-dire tout vecteur } u \in E \\ \text{se décompose de manière unique comme la somme} \\ \text{d'un vecteur } u_F \text{ de } F \text{ et d'un vecteur } u_G \text{ de } G \end{array}\right]$$

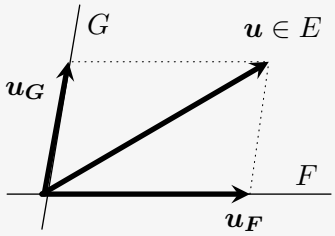

Figure illustrative

On dit aussi que F est UN supplémentaire de G dans E ou que G est UN supplémentaire de F dans E.

- **(Caractérisation de la supplémentarité)**

$$E = F \oplus G \iff \left\{\begin{array}{ll} E = F + G & \leftarrow \textit{garantit l'existence d'une décomposition} \\ F \cap G = \{0_E\} & \leftarrow \textit{garantit son unicité sous réserve d'existence} \end{array}\right.$$

- **(Supplémentarité des éléments caractéristiques d'un projecteur/d'une symétrie)**
  Soit p et s des endomorphismes de E.
  - Si p est un projecteur de E, alors : $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
  - Si s est une symétrie de E, alors : $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension quelconque, on peut suivre une des méthodes suivantes énoncées par ordre de praticité :
  - **Méthode 1 (en utilisant la définition)**
    on procède par analyse-synthèse dont on rappelle le principe et la rédaction :
    - *Analyse (on suppose l'existence d'une décomposition et on montre l'unicité).*
      Soit $u \in E$. On suppose que $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

      [*Raisonnement qui aboutit à un unique couple* (u_F, u_G)]

      À l'issue de l'analyse, on trouve un unique couple (u_F, u_G) qui est CANDIDAT SOLUTION pour une telle décomposition.
    - *Synthèse (on montre l'existence d'une décomposition).*
      On vérifie que l'unique couple candidat solution trouvé est bien solution, c'est-à-dire $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation)**
    on intuite l'existence d'une décomposition de $u \in E$ comme somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G, puis on montre l'unicité de cette décomposition en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition de cette décomposition.
  - **Méthode 3 (en utilisant les propriétés des projecteurs et symétries)**
    on montre que F et G sont les éléments caractéristiques d'un certain projecteur p ou d'une certaine symétrie s à intuiter, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition du projecteur ou de la symétrie.

EXEMPLE 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

SOLUTION

Posons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application $s : E \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall M \in E,\ s(M) = M^t$$

On montre aisément que s est un endomorphisme de E et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc s est une symétrie de E, et on déduit alors que :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Or on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s - \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = M\} = F$$

$$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s + \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = -M\} = G$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

Conseils

- Ne pas hésiter à identifier les espaces E, F et G qui entrent en jeu et à préciser la nature des objets manipulés (uplets, polynômes, matrices, etc . . .).
- Les méthodes présentées dans cette fiche sont valables en dimension quelconque, a fortiori en dimension finie.

Exemple traité

On note respectivement $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

SOLUTION

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = g + h \qquad \text{avec } g \text{ paire et } h \text{ impaire}$$

- *Analyse.* Supposons qu'il existe un couple (g,h) solution, c'est-à-dire vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \\ f = g + h \end{array}\right. , \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \left\{\begin{array}{lrcll} \forall x \in \mathbb{R}, & g(-x) & = & g(x) & (i) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & h(-x) & = & -h(x) & (ii) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) & = & g(x) + h(x) & (iii) \end{array}\right.$$

Cherchons des conditions nécessaires sur le couple (g,h).
Soit $x \in \mathbb{R}$. Cherchons des conditions nécessaires sur le couple $\big(g(x), h(x)\big)$.
On a en particulier le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(-x) + h(-x) \end{array}\right. \quad \underset{\text{par } (i) \text{ et} (ii)}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(x) - h(x) \end{array}\right.$$

par (iii)

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(x) + f(-x) & = & 2g(x) \end{array}\right.$$

Après calculs, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{rcl} h(x) & = & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \\ g(x) & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}\right\}$ *ces expressions déterminent un unique couple* (g,h)

SI il existe un couple (g,h) solution du problème, ALORS nécessairement il est unique et est composé des fonctions g et h définies par :

$$g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}\right.$$

■ *Synthèse.* Vérifions que le couple (g, h) obtenu à l'issue de l'analyse est bien solution du problème, c'est-à-dire vérifie : $\begin{cases} g \text{ est paire} & (i') \\ h \text{ est impaire} & (ii') \\ f = g + h & (iii') \end{cases}$

▶ La condition (i') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

▶ La condition (ii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

▶ La condition (iii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Exercices

EXERCICE 2.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

1 Montrer que $E = F \oplus G$.

2 En déduire l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

EXERCICE 2.2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\dfrac{\text{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \dfrac{\text{Tr}(A)}{n} I_n\right)$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{Tr})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

1 Faire un raisonnement par analyse-synthèse.

2 On rappelle que p est défini par :

$$\forall u = u_F + u_G \in E,\ p(u) = u_F$$

EXERCICE 2.2

1 Trivial.

2 Après avoir remarqué que :

$$\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n \in \mathrm{Vect}(I_n) \quad \text{et} \quad A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$$

quelle égalité ensembliste peut-on en déduire ?

Solutions des exercices

EXERCICE 2.1

1 ■ *Analyse.* Soit $u = (x, y, z) \in E$. Supposons qu'il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Montrons que cette décomposition est unique.
Comme $u_F \in F$, il existe des réels x', y' et z' tels que $u_F = (x', y', z')$ et vérifiant $x' + y' + 2z' = 0$.
Comme $u_G \in G$, il existe un réel λ tel que $u_G = (-\lambda, -2\lambda, \lambda)$.
Pour montrer l'unicité de cette décomposition, il suffit de montrer que u_F et u_G s'expriment de manière unique en fonction de u, ce qui revient à montrer que x', y', z' et λ s'expriment de manière unique en fonction de x, y et z.
Or l'égalité $u = u_F + u_G$ permet d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x = x' - \lambda \\ y = y' - 2\lambda \\ z = z' + \lambda \\ x' + y' + 2z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + 2\lambda \\ z' = z - \lambda \\ (x + \lambda) + (y + 2\lambda) + 2(z - \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -y - 2z \\ y' = -2x - y - 4z \\ z' = x + y + 3z \\ \lambda = -x - y - 2z \end{cases}$$

Donc x', y', z' et λ s'expriment bien de manière unique en fonction de x, y et z.
Sous réserve d'existence d'une décomposition de u comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, on a montré que la décomposition est unique.

■ *Synthèse.* Soit $u = (x, y, z) \in E$. Montrons qu'il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.
En considérant les résultats trouvés lors de l'analyse, posons :

$$u_F = (-y - 2z, -2x - y - 4z, x + y + 3z) \quad \text{et} \quad u_G = (x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, -x - y - 2z)$$

Il reste alors à vérifier que $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.
Ces trois vérifications sont aisées et laissées au lecteur.

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

2 Le projecteur sur F parallèlement à G est défini par :

$$\forall (x, y, z) \in E,\ p(x, y, z) = (-y - 2z, -2x - y - 4z, x + y + 3z)$$

EXERCICE 2.2

1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons :

$$\frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n \right) = A$$

2 Il suffit de montrer que $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{Tr}) & (i) \\ \text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\} & (ii) \end{cases}$

- Pour montrer la première égalité ensembliste (i), on montre la double inclusion :
  - $\supset$ Cette inclusion est toujours vraie car une somme de sous-espaces de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - $\subset$ Cette inclusion est une conséquence immédiate de la question 1.
    En effet, on y a montré que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \underbrace{\frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n}_{\in \text{Vect}(I_n)} + \underbrace{\left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n \right)}_{\in \text{Ker}(\text{Tr})\ (*)}$$

    Sachant que la trace est linéaire, justifions $(*)$:

$$\text{Tr}\left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n \right) = \text{Tr}(A) - \frac{\text{Tr}(A)}{n} \underbrace{\text{Tr}(I_n)}_{=n} = 0_{\mathbb{R}}$$

- Pour montrer la seconde égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :
  - $\supset$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre $\mathcal{O}_n$.
  - $\subset$ Soit $A \in \text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{Tr})$ i.e. $\begin{cases} A \in \text{Vect}(I_n) \\ A \in \text{Ker}(\text{Tr}) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda I_n \\ \text{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$

    Montrons que $A = \mathcal{O}_n$.
    On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & \text{Tr}(A) & = & 0_{\mathbb{R}} \\ \text{d'où :} & \text{Tr}(\lambda I_n) & = & 0_{\mathbb{R}} \\ \text{d'où :} & \lambda \times n & = & 0_{\mathbb{R}} \\ \text{d'où :} & \lambda & = & 0_{\mathbb{R}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{car } A = \lambda I_n \\ \text{car la trace est linéaire} \\ \text{et } \text{Tr}(I_n) = n \\ \text{car } n \neq 0 \end{array}$$

    On en déduit alors que $A = \lambda I_n = 0_{\mathbb{R}} \times I_n = \mathcal{O}_n$.

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{Tr})$.

Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie



Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- **(Caractérisation de la supplémentarité 1)**

$$E = F \oplus G \iff \underset{\text{la plus utile}}{\uparrow} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff \underset{\text{rarement utilisée}}{\uparrow} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F + G = E \end{cases}$$

- **(Caractérisation de la supplémentarité 2)**

$$E = F \oplus G \iff \left[\begin{array}{c} \text{la famille } \mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) \text{ est une base de } E, \\ \text{où } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}_G \text{ désignent des bases respectives} \\ \text{quelconques de } F \text{ et de } G \end{array} \right]$$

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension finie, on peut suivre une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1) :**
    on montre une égalité de dimensions, à savoir $\dim E = \dim F + \dim G$, et une inclusion ensembliste, à savoir $F \cap G \subset \{0_E\}$ (l'autre inclusion étant toujours vraie).
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2) :**
    on détermine une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
    En fait, cette méthode n'est pas spécifique à la dimension finie, cependant elle est souvent utilisée dans ce contexte-là.

  Ces deux méthodes sont comparativement illustrées à travers l'exercice 1 de cette fiche.

Conseils

- En incluant les méthodes de la fiche précédente, l'abondance des méthodes pour montrer la supplémentarité peut dérouter. Il est bon de privilégier la méthode 1 de la présente fiche.
- Lorsque F et G sont des images ou des noyaux d'application linéaire, il peut-être utile de penser au théorème du rang pour établir une égalité de dimensions.

Exemple traité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

SOLUTION

Montrons que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ i.e. $\begin{cases} E = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) & (i) \\ \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

- L'égalité des dimensions (i) est assurée par le théorème du rang appliqué à f dont l'espace de départ E est de dimension finie.
- Pour montrer l'égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :

  $\supset$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

  $\subset$ Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ i.e. $\begin{cases} u \in \text{Im}(f) \\ u \in \text{Ker}(f) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists u' \in E,\ u = f(u') \\ f(u) = 0_E \end{cases}$

  Montrons que $u = 0_E$.
  On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & u & = & f(u') \\ \text{d'où :} & f^2(u) & = & f^3(u') \\ \text{d'où :} & 0_E & = & f(u') \\ \text{d'où :} & 0_E & = & u \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{en composant par } f^2 \\ \text{car } u \in \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f)^2 \text{ et } f^3 = f \\ \text{car } u = f(u') \\ \\ \end{array}$$

Ainsi, on a bien montré que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercices

EXERCICE 3.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

1 Montrer que $E = F \oplus G$ à l'aide de la méthode 1.

2 Montrer que $E = F \oplus G$ à l'aide de la méthode 2.

3 Comparer au raisonnement par analyse-synthèse effectué dans l'exercice 1 de la fiche 2. Quels sont les avantage(s) et inconvénient(s) du raisonnement par analyse-synthèse ?

EXERCICE 3.2

Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 3.2 Si besoin, commencer par déterminer une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ dans le cas où $n = 2$.

Solutions des exercices

EXERCICE 3.1

1 Montrons que $E = F \oplus G$ i.e. $\begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G & (i) \\ F \cap G = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

- $\mathscr{B}_G = ((-1,-2,1))$ est génératrice de G et est libre (car constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de G. Ainsi, $\dim G = \text{Card}(\mathscr{B}_G) = 1$.
  Par ailleurs, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -y - 2z\right\} = \text{Vect}((-1,1,0),(-2,0,1))$$

  $\mathscr{B}_F = ((-1,1,0),(-2,0,1))$ est génératrice de F et est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), donc est une base de F. Ainsi, $\dim F = \text{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$.
  Sachant que $\dim E = 3$, l'égalité des dimensions (i) est bien vérifiée.

- Pour montrer l'égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :

  $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

  $\boxed{\subset}$ Soit $u = (x,y,z) \in F \cap G$ i.e. $\begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ u \underset{(\star)}{=} (-\lambda, -2\lambda, \lambda) \end{cases}$.

  Montrons que $u = 0_E$.
  On a les déductions suivantes :

$$x + y + 2z = 0_{\mathbb{R}} \underset{\text{par } (\star)}{\Longrightarrow} (-\lambda) + (-2\lambda) + 2(\lambda) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{R}}$$

  On en déduit alors que $u = 0_E$.

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

2 Montrons que $E = F \oplus G$ i.e. $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.

Il suffit alors de montrer que $\begin{cases} \text{Card}(\mathscr{B}) = \dim E & (i) \\ \mathscr{B} \text{ est libre} & (ii) \end{cases}$

- Les bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont celles déterminées à la question précédente, et la condition (i) est bien vérifiée.
- Il reste à vérifier la condition (ii).
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(-1,1,0)+\lambda_2(-2,0,1)+\lambda_3(-1,-2,1) = 0_E$ $(\star)$.
  Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  On a les équivalences suivantes :

$$(\star) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

3 Le raisonnement par analyse-synthèse est nettement plus long à rédiger en règle générale. Cependant, il permet d'en déduire aisément l'expression des projecteurs et symétries d'éléments caractéristiques F et G.

EXERCICE 3.2

Montrons que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\begin{cases} \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) & (i) \\ \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{\mathcal{O}_n\} & (ii) \end{cases}$

- La famille $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, d'où $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$.
  La famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, d'où $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.
  On en déduit alors :

$$\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$$

- $(\supset)$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre $\mathcal{O}_n$.
  $(\subset)$ Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $M = \mathcal{O}_n$.
  On a les équivalences suivantes :

$$M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \iff \left[M^T = M \quad \text{ET} \quad M^T = -M \right] \iff M = \mathcal{O}_n$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme



Dans cette fiche $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. On dit aussi que F est u-stable.
- Si F est un sous-espace vectoriel stable par u on peut alors définir l'endomorphisme induit par u sur F, noté $u_{|F}$. C'est l'endomorphisme de F défini par

$$u_{|F} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Que faire ?

On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels stables car on peut alors définir l'endomorphisme induit. En effet si F est un sous-espace vectoriel de E, qui ne serait pas stable par u alors la restriction de u à F serait défini de F dans E (ou $u(F)$) mais pas dans F et ne serait donc pas un endomorphisme.

- Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme u, on peut directement montrer que les images par u de tous les vecteurs de F appartiennent à F. Le plus souvent, on se contente de montrer que c'est les cas pour tous les vecteurs d'une base de F ce qui permet de conclure en utilisant la stabilité des sous-espaces vectoriels par combinaison linéaire.

  EXEMPLE 1 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0\}$. Montrons que H est stable par u.
  On détermine une base de H. On sait que H est de dimension 2. Pour déterminer une base, il suffit de considérer deux vecteurs de H qui ne soient pas colinéaires. On pose $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$.

On calcule $u(v_1)$ et $u(v_2)$ en faisant les produits :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc que $u(v_1) = v_2$ et $u(v_2) = -v_1$. De ce fait H est stable par u.

- Si F est un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u, on s'intéresse souvent à l'étude de l'endomorphisme induit par u sur F noté $u_{|F}$. On peut par exemple, chercher à déterminer une matrice de $u_{|F}$.

EXEMPLE 2 On reprend l'endomorphisme u de l'exemple 1 ainsi que le sous-espace vectoriel H qui est stable par u. On cherche à déterminer une matrice de $u_{|H}$. Il est important de noter que l'on doit pour cela considérer une base de H (et pas de $\mathbb{R}^3$) car $u_{|H} \in \mathcal{L}(H)$. Reprenons la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1)$ qui a été considérée à l'exemple 1. En reprenant les calculs précédents,

$$u_{|H}(v_1) = u(v_1) = v_2 \text{ et } u_{|H}(v_2) = u(v_2) = -v_1$$

On en déduit que la matrice de $u_{|H}$ dans la base $\mathcal{B}$ de H est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conseils

- Quand on cherche à montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme u, on considère souvent une base $(x_1, \ldots, x_p)$ de F pour montrer que pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $u(x_i) \in F$.
- Pour réaliser ce qui précède, le plus simple est souvent d'exhiber des équations qui définissent l'espace vectoriel F et de montrer que si $x \in F$ alors $u(x)$ vérifie les équations de F.

Exemple traité

Soit u un endomorphisme de E. On suppose que u est diagonalisable et que le spectre de u contient deux éléments a et b. On note E_a et E_b les deux sous-espaces propres. On considère un sous-espace vectoriel F stable par u et on pose $F_a = E_a \cap F$ et $F_b = E_b \cap F$.

1 Justifier que pour $x \in F$, il existe $(x_a, x_b) \in E_a \times E_b$ tel que $x = x_a + x_b$.

2 Exprimer x_a et x_b en fonction de x et de $u(x)$. En déduire que $x_a \in F_a$ et $x_b \in F_b$.

3 En déduire que $u_{|F}$ est diagonalisable.

SOLUTION

1 Comme u est diagonalisable, $E = E_a \oplus E_b$ et donc, pour tout x dans E, il existe un couple $(x_a, x_b) \in E_a \times E_b$ tel que $x = x_a + x_b$. C'est donc, a fortiori, vrai pour tout élément x de F.

2 On calcule $u(x)$,

$$u(x) = u(x_a) + u(x_b) = ax_a + bx_b$$

On en déduit que x_a et x_b vérifient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_a + x_b & = & x \\ ax_a + bx_b & = & u(x) \end{array} \right.$$

En résolvant, on obtient :

$$x_a = \frac{1}{b-a}(bx - u(x)) \text{ et } x_b = \frac{1}{a-b}(ax - u(x))$$

Maintenant, comme $x \in F$ et que F est stable par u, $u(x) \in F$ et ainsi x_a et x_b sont des éléments de F. Mais x_a est élément de E_a et x_b est élément de E_b, donc x_a est élément de F_a et x_b est élément de F_b.

3 On vient de montrer que $F = F_a + F_b$ car tout vecteur x de E se décompose en une somme d'un vecteur de F_a et d'un vecteur de F_b. De plus, $F_a \cap F_b \subset E_a \cap E_b = \{0\}$ donc ils sont en somme directe. Finalement, $F = F_a \oplus F_b$ ce qui signifie que $u_{|F}$ est diagonalisable.

Exercices

EXERCICE 4.1

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère aussi le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = z\}$.

1 Montrer que F est stable par u.

2 Justifier que $e_1 = (1, 1, 1)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$ est une base de F est donner la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F dans cette base.

EXERCICE 4.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que Ker (u) et Im (u) sont des sous-espaces vectoriels stables par u.

2 Que dire de l'endomorphisme induit $u_{|\text{Ker }(u)}$?

3 L'endomorphisme $u_{|\text{Im }(u)}$ est-il surjectif? On pourra considérer l'application u de $\mathbb{R}^2$ dans lui même dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 4.1

1 Procéder comme dans l'exemple 1.

2 Attention à écrire la matrice de $u_{|F}$ dans la base donnée par l'énoncé.

Solutions des exercices

EXERCICE 4.1

1 On détermine une base du sous-espace vectoriel F. Tout vecteur w de F s'écrit,

$$w = (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$$

On pose donc $w_1 = (1, 0, 1)$ et $w_2 = (0, 1, 0)$. On vient de voir que la famille (w_1, w_2) engendre F. De plus elle est libre car ce ne sont pas des vecteurs colinéaires. On a bien une base de F.
Maintenant, $u(w_1) = (2, 1, 1) + (-1, -2, 0) = (1, -1, 1) \in F$.
De plus $u(w_2) = (1, 3, 1) \in F$. On en déduit que F est stable par u.

2 Les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à F et forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires. Comme F est de dimension 2, ils en forment une base. De plus

$$u(e_1) = (2, 2, 2) = 2e_1 \text{ et } u(e_2) = (1, 3, 1) = e_1 + 2e_2$$

On en déduit que la matrice de $u_{|F}$ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.2

1 Soit $x \in \text{Ker}(u)$, $u(x) = 0 \in \text{Ker}(u)$ donc $\text{Ker}(u)$ est stable par u.
Soit $x \in \text{Im}(u)$, $u(x) \in \text{Im}(u)$ par définition de $\text{Im}(u)$ donc $\text{Im}(u)$ est stable par u.

2 Pour tout $x \in \text{Ker}(u)$, $u(x) = 0$ donc $u_{|\text{Ker}(u)}$ est l'endomorphisme nul.

3 Soit $y \in \text{Im}(u)$, il existe, par définition $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Cependant, il se peut que x n'appartiennent pas à $\text{Im}(u)$ et la surjectivité de $u_{|\text{Im}(u)}$ s'en trouverait contrariée. Par exemple, si on considère l'application u de $\mathbb{R}^2$ dans lui même dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $\text{Im}(u)$ est $\text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1, 0)$. Or $u(e_1) = 0$ donc $u_{|\text{Im}(u)}$ est l'application nulle de $\text{Vect}(e_1)$ dans lui même. Elle n'est pas surjective.

Réduction des endomorphismes



Déterminer le spectre d'une matrice carrée sans le polynôme caractéristique



5

Quand on ne sait pas !

La notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale.

EXEMPLE 1 Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on lit sur la matrice que son spectre vaut $\{1, 2\}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le nombre λ est une valeur propre de A si et seulement si $\text{Rg}(A - \lambda I) < n$.
  L'entier $\dim \ker(A - \lambda I)$ est la dimension du sous-espace propre associé à λ.

EXEMPLE 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{Rg}(A - 2I) = 2 < 3$ donc 2 est une valeur propre de A, son sous-espace propre associé est de dimension 1. On peut vérifier par cette méthode que 3 est également une valeur propre de A.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le nombre λ est une valeur propre de A si, et seulement si, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$.

EXEMPLE 3

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $UX = 2X$ donc 2 est une valeur propre de U.

Que faire ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour déterminer les valeurs propres de A sans en calculer le polynôme caractéristique, on essaie de répondre aux questions suivantes :

- A est-elle diagonale ou triangulaire ? Dans ce cas, les valeurs sur sa diagonale sont les valeurs propres de A.

- $\mathrm{Rg}(A) < n$? Dans ce cas, 0 est une valeur propre de A.
- Pour chacune des lignes de A, on calcule la somme des coefficients de cette ligne. Le résultat est-il constant de valeur λ ? Dans ce cas, λ est une valeur propre de A et un vecteur propre associé est le vecteur dont tous les coefficients valent 1.

EXEMPLE 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

La somme des coefficients de la première ligne vaut $1/2+1/2 = 1$; la somme de ceux de la seconde vaut $1/4 + 3/4 = 1$. Ces deux valeurs sont égales donc leur valeur commune 1 est une valeur propre, et un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conseils

- Si l'on soupçonne que λ est une valeur propre de A, on peut le vérifier en calculant la valeur de $\det(A - \lambda I)$. Si le résultat vaut 0 alors λ est effectivement une valeur propre de A.
- Lorsqu'il ne reste plus qu'une seule valeur propre à trouver, il est bon de calculer la trace de A. En effet, ce nombre est égal à la somme de toutes les valeurs propres, comptées avec multiplicité, et permet donc de déterminer la dernière.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le spectre de A sans calculer son polynôme caractéristique. Est-elle diagonalisable ?

SOLUTION

On remarque tout d'abord que $\mathrm{Rg}(A) = 2$, en effet la seconde colonne est l'opposée de la première, donc 0 est une valeur propre de A. De même,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Rg}(A - 3I) = 2$$

car la troisième ligne est nulle. Ainsi 3 est également une valeur propre de A.
Il ne nous reste qu'une valeur propre λ à déterminer. On calcule alors la trace de A de deux façons. D'une part, la trace est la somme des coefficients diagonaux de A donc $\mathrm{Tr}(A) = 5$. D'autre part, c'est également la somme des valeurs propres de A (éventuellement comptées avec leur multiplicité) donc $\mathrm{Tr}(A) = 0 + 3 + \lambda$. Par identification, il vient que $\lambda = 2$. Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, 3\}$.

Le spectre de A est donc constitué de 3 valeurs propres distinctes et comme il y a autant de valeurs propres distinctes que la taille de la matrice, A est donc diagonalisable.

Exercices

EXERCICE 5.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A.

➲ Source : ENSEA PC

EXERCICE 5.2

Soit $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.
2. Calculer M^2. En déduire que M^2 s'exprime sous la forme $\alpha M + \beta I$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer et I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour quelles valeurs de a et de b, M est-elle inversible ? Dans ces cas, déterminer M^{-1}.

➲ Source : TPE EIVP PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 5.1 Remarquer que la matrice A est de rang 1 et considérer sa trace.

EXERCICE 5.2

1. Considérer le rang de la matrice $M - (a-b)I$.
2. Introduire la matrice J dont tous les coefficients valent 1. Vérifier que $J^2 = nJ$ et déterminer M en fonction de J et de I.
3. La première question permet de déterminer dans quels cas 0 est une valeur propre. La seconde permet de déterminer l'inverse de M comme polynôme en M et I.

EXERCICE 5.1

De $\mathrm{Rg}(A) = 1$ on déduit que 0 est une valeur propre de A et que la dimension du sous-espace propre associé vaut 3 ce qui implique que la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique de A vaut au moins 3. Comme le polynôme caractéristique de A est de degré 4, il nous manque au plus une racine dont la multiplicité vaudrait au plus 1. On calcule donc la trace de A de deux façons en notant λ la valeur propre recherchée. On a alors $10 = \mathrm{Tr}(A) = 0 + 0 + 0 + \lambda$. On en déduit donc que $\lambda = 10$ est une valeur propre de A.
En résumé, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 10\}$, $\dim\ker(A - 0I) + \dim\ker(A - 10I) = 3 + 1 = \dim\mathbb{R}^4$ par suite A est diagonalisable.

EXERCICE 5.2

1 On remarque que M est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral.

D'une part, $\mathrm{Rg}\,(M - (a-b)I) = 1$ donc $a - b$ est une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé vaut $n - 1$.

D'autre part, comme M est diagonalisable et non scalaire, elle possède une seconde valeur propre que l'on note λ dans la suite. La dimension du sous-espace propre associé à λ vaut 1. En calculant la trace de M de deux façons, d'une part $\mathrm{Tr}(M) = na$, d'autre part, $\mathrm{Tr}(M) = (n-1)(a-b) + \lambda$ donc

$$\lambda = na - (n-1)(a-b) = a + (n-1)b.$$

2 En posant J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, on a

$$M = bJ + (a-b)I$$

Par ailleurs, $J^2 = nJ$, et, comme $J \times I = I \times J$, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M^2 &= b^2J^2 + 2b(a-b)J + (a-b)^2I \\ &= (nb + 2(a-b))\,bJ + (a-b)^2I \\ &= (nb + 2(a-b))\,(M - (a-b)I) + (a-b)^2I \\ &= (nb + 2(a-b))\,M - (a-b)\,(nb + 2(a-b) - (a-b))\,I \\ &= (2a + (n-2)b)\,M - (a-b)(a + (n-1)b)I \end{aligned}$$

donc $\alpha = 2a + (n-2)b$ et $\beta = -(a-b)\,(a + (n-1)b)$.

3 M est inversible si, et seulement si, $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$ donc si, et seulement si, $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$.
Sous ces conditions, $(a+(n-1)b)\,(a-b) \neq 0$ et le résultat de la question 2 donne

$$M \times \frac{-1}{(a+(n-1)b)\,(a-b)}\,(M-(2a+(n-2)b)\,I) = I$$

ce qui permet de conclure que $M^{-1} = \frac{-1}{(a+(n-1)b)(a-b)}\,(M-(2a+(n-2)b)\,I)$.



6 Calculer un polynôme caractéristique

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

- Si A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale. On la note χ_A et on l'appelle le polynôme caractéristique de A. C'est un polynôme unitaire de degré n
- Soit u un endomorphisme de E. On définit de même le polynôme caractéristique de u noté χ_u comme la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\chi_u : x \mapsto \det(x\,\mathrm{I}_E - u)$. C'est un polynôme unitaire de degré égal à la dimension de E.
- Si A est la matrice de u dans une base de E alors $\chi_u = \chi_A$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u (ou d'une matrice carrée A) sert en particulier à en déterminer le spectre. En effet le spectre de u (ou de A) est exactement l'ensemble des racines de χ_u (ou χ_A).

Que faire ?

- Le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice A se ramène la plupart des temps au simple calcul du déterminant $\det(xI_n - A)$. Dans le cas d'un endomorphisme u, on commencera souvent par écrire la matrice de u dans un base bien choisie

EXEMPLE 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. On veut calculer son polynôme caractéristique χ_A. Pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x+6 & -2 & -5 \\ 2 & x-2 & -1 \\ 11 & -3 & x-9 \end{vmatrix}$$

En utilisant la formule d'un déterminant de taille 3, on obtient après développement

$$\chi_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont 1 et 2 ; la première est de multiplicité 1 et la deuxième de multiplicité 2.

- Dans la plupart des cas, on calcule le polynôme caractéristique pour en déduire les valeurs propres mais, plus rarement, on peut procéder dans l'autre sens. Si on sait que λ est une valeur propre d'un endomorphisme u (ou d'une matrice A) et que de plus le sous-espace propre associé est de dimension r, on en déduit que λ est une valeur propre de multiplicité **au moins** r et que, de ce fait, $(X-\lambda)^r$ divise χ_u (ou χ_A).

  EXEMPLE 2 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  où n est supposé supérieur ou égal à 2.

  On note $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

  On remarque pour commencer que c'est une matrice de rang 1 car son image est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur colonne X. De ce fait, le noyau de A (qui est aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0) est de dimension $n-1$ d'après le théorème du rang. On en déduit que 0 est une valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ et, de ce fait, que X^{n-1} divise χ_A.

  On remarque de plus que $AX = nX$. Cela implique que X est un vecteur propre pour la valeur propre n c'est-à-dire que n est une valeur propre de multiplicité au moins 1 de A. Par conséquence, $X-n$ divise χ_A.

  Finalement, comme χ_A est unitaire et de degré n, $\chi_A = X^{n-1}(X-n) = X^n - nX^{n-1}$.

Conseils

- Dans le cas d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le coefficient constant de χ_A (qui vaut $\chi_A(0)$) est égal à $(-1)^n \det(A)$. D'autre part, le coefficient d'ordre $n-1$ est égal à l'opposé de la trace de A. On a donc

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

  Cela permet en particulier de vérifier ses calculs.
- Quand on recherche le polynôme caractéristique d'une matrice A, on peut commencer par déterminer une matrice B semblable à A car deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. En effet, si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifie $B = P^{-1}AP$, alors pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(xI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI_n - A)P)$$

  Par multiplicativité du déterminant,

$$\chi_B(x) = \det(P^{-1})\chi_A(x)\det(P) = \chi_A(x)$$

Exemple traité

Soit a_0, a_1, a_2 des éléments de $\mathbb{K}$, calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

SOLUTION

Pour $x \in \mathbb{K}$

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & a_0 \\ -1 & x & a_1 \\ 0 & -1 & x + a_2 \end{vmatrix} = x^2(x + a_2) + a_0 + a_1 x = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ce calcul sera généralisé à l'exercice 3.

Exercices

EXERCICE 6.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible

1 Montrer que pour $x \neq 0$, $\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1})(-x)^n \chi_A(\frac{1}{x})$.

2 En déduire que si on pose $\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors $\chi_{A^{-1}}(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ où, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $b_i = \dfrac{(-1)^n}{\det(A)} a_{n-i}$.

EXERCICE 6.2

Soit n un entier naturel non nul, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note alors P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1 Calculer P_1, P_2 et P_3.

2 Montrer que pour $x \in \mathbb{K}$ et $n > 2$, $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.