Lógica

Proposição é toda expressão que encerra um pensamento de sentido completo e pode ser classificada como V (verdadeira) ou F (falsa).

Exemplo:

9 = 6 (F)

$\sqrt{4}$ = log100 (V)

Todo gato é branco. (F)

Alguns gatos são brancos. (V)

Negação

A negação de uma proposição *p* é indicada por *~p* ou $\bar{p}$. A negação de uma proposição verdadeira é falsa e vice-versa.

Exemplo:

p: Sempre chove. (F)

$\bar{p}$: *Nem sempre chove. (V)*

Tabela verdade:

p	$\bar{p}$
V	*F*
F	*V*

Negação.

Conectivos

É uma expressão que une duas proposições dando origem a uma outra proposição.

Existem dois conectivos: a conjunção e a disjunção.

- Conjunção (e): é indicada $p \wedge q$ será verdadeira se, e somente se, ambas as proposições *p* e *q* forem verdadeiras. Caso uma delas seja falsa sua conjunção será falsa.
- Disjunção (ou): é indicada $p \vee q$ será verdadeira sempre que uma das duas proposições, *p* ou *q* forem verdadeiras. Será falsa apenas se as duas forem falsas.

Exemplo:

p: Toda árvore é verde. (F)

q: Árvores são vegetais. (V)

$p \wedge q$: Árvores são vegetais e todas as árvores são verdes. (F)

$p \vee q$: Árvores são vegetais ou árvores são verdes. (V)

Tabela verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*F*

Conectivos.

Condicionais

Existem dois tipos de condicionais: o condicional e o bicondicional.

- Condicional $p \rightarrow q$: será falso somente quando *p* for verdadeiro e *q* for falso. Caso contrário será verdadeiro.

Exemplo:

p: n é um número ímpar.

q: n é divisível por 3.

$p \rightarrow q$: Se n é um número ímpar, então n é divisível por 3. (F)

- Bicondicional $p \leftrightarrow q$: será verdadeiro somente quando ambas as proposições, *p* e *q*, forem de mesmo valor lógico: verdadeiras ou falsas.

Exemplo:

p: ΔABC satisfaz o teorema de Pitágoras.

q: ΔABC é retângulo.

$p \leftrightarrow q$: se ΔABC é retângulo, então ΔABC satisfaz o teorema de Pitágoras. (V)

Tabela verdade:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*V*	*V*

Condicionais.

Este material é parte integrante do acervo do IESDE BRASIL S.A.,
mais informações www.iesde.com.br

Tautologia e contradição

- Tautologia: é uma proposição logicamente verdadeira, independentemente do valor lógico de suas proposições.

Exemplo:

$p \rightarrow q \leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

- Contradição: são aquelas proposições que são falsas independentemente do valor lógico de suas proposições.

Exemplo:

$p \wedge \bar{p}$

Negação de proposições

$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$

$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$

$\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow p \wedge \bar{q}$

Conjuntos

Um conjunto intuitivamente é compreendido como uma coleção de objetos.

Pertinência

Usado para relacionar elemento e conjunto.

$x \in A$: x é elemento do conjunto A.

$x \notin B$: x não é elemento do conjunto B.

Inclusão

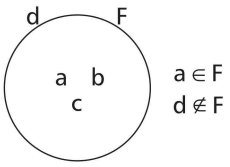
Usado para relacionar conjunto a conjunto.

$A \subset B$: o conjunto A está contido no conjunto B (A é subconjunto de B). Diz-se que um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, ou que A está contido em B, se e somente se, todo elemento de A é também elemento de B.

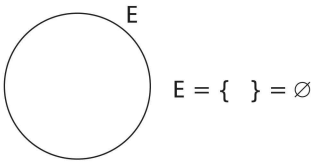
$A \not\subset B$: o conjunto A não está contido no conjunto B (A não é subconjunto de B).

Se em um conjunto não existir elementos, dizemos que o conjunto é vazio e indicamos com o símbolo $\varnothing$ ou { }.

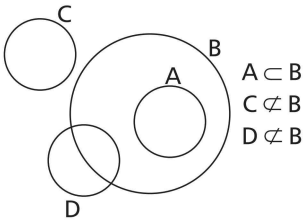
Exemplos:



Relação de pertinência.



Conjunto vazio.



Relação de inclusão.

Simbologia matemática

Algumas notações utilizadas na matemática.

$\forall$: "qualquer que seja" ou "para todo"

Exemplo:

"$\forall x, \sqrt{x^2} = |x|$, isto é, "para todo x, a raiz quadrada de seu quadrado é igual ao seu módulo."

$\exists$: *"existe"*

/: "tal que"

$\nexists$: *"não existe"*

Exemplo:

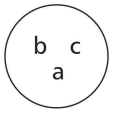
$\exists x$ / $x^2 = 2$, isto é, "existe x tal que seu quadrado vale dois."

n(A): indica o número de elementos do conjunto A.

Este material é parte integrante do acervo do IESDE BRASIL S.A.,
mais informações www.iesde.com.br

Exemplo:

O conjunto a seguir tem três elementos.



$n(A) = 3$

Um conjunto com três elementos.

Operações entre conjuntos

União

A união entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B. Indicamos com o símbolo $A \cup B$.

Se $x \in A \cup B \rightarrow x \in A$ *ou* $x \in B$

Intersecção

A intersecção entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertençam a A e B ao mesmo tempo. Indicamos com o símbolo $A \cap B$.

Se $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ e $x \in B$

Dois conjuntos são ditos disjuntos se $A \cap B = \varnothing$.

Diferença

A diferença entre dois conjuntos, A e B, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B. Indicamos como $A - B$.

Se $x \in A - B \rightarrow x \in A$ e $\notin B$

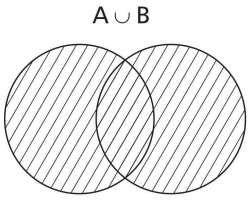


Figura 1: União.

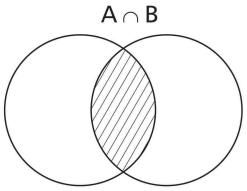
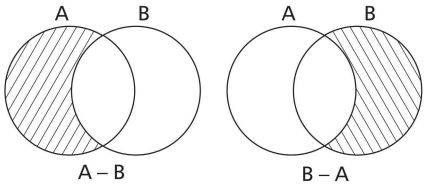


Figura 2: Intersecção.



Diferença.

Atenção:

$A - B \neq B - A$

O número de elementos de $A \cup B$ é igual a:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

O número de elementos de $A \cup B \cup C$ é igual a:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Propriedades da união e intersecção de conjuntos

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Conjuntos Numéricos

$\mathbb{N}$ – Naturais: são os números utilizados para contar quantidades.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

$\mathbb{Z}$ – Inteiros: são os números naturais, incluindo seus opostos.

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Q}$ – Racionais: são todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / \, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \, \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ ... \frac{-3}{2}, ..., 0, ..., 2, ... \frac{13}{6}, ... \right\}$$

$\mathbb{I}$ – Irracionais: são os números que não podem ser escritos como fração de numerador e denominador inteiros.

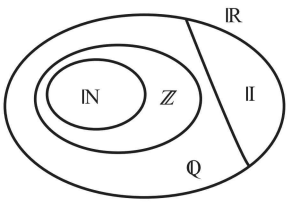
$$\mathbb{I} = \left\{ x \neq \frac{a}{b} / \, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$\mathbb{I} = \{ ..., -\sqrt{2}, ..., e, ... \pi, ...\}$

$\mathbb{R}$ – Reais: é o conjunto formado pelos números racionais e pelos números irracionais.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$



Intervalos

Intervalos limitados

Os intervalos são subconjuntos dos números reais:

Intervalo fechado:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



Intervalo semiaberto à direita

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



Intervalo aberto

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



Intervalo semiaberto à esquerda

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



Intervalos ilimitados

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$



$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$



$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números, logo, não podem ser representados no intervalo como fechados.

Números primos

Números primos são aqueles que possuem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.

Exemplo:

3 é primo (apenas 1 e 3 dividem o número 3).

4 não é primo (1, 2 e 4 dividem o número 4).

Observação

O número 0 e o número 1 não são primos e o número 2 é o único número primo par.

Decomposição em fatores primos

Todo número natural composto pode ser escrito de maneira única como produto de números primos.

Exemplo:

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 32$

Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)

O Mínimo Múltiplo Comum de um conjunto de números naturais é o menor número natural divisível por todos os elementos do conjunto.

Exemplo:

mmc (9,4) = 36

Máximo Divisor Comum (M.D.C.)

O Máximo Divisor Comum de um conjunto de números naturais é o maior número natural, tal que todos os elementos desse conjunto são divisíveis por ele. O produto do *MMC* pelo *MDC* de dois números é o produto desses dois números. Se o *MDC* de dois números for 1, chamamos de primos entre si ou coprimos.

Exemplo:

mdc (9,4) = 1

Dízima periódica

Um número racional pode ser representado por um número inteiro, um número decimal exato ou uma dízima periódica.

Este material é parte integrante do acervo do IESDE BRASIL S.A.,
mais informações www.iesde.com.br

Exemplo:

1, 41212...

Parte inteira: 1

Parte não-periódica: 4

Parte periódica: 12 (parte que se repete periodicamente)

Fração geratriz

A geratriz de uma dízima periódica é a fração racional que origina esse número.

Numerador: é um número formado pela parte inteira seguida de parte não-periódica (quando existir) seguida do 1.° período, desse valor devemos subtrair a parte inteira seguida da parte não-periódica.

Denominador: número formado de tantos 9 quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos 0 quantos forem os algarismos da parte não-periódica.

Exemplo:

Determine a fração geratriz da dízima 1,4121212...

Numerador: 1412 – 14 = 1398

Denominador: 990

Dízima: $\frac{1398}{990} = \frac{233}{165}$

Produtos notáveis

Quadrado da soma/diferença

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Diferença de quadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Fator comum

$$ax + ay = a(x + y)$$

Agrupamento

$$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$$

Cubos

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Sophie Germain

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)$$

Lagrange

$$(ac \pm bd)^2 + (ad \pm bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Cúbico

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Funções

Dados dois conjuntos *A* e *B* denominamos função de *A* em *B*, toda relação que a cada elemento de *A* associa-se um, e só um, elemento de *B*.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = {–2, 0, 3} e B = {–5, –4, 1, 2, 11}, considere a função f: A → B, definida por f(x) = 3x + 2, ou y = 3x + 2, temos que

x = –2 → y = –4

x = 0 → y = 2

x = 3 → y = 11

Domínio (D)

O domínio de uma função *f* é o conjunto formado pelos primeiros elementos (abscissas) de cada par ordenado da função *f*.

Contradomínio (CD)

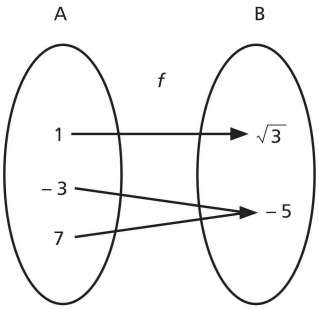
O conjunto em que encontramos os segundos elementos (ordenadas) dos pares ordenados da função.

Imagem (Im)

A imagem de uma função *f* é o conjunto formado pelo segundo elemento de cada par ordenado da função *f*.

Nos dois exemplos a seguir a relação de $f: A \to B$ representa uma função:

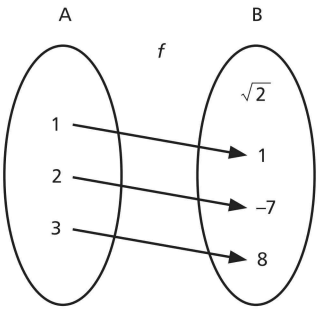
Exemplo 1:



$D(f) = \{1, -3, 7\}$
$CD(f) = \{\sqrt{3}, -5\}$
$Im(f) = \{\sqrt{3}, -5\}$

É função, pois cada elemento do conjunto A (domínio) da função está associado a um único elemento do conjunto B (contradomínio).

Exemplo 2:

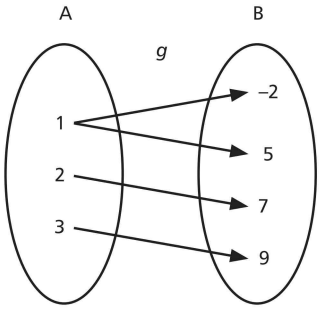


$D(f) = \{1, 2, 3\}$
$CD(f) = \{\sqrt{2}, 1, -7, 8\}$
$Im(f) = \{1, -7, 8\}$

É função, pois cada elemento do conjunto A (domínio) da função está associado a um único elemento do conjunto B (contradomínio).

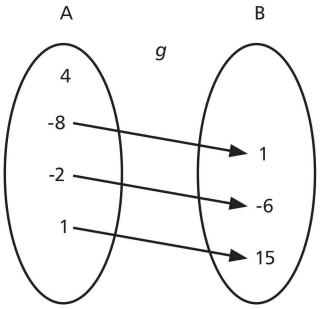
Nos dois exemplos a seguir a relação $g: A \to B$ não representa função.

Exemplo 1:



A relação g: A → B, não representa função, pois o número 1 ∈ A e está associado a mais de um elemento do conjunto B. Ou seja, o número 1 tem mais de uma imagem.

Exemplo 2:

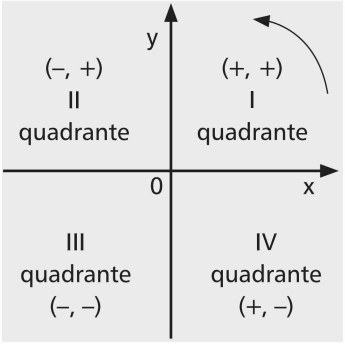


A relação g: A → B, não representa função, pois o número 4 ∈ A e não está associado ao conjunto B. Ou seja, o número 4 não tem imagem.

Plano cartesiano

É um sistema constituído por dois eixos: *x* e *y* perpendiculares entre si. O eixo *x* é denominado de eixo das abscissas e o eixo *y* é denominado eixo das ordenadas. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes. A cada ponto do plano cartesiano, associamos um par ordenado (*x*, *y*)

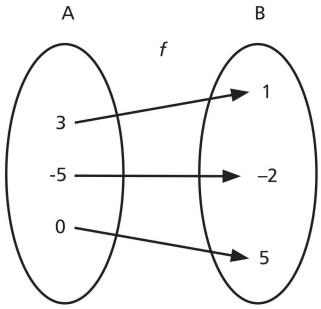
Este material é parte integrante do acervo do IESDE BRASIL S.A.,
mais informações www.iesde.com.br



Os quadrantes.

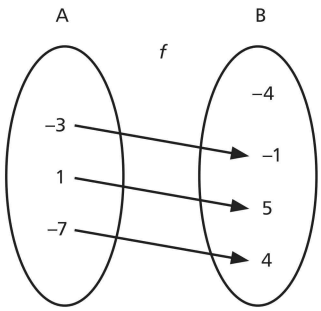
Função sobrejetora

Dizemos que uma função *f* de *A* em *B* é sobrejetora quando o conjunto imagem for igual ao conjunto contradomínio de *B*. Em linguagem matemática, se $\forall y \in B \; \exists a \in A$ tal que $f(a) = y$



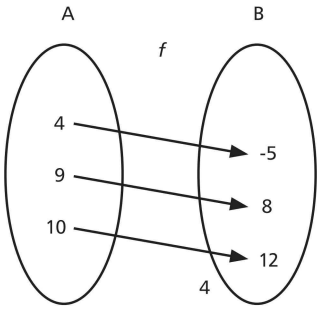
Função injetora

Dizemos que uma função *f* de *A* em *B* é injetora se qualquer dos seus elementos do seu domínio tem imagens diferentes. Em linguagem matemática, se $f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$.



Função bijetora

É toda função *f* de *A* em *B* que é simultaneamente injetora e sobrejetora.

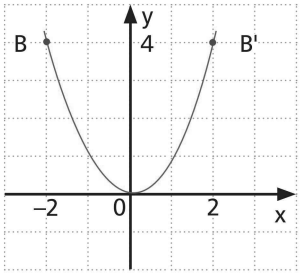


Função par

É toda a função que $f(x) = f(-x)$, isto é, quaisquer elementos opostos do domínio têm imagens iguais.

Exemplo:

$F(x) = x^2$, observe que elementos opostos têm imagens iguais.



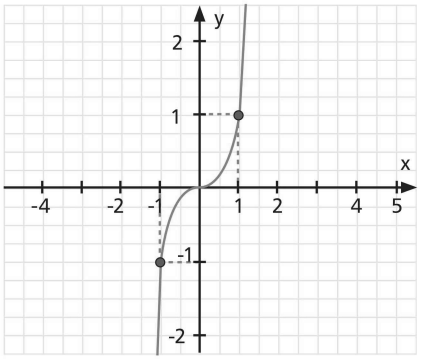
f(2) = f(–2)

Função ímpar

É toda a função que $f(x) = -f(-x)$, isto é, quaisquer elementos opostos do domínio têm imagens opostas.

Exemplo:

$f(x)=x^3$, observe que elementos opostos têm imagens opostas.



$f(1) = -f(-1)$

Função composta

Se tivermos os conjuntos A, B e C e duas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, chamamos de função composta a função $h = gof: A \to C$, definida por $R = gof(x) = g(f(x))$.

Exemplo:

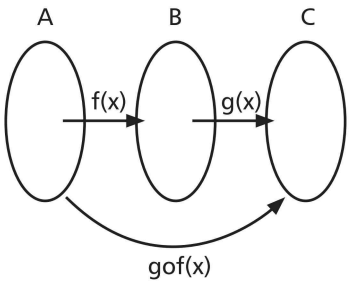
Sejam as funções $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$, determine $fog(x)$.

Solução:

$fog(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 4g(x) - 5 =$

$= (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5 =$

$= 4x^2 - 4x - 8$



Função inversa

Dada uma função $f: A \to B$ dizemos que sua inversa $f^{-1}: B \to A$ é a função que leva todos os elementos da imagem de f aos elementos do domínio de f. Uma maneira prática de determinarmos a função inversa de uma função dada é trocar a variável x pela variável y, a variável y pela variável x e em seguida isolar a variável y (quando possível).

Exemplo:

Determine a função inversa de $y = 3x + 2$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solução:

Para isso fazemos $x = 3y + 2$, onde $y = \frac{x-2}{3}$ e, portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

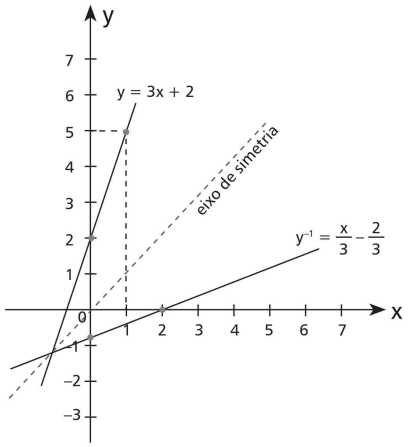


Gráfico da função f e da sua inversa.

Função afim

Resolução da equação de 1.° Grau

Exemplo:

Resolver a equação de 1.º grau.

$9x + 3 = 6x + 18$

$9x - 6x = 18 - 3$

$3x = 15$

$x = \frac{15}{3}$

$x = 5$

Este material é parte integrante do acervo do IESDE BRASIL S.A.,
mais informações www.iesde.com.br

Sistema de equações de 1.° Grau/método da adição

Exemplo:

Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 14 \end{cases}$$

Solução:

Para que na soma das equações uma das variáveis seja anulada devemos multiplicar uma das equações por uma constante adequada e diferente de 0 (zero). No exemplo dado podemos multiplicar a segunda equação por 2:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$$

Somando as equações temos:

$7x = 35 \rightarrow x = 5$

Se x = 5, basta então substituir esse valor em uma das equações para determinar o valor de y.

$x + 2y = 7 \rightarrow y = 1$

Onde: S = {(5,1)}

A função afim

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = ax + b$, com a e b números reais, denomina-se função afim.

a → coeficiente angular

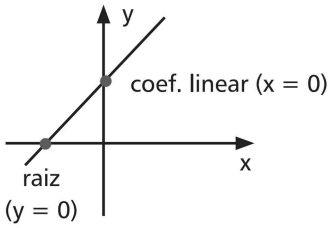
b → coeficiente linear

A raiz da função é o valor de x cuja imagem é 0 (zero).

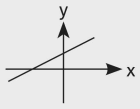
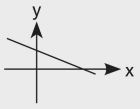
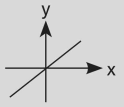
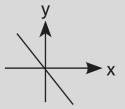
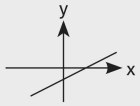
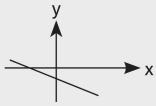
$$x = -\frac{b}{a}$$

O coeficiente angular é a tangente da inclinação da reta em relação ao eixo x.

A ordenada do ponto intersecção da reta com o eixo y é o b e a abcissa do ponto de intersecção com o eixo x é chamada de raiz. As raízes de uma função qualquer são os valores de x tais que $y = 0$.



Função afim.

a \ b	+	–
+		
zero		
–		

Resumo da função afim.

Função quadrática

Equação do 2.° Grau

O formato da equação do 2.° grau é $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Equações incompletas

Quando b=0 ou c= 0

1.° caso: b = 0

Exemplo:

$x^2 - 9 = 0$

Solução:

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$S = \{-3, 3\}$

2.° caso: c = 0

Exemplo:

$x^2 - 9x = 0$

Solução:

$x^2 - 9x = 0$

$x(x - 9) = 0$

$x = 0$ ou $x - 9 = 0$

$S = \{0, 9\}$

Equações completas

Nas equações completas utilizaremos a conhecida fórmula resolutiva de um trinômio do 2.º grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{ou } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Exemplo:

Resolver a equação $x^2 - 8x + 12 = 0$

$a = 1$, $b = -8$ e $c = 12$

Basta aplicar a fórmula resolutiva, então,

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

onde $S = \{2,6\}$

Equação biquadrada

A equação biquadrada tem o seguinte formato: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b, c números reais e $a \neq 0$.

Sua resolução consiste em fazer a redução a uma equação do segundo grau, para isso fazemos a substituição, $y = x^2$.

Exemplo:

$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

Fazendo: $y = x^2$

Então : $2y^2 - 10y + 8 = 0$

Cujas soluções são: $y = 1$ ou $y = 4$

Retornando a variável original (x), temos que:

$y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto,

$S = \{-2, -1, 1, 2\}$

Sistema do 2.° Grau / método da substituição

Isolamos uma das incógnitas e substituímos na equação que contém o produto.

Exemplo:

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Solução:

Isolamos uma das variáveis na primeira equação:

$y = 8 - x$

Agora, substituiremos na segunda:

$x \cdot (8 - x) = 12$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

Resolvendo a equação do 2.° grau temos: $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$. Voltando ao sistema

- Se $x = 2 \rightarrow y = 6$
- Se $x = 6 \rightarrow y = 2$

$S = \{(2,6); (6,2)\}$

Função quadrática

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, denomina-se função quadrática.

O formato do gráfico da função quadrática é uma parábola.

A intersecção da reta com o eixo y é o ponto c e a intersecção com o eixo x é chamada de raiz. As raízes podem ser obtidas com o uso da fórmula resolutiva de um trinômio do 2.º grau.

Discriminante (Δ)

O discriminante é definido como sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se $\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes reais e diferentes.

Este material é parte integrante do acervo do IESDE BRASIL S.A.,
mais informações www.iesde.com.br