

Odile Picon, Patrick Poulichet

Aide-mémoire

Électromagnétisme

L'USINE NOUVELLE

DUNOD

Illustration de couverture :
Very large array © Joe Gough – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2010
ISBN 978 2 10 056149 0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
--------------	---

A

Les bases de l'électromagnétisme

1 • Équations de Maxwell dans le vide	5
1.1 Les grandeurs fondamentales en électromagnétisme	5
1.2 Les équations de Maxwell locales	8
1.3 Les équations de Maxwell sous forme intégrale	11
2 • Solutions des équations de Maxwell	15
2.1 Sources à l'infini	15
2.2 Sources à distance finie	22
2.3 Approximation des régimes quasi permanents	28
3 • Énergie électromagnétique	33
3.1 Énergie électromagnétique	33
3.2 Puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges	34
3.3 Vecteur de Poynting	35
4 • Électromagnétisme et relativité	39
4.1 Cinématique relativiste	39
4.2 Dynamique relativiste	46

4.3	Transformation des champs	48
4.4	Autres quadrivecteurs relativistes	54

B

Les régimes permanents

5 •	Électrostatique	59
5.1	Les équations	59
5.2	Champ et potentiel électrostatiques	66
5.3	Force électrostatique	69
5.4	Énergie électrostatique	70
5.5	Dipôle électrique	74
5.6	Équilibre des conducteurs	80
6 •	Magnétostatique	87
6.1	Les équations	87
6.2	Formule de Biot et Savart	91
6.3	Circuits filiformes	92
6.4	Inductance propre d'un circuit	93
6.5	Inductances mutuelles	93
6.6	Énergie magnétostatique	95
6.7	Travail des forces magnétiques et énergie magnétique	98
6.8	Dipôle magnétique	101

C

Électromagnétisme dans la matière

7 •	Propriétés électriques des milieux matériels	109
7.1	Milieux matériels	110
7.2	Vecteur polarisation	111

7.3	Étude du vecteur polarisation	119
7.4	Polarisation en régime variable	135
7.5	Pertes diélectriques	142

8 • Propriétés magnétiques des milieux matériels 145

8.1	Vecteur aimantation	145
8.2	Champ magnétique	147
8.3	Susceptibilité et perméabilité magnétiques	148
8.4	Propriétés magnétiques de matériaux	149
8.5	Énergie magnétique	152

9 • Les équations de Maxwell dans la matière 155

9.1	Les équations de Maxwell dans la matière	155
9.2	Énergie électromagnétique	157
9.3	Conditions de passage	160

D

Propagation

10 • Bases de l'étude de la propagation 165

10.1	Équation de propagation à une dimension	165
10.2	Propagation sous forme d'onde plane	167
10.3	Ondes planes sinusoïdales	169
10.4	Ondes sphériques	172
10.5	Équation d'Helmholtz	173

11 • Ondes planes électromagnétiques dans un milieu infini linéaire homogène et sans pertes 175

11.1	Équation d'onde	175
11.2	Onde plane électromagnétique	178
11.3	Onde électromagnétique plane progressive	178

11.4	Onde plane monochromatique	180
11.5	Polarisation des ondes	188
11.6	Vecteur de Poynting	194
12	• Ondes planes à la traversée d'un dioptre plan	197
12.1	Incidence normale	197
12.2	Les lois de Descartes	201
12.3	Relations de Fresnel	205
12.4	Milieux multicouches	210
13	• Ondes électromagnétiques guidées	217
13.1	Propagation entre deux plans métalliques parallèles	217
13.2	Généralités sur les guides uniformes	226
13.2	Guides d'ondes métalliques	229
14	• Propagation dans le milieu à pertes	247
14.1	Permittivité effective	247
14.2	Propagation dans un milieu diélectrique à pertes	249
14.3	Propagation dans un milieu peu conducteur	252
14.4	Propagation dans un conducteur, effet de peau	255
14.5	Propagation d'une onde plane dans un plasma	265
15	• Lignes de transmissions	273
15.1	Différents types de lignes	273
15.2	Principe d'étude des lignes	274
15.3	Description d'une ligne	275
15.4	Équation des télégraphistes	276
15.5	Condition de réflexion	280
15.6	Rapport d'onde stationnaire	281
15.7	Variations de la tension et du courant le long de la ligne	282
15.8	Impédance le long de la ligne	284
15.9	Abaque de Smith	286
15.10	Matrice de répartition	292

16 • Rayonnement électromagnétique	299
16.1 Potentiels retardés	299
16.2 Rayonnement d'un dipôle	304
16.3 Différents types d'antennes	313
17 • Phénomènes ondulatoires	317
17.1 Les interférences	317
17.2 Diffraction	328
17.3 Les réseaux	331

E

Compatibilité électromagnétique

18 • Étude des lignes couplées en régime transitoire	335
18.1 Rappel sur la théorie des lignes	335
18.2 Lignes couplées	338
18.3 Solutions des équations	342
18.4 Impédance et vitesse de mode commun et de mode différentielle	345
19 • Efficacité de blindage	353
19.1 Efficacité d'un blindage plan	353
19.2 Prise en compte des ouvertures et des discontinuités d'un blindage	378
19.3 Composition des efficacités de blindage	382
19.4 Effet de résonance	383
19.5 Les joints conducteurs	384

F

Annexes

Système de coordonnées cartésiennes	385
Système de coordonnées cylindriques	386
Système de coordonnées sphériques	386
Calcul vectoriel	387
Opérateurs vectoriels	387
Bibliographie	391
Index	395

INTRODUCTION

La fin du XIX^e siècle a vu de grandes avancées scientifiques qui ont constitué les éléments précurseurs des découvertes de la physique moderne englobant la relativité et la mécanique quantique. Maxwell a été un des artisans de cette évolution. En 1873, il propose quatre équations pour décrire les phénomènes électromagnétiques. Son travail est le fruit d'un certain nombre de travaux antérieurs et s'est appuyé sur des connaissances quelquefois très anciennes reposant sur l'électrostatique et la magnétostatique.

Les quatre équations qu'a proposées Maxwell constituaient une rupture. Elles intègrent les variations temporelles des champs et mettent en évidence le couplage entre le champ électrique et le champ magnétique. Elles sont étonnantes, car elles apparaissent sous une forme très condensée et contiennent pratiquement toute la physique touchant au champ électromagnétique. Cet ouvrage prend comme postulat les équations de Maxwell. Les deux premières parties traitent des équations de Maxwell dans le vide et montrent qu'il est possible de retrouver les propriétés des champs statiques de l'électricité et du magnétisme. Les interactions entre le champ électromagnétique et la matière sont décrites dans la troisième partie. La quatrième partie est consacrée aux phénomènes de propagation. Enfin, la compatibilité électromagnétique, l'un des domaines d'application de l'électromagnétisme qui joue un rôle crucial à notre époque, est traitée en dernière partie de cet ouvrage.

Les ondes électromagnétiques représentent un vaste domaine d'étude qui est souvent partagé selon la fréquence des ondes considérées. Le spectre électromagnétique présenté sur la figure I.1 décrit les différents domaines classiquement reconnus.

Le spectre part des fréquences très basses, observées dans des ondes ultra-basses fréquences, de l'ordre du Hertz, associées aux particules oscillant dans le champ magnétique terrestre jusqu'à des fréquences très élevées du rayonnement gamma associées aux réactions nucléaires.

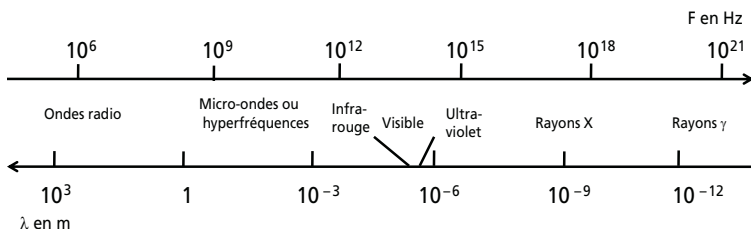


Figure I.1

Étant donné son étendue, le spectre électromagnétique couvre un grand nombre d'applications. Nous avons choisi dans cet ouvrage les exemples dans les domaines des hyperfréquences et de l'optique en raison du grand nombre d'applications développées. Le domaine des hyperfréquences a connu un nouvel essor récemment avec l'utilisation de moyens de radiocommunications mobiles. Les ondes qui envahissent notre environnement sont de plus en plus nombreuses et leur interaction avec les différents milieux doit être complètement maîtrisée. C'est pourquoi l'étude du champ électromagnétique à travers la compatibilité électromagnétique est si importante à l'heure actuelle. Nous avons tenu à faire partager cette connaissance en consacrant la dernière partie de l'ouvrage à ce domaine d'étude.

A

Les bases de l'électro- magnétisme

L'électromagnétisme est l'étude du champ électromagnétique, constitué de l'association d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui sont, dans le cas le plus général, indissociables. Nous supposons que le lecteur connaît déjà quelques propriétés du champ électrostatique et du champ magnétostatique. Dans le cas de phénomènes permanents, les deux champs peuvent être découplés, ce qui rend leur étude plus facile.

Maxwell a proposé en 1873 un système de quatre équations qui régissent tous les phénomènes électromagnétiques. Nous les prendrons donc comme postulat et nous montrerons qu'il est possible d'en extraire un grand nombre de théorèmes.

Dans cette partie, nous commencerons par décrire les équations de Maxwell dans le vide et nous donnerons leur interprétation. Ces équations sont des équations différentielles dont nous expliciterons les solutions.

1 • ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

A

LES BASES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

1.1 Les grandeurs fondamentales en électromagnétisme

Dans le vide les propriétés du champ électromagnétique sont représentées par celles du vecteur champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et du vecteur champ magnétique $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Chacun dépend des trois coordonnées d'espace représentées par le vecteur $\vec{r}$ et de temps, noté t .

Les équations de Maxwell introduisent l'induction magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ liée au champ magnétique $\vec{H}(\vec{r}, t)$ par une relation de proportionnalité dans le vide :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) \quad [1.1]$$

μ_0 est la perméabilité du vide.

À ce stade, précisons simplement que le vide est effectivement caractérisé par l'absence de particules matérielles. Cependant il peut exister des particules chargées dont nous négligerons les propriétés liées à la matière. Cette approximation est valable pour les électrons dont la masse est négligeable. Bien que l'air soit loin d'être considéré comme le vide, il présente, en première approximation, des propriétés analogues à celles du vide vis-à-vis du champ électromagnétique.

1.1.1 Densité de charge

Lorsqu'il existe un très grand nombre de charges et que l'observation s'effectue à une échelle telle que leur répartition peut être considérée continue (échelle macroscopique), on utilise la notion de **densité de charge** qui dépend de l'espace et du temps. Cette densité est le rapport de la charge élémentaire dq contenue dans un volume élémentaire $d\tau$:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{dq}{d\tau} \quad [1.2]$$

Soit encore en introduisant le nombre n de particules chargées par unité de volume et q la charge élémentaire des particules :

$$\rho(\vec{r}, t) = q \cdot n(\vec{r}, t) \quad [1.3]$$

Les particules chargées en mouvement constituent un courant électrique. Plusieurs grandeurs sont associées à celui-ci : le vecteur densité de courant et l'intensité du courant.

1.1.2 Vecteur densité de courant

Considérons un volume élémentaire $d\tau$ dans lequel les particules chargées ont une vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$. Le **vecteur densité de courant** est défini par le produit de la densité de charge par la vitesse moyenne des particules :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle \quad [1.4]$$

1.1.3 Intensité électrique

L'**intensité du courant** est le flux du vecteur densité de courant à travers une surface S :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad [1.5]$$

Appelons dQ la charge traversant la surface S pendant un temps élémentaire dt . L'intensité électrique est définie par le rapport entre cette charge élémentaire et le temps élémentaire dt , autrement dit c'est la charge traversant S par unité de temps :

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [1.6]$$

Considérons un tube élémentaire de longueur dl et de section dS entourant un point de l'espace repéré par $\vec{r}$ (figure 1.1). Ce tube est construit parallèlement au vecteur densité de courant.

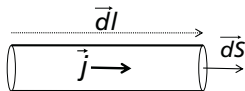


Figure 1.1

Selon la définition [1.5], l'intensité en ce point est donnée par :

$$I(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS}$$

En appliquant la définition [1.4] de la densité de courant en fonction de la vitesse moyenne des particules dans le tube de courant, on obtient :

$$I(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle \cdot \vec{dS}$$

Le tube considéré étant parallèle à la densité de courant, une particule chargée de vitesse $\langle \vec{v} \rangle$ parcourt une longueur dl pendant dt :

$$\vec{dl} = \langle \vec{v} \rangle \cdot dt$$

En prenant la longueur du tube considéré égale à cette dernière valeur, on obtient :

$$I(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} \cdot \vec{dS}$$

Soit encore :

$$I(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) \cdot d\tau}{dt}$$

On retrouve bien l'expression [1.6], car toutes les charges qui traversent la surface élémentaire $\vec{dS}$ sont celles qui se trouvent dans le tube de longueur égale, à un instant donné, au produit de la vitesse moyenne par le temps élémentaire.

1.2 Les équations de Maxwell locales

Les équations de Maxwell expriment le comportement spatio-temporel du champ électromagnétique en relation avec les sources qui lui ont donné naissance. Ces équations différentielles contiennent toute l'information permettant de résoudre les problèmes d'électromagnétisme.

Dans le vide, elles s'écrivent sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [1.7]$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad [1.8]$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad [1.9]$$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad [1.10]$$

Les opérateurs divergence et rotationnel figurant dans ces équations sont des opérateurs de dérivation par rapport aux variables d'espace, définis en annexe. Ce système d'équations couplées lie les dérivées spatiales et temporelles du champ électrique et de l'induction magnétique à leurs sources. Toutes les grandeurs varient avec l'espace et le temps. Pour des raisons de simplicité d'écriture les variables d'espace et de temps n'apparaîtront pas toujours explicitement. Des outils de calcul vectoriel permettent la résolution des problèmes d'électromagnétisme. Les théorèmes essentiels sont présentés en annexe.

Les deux premières équations ne font intervenir que le champ électromagnétique. Elles sont appelées équations intrinsèques. Les deux suivantes contiennent sa relation aux sources.

1.2.1 Les constantes

Dans ces équations il apparaît deux constantes caractéristiques du vide :

- La **permittivité du vide** est notée ε_0 . C'est une grandeur constante qui caractérise électriquement le vide. Sa valeur, dans les unités du système international (noté par la suite : USI) est :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ USI} \quad [1.11]$$

- La **perméabilité** du vide est notée μ_0 . Elle caractérise le vide d'un point de vue magnétique. Sa valeur est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ USI} \quad [1.12]$$

L'inverse du produit de ces deux constantes est égal au carré de la vitesse de la lumière :

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad [1.13]$$

avec $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

L'étude de la propagation d'une onde permettra de démontrer cette relation. Les équations [1.7] à [1.10] sont dites locales car elles sont valables en chaque point de l'espace.

Dans l'équation [1.9], le terme $\vec{j}$ est le courant de conduction et le terme qui lui est homogène $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé courant de déplacement.

Force subie par une charge en mouvement

Dans le cas général, une charge en mouvement est soumise à une force qui est constituée de deux composantes, l'une électrique et l'autre magnétique :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad [1.14]$$

Cette force s'appelle la force de Lorentz. Le premier terme correspond à une force électrique, le second à une force magnétique.

1.2.2 Équation de conservation de la charge

La physique repose sur le principe de conservation de certaines grandeurs : masse, énergie... Le principe de conservation de la charge est contenu dans les équations de Maxwell.

Pour le démontrer, prenons la divergence de l'équation [1.9]. Sachant que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle et que μ_0 et ε_0 sont des constantes, on obtient :

$$\mu_0 \text{div}(\vec{j}) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \text{div}(\vec{E})) = 0$$

soit :

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0 \quad [1.15]$$

Cette équation est appelée équation locale de conservation de la charge. Sa transformation en sa forme intégrale permet de l'interpréter. Considérons un volume (V) contenant une densité de charges variables avec le temps et limité par une surface (S) (figure 1.2).

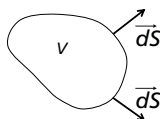


Figure 1.2

L'équation locale est valable en chaque point du volume. On en déduit donc :

$$\iiint_V (\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho)) d\tau = 0$$

Puisque les coordonnées d'espace et de temps sont indépendantes et considérant le volume (V) fixe dans le temps, on en déduit :

$$\iiint_V (\operatorname{div}(\vec{j})) d\tau = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\tau$$

Appliquant le théorème de la divergence et notant Q la charge totale contenue dans le volume (V), on obtient :

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{dQ}{dt}$$

L'interprétation de cette équation intégrale implique que le flux sortant du vecteur densité de courant est égal à la diminution de la charge totale contenue dans (V) par unité de temps. Toutes les grandeurs de cette équation sont algébriques. Un flux sortant positif (*négligé*) correspond à un courant qui sort (*qui entre*) du volume. Il n'y a donc pas d'accumulation de charge puisque toutes les charges qui disparaissent (ou apparaissent) au cours du temps sont compensées par un flux de courant sortant (ou entrant). Cette forme intégrale permet de retrouver la signification physique de la « conservation de la charge ».

Le flux de la densité de courant sortant à travers une surface est défini comme l'intensité du courant sortant du volume, notée I_S :

$$I_s = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} \quad [1.16]$$

Nous retrouvons bien l'équation bien de l'électrocinétique :

$$I_s = -\frac{dQ}{dt} \quad [1.17]$$

1.3 Les équations de Maxwell sous forme intégrale

Les équations de Maxwell utilisées sous leurs formes intégrales conduisent à des interprétations physiques des phénomènes électromagnétiques. Dans la suite, chacune des équations locales sera intégrée. Dans chaque cas il apparaîtra une interprétation physique qui résulte d'un effet global.

1.3.1 Conservation du flux d'induction magnétique

Considérons un volume V , limité par une surface fermée S , orientée vers l'extérieur (figure 1.3). Cette surface fermée s'appuie sur les lignes de champ magnétique définissant le tube de champ et fermée aux deux extrémités par deux surfaces orientées S_1 et S_2 de façon à former une surface fermée orientée vers l'extérieur.

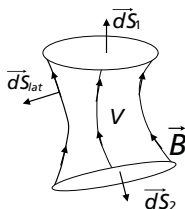


Figure 1.3 – Tube de champ magnétique

En intégrant l'équation [1.8] sur le volume V , nous obtenons :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{B}) d\tau = 0$$

En appliquant le théorème de la divergence à cette expression, nous obtenons :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad [1.18]$$

Cette relation traduit la conservation du flux du vecteur induction magnétique. Pour s'en convaincre, appliquons cette relation sur la surface définie précédemment. L'intégrale est la somme de trois intégrales sur les surfaces dont la somme constitue la surface fermée entourant (V) :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

La dernière intégrale est nulle car elle s'effectue sur une surface dont les vecteurs élémentaires sont, par construction, perpendiculaires au champ magnétique. Orientons les deux surfaces S_1 et S_2 dans le même sens. Pour cela posons :

$$d\vec{S}_2 = -d\vec{\Sigma}_2$$

Il vient :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad [1.19]$$

Cette relation de conservation du flux magnétique permet d'affirmer que le flux calculé sur toute surface délimitée par un même tube de courant et orientée dans un même sens conduit à l'égalité des flux magnétiques. On en déduit que dans les zones où les lignes de champ se resserrent, l'induction magnétique est plus forte.

1.3.2 Équation de Maxwell-Gauss

Considérons l'équation [1.10] qui fait apparaître la divergence du champ électrique. Le théorème de la divergence permet de passer de l'intégration en volume à l'intégration sur la surface qui entoure complètement le volume V (figure 1.2).

La relation intégrale qui en découle est :

$$\iiint_V \text{div}(\vec{E}) d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$