Algèbre linéaire et géométrie analytique

Applications linéaires, matrices, déterminants, théorie des valeurs propres ainsi qu'espaces vectoriels euclidiens et unitaires

Lucien Sina

Algèbre linéaire et géométrie analytique

Applications linéaires, matrices, déterminants, théorie des valeurs propres ainsi qu'espaces vectoriels euclidiens et unitaires

Lucien Sina

6.6.2026

Table des matières

Préface

L'algèbre linéaire fait partie des fondements essentiels des mathématiques modernes et constitue en même temps un outil indispensable dans les sciences naturelles et les sciences de l'ingénieur. Ses notions et ses méthodes apparaissent, sous des formes sans cesse renouvelées, dans de nombreux domaines : de la résolution des systèmes d'équations linéaires aux questions géométriques, jusqu'aux structures profondes de l'algèbre abstraite et de l'analyse.

Le présent ouvrage a pour objectif de présenter l'algèbre linéaire et la géométrie analytique de manière aussi claire, structurée et complète que possible. Le choix adopté ici consiste à ne pas se limiter à l'exposition des résultats classiques, mais à développer progressivement les structures qui les sous-tendent. À partir de notions élémentaires telles que les ensembles et les applications, on introduit peu à peu les structures algébriques fondamentales : groupes, anneaux et corps. Sur cette base, les espaces vectoriels apparaissent comme le cadre naturel

de l'algèbre linéaire.

Une attention particulière est accordée au développement systématique de la théorie des applications linéaires et des matrices. Des notions telles que base, dimension, noyau et image ne sont pas traitées isolément, mais présentées dans un contexte structurel unifié. La théorie des valeurs propres, qui s'appuie sur ces concepts, permet ensuite d'obtenir une compréhension plus profonde de la structure interne des applications linéaires.

Les espaces vectoriels euclidiens et unitaires constituent un autre élément central de cet ouvrage. Les aspects géométriques y passent au premier plan : produits scalaires, orthogonalité, normes et bases orthonormées relient les concepts algébriques à une intuition géométrique concrète. Des résultats tels que le théorème spectral illustrent de manière exemplaire l'étroite interaction entre l'algèbre et la géométrie.

Ce livre est conçu de façon à pouvoir servir aussi bien de manuel d'accompagnement à un cours que de support pour l'étude personnelle. De nombreux exemples, exercices et solutions types ont pour but d'approfondir la compréhension et d'encourager une manipulation active des notions étudiées.

L'une des ambitions principales de cet ouvrage est de ne pas transmettre seulement des techniques de calcul, mais aussi de développer une compréhension des structures sous-jacentes. L'algèbre linéaire n'est donc pas présentée comme une simple collection de méthodes isolées, mais comme un système mathématique cohérent

reliant entre eux de nombreux domaines des mathématiques.

Chapitre 1

Ensembles et applications

Les ensembles et les applications constituent le fondement de l'algèbre linéaire ainsi que d'une grande partie des mathématiques.

1.1 Ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets bien distingués, appelés ses *éléments*. Nous introduisons ci-dessous quelques notions et notations standard qui seront utilisées régulièrement par la suite.

Ensembles finis : Les ensembles finis peuvent être décrits par l'énumération complète de leurs éléments.

On écrit par exemple

$$M := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Le symbole $:=$ signifie « est défini par ». Les symboles x_i sont les *éléments* de M ; on écrit $x_i \in M$ pour $1 \leq i \leq n$. L'ordre dans lequel les éléments sont énumérés n'a pas d'importance et les répétitions ne sont pas comptées : la notation $\{a, b, a\}$ désigne le même ensemble que $\{a, b\}$. Si les éléments énumérés sont deux à deux distincts, c'est-à-dire si $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$, alors n est exactement le nombre d'éléments de M. Le nombre d'éléments, ou cardinal, d'un ensemble fini M est noté $|M|$.

Ensemble vide : L'ensemble vide ne contient aucun élément et se note $\varnothing$ (ou $\{\}$).

Sous-ensembles : Un ensemble M' est appelé sous-ensemble de M, et l'on écrit $M' \subseteq M$, si et seulement si

$$\forall x \ (x \in M' \Rightarrow x \in M).$$

Si $M' \subseteq M$ et $M' \neq M$, on écrit $M' \subsetneq M$ et l'on dit que M' est un sous-ensemble propre de M. Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils sont chacun inclus dans l'autre :

$$M = N \quad \Longleftrightarrow \quad M \subseteq N \ \text{ et } \ N \subseteq M.$$

Notation descriptive des ensembles : On définit souvent un ensemble à l'aide d'une propriété :

$$\{\, x \in X \mid P(x) \,\}$$

se lit « l'ensemble de tous les x appartenant à X tels que la propriété $P(x)$ soit vérifiée ». Exemple : $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\}$.

Ensembles infinis et nombres naturels : L'exemple le plus familier d'ensemble infini simple est l'ensemble des nombres naturels. Nous adoptons ici la convention

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

La structure de $\mathbb{N}$ peut être décrite axiomatiquement par les *axiomes de Peano* (dans une formulation usuelle) :

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Il existe une application $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, appelée *successeur*, qui associe à chaque n son successeur $S(n)$.
3. 0 n'est le successeur d'aucun élément : $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 0$.
4. Le successeur est injectif : $\forall m, n \in \mathbb{N} : \ S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$.
5. (Axiome d'induction) Si $K \subseteq \mathbb{N}$, avec $0 \in K$, et si $\forall n \in K : \ S(n) \in K$, alors $K = \mathbb{N}$.

Les axiomes de Peano fixent la structure fondamentale des nombres naturels : il existe un premier élément 0, chaque élément possède un successeur bien déterminé, et le principe d'induction permet d'établir des propriétés pour tous les nombres naturels. Certains auteurs font commencer les nombres naturels à 1 au lieu de 0 ; cela modifie certaines formulations, mais non la théorie de fond.

Remarque 1. *Les notions et notations utilisées ici — écriture des ensembles avec accolades, $\in$, $\subseteq$, $|M|$, $\varnothing$ et notation descriptive des ensembles — apparaissent constamment en algèbre linéaire ; une bonne familiarité avec ces notations facilite considérablement le travail ultérieur.*

1.1.1 Domaines de nombres et leurs extensions

À partir des nombres naturels, on obtient, par des extensions systématiques, d'autres ensembles de nombres importants pour l'analyse, l'algèbre linéaire et la géométrie analytique.

Nombres entiers : L'ensemble des nombres entiers est défini par

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

. Intuitivement, on obtient $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ en introduisant, pour chaque entier naturel positif n, un élément opposé $-n$. Formellement, on peut interpréter $\mathbb{Z}$ comme un ensemble de classes d'équivalence de couples de nombres naturels (a, b), où (a, b) représente la différence $a - b$.

Nombres rationnels : Les nombres rationnels sont les « fractions » de nombres entiers :

$$\mathbb{Q} := \{\, p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \,\}.$$

Ici aussi, il existe une construction formelle à l'aide de classes d'équivalence de couples (p, q), avec la relation

d'équivalence $(p, q) \sim (p', q')$ si et seulement si $pq' = p'q$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un corps, c'est-à-dire que les règles usuelles de calcul pour $+$ et $\cdot$ y sont valables, à l'exception de la division par 0. De plus, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux nombres réels distincts se trouve toujours un nombre rationnel.

Nombres réels : Les nombres réels $\mathbb{R}$ contiennent $\mathbb{Q}$ et fournissent le cadre approprié pour les limites, la continuité et l'analyse classique. Il existe plusieurs constructions équivalentes de $\mathbb{R}$; deux des plus courantes sont

- *coupures de Dedekind* : un nombre réel est interprété comme une coupure, c'est-à-dire une partition des nombres rationnels en deux ensembles non vides A, B, avec $a < b$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$;
- *complétion de Cauchy* : on considère les suites de Cauchy de nombres rationnels et l'on forme des classes d'équivalence selon l'égalité de leurs limites.

De manière intuitive, les nombres réels apparaissent sous forme de développements décimaux, par exemple $3{,}14159\ldots$ pour π. Tous ces développements ne sont pas finis ou périodiques ; ceux qui ne le sont pas correspondent aux nombres *irrationnels*, comme $\sqrt{2}$ ou π. Une propriété centrale de $\mathbb{R}$ est la *complétude* : toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée possède une plus petite borne supérieure, appelée supremum.

Nombres complexes : Les nombres complexes sont

définis par

$$\mathbb{C} := \{a + b\,\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$$

. On peut aussi concevoir $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples (a, b), munis d'une addition et d'une multiplication convenables. L'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps, mais ce n'est pas un corps ordonné : il n'existe pas d'ordre total compatible avec l'addition et la multiplication. Un résultat important, que nous ne démontrons pas ici, est le théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Ainsi, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Chaîne d'inclusions : Ces ensembles de nombres s'insèrent naturellement les uns dans les autres selon la chaîne suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Chaque inclusion est stricte ; par exemple, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Propriétés algébriques et propriétés d'ordre :

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont stables pour l'addition et la multiplication ; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des corps.
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux nombres réels distincts, on trouve toujours des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$ est, à isomorphisme près, l'unique corps totalement ordonné complet ; cette complétude explique pourquoi de nombreux énoncés analytiques, par exemple l'existence de certaines limites, sont valables dans $\mathbb{R}$, mais pas déjà dans $\mathbb{Q}$.

— $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont infinis dénombrables, tandis que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ont une cardinalité non dénombrable.

Remarque didactique : Lors d'une première lecture, il est souvent utile pour les étudiants de bien voir la motivation de chaque extension :

— $\mathbb{Z}$ apparaît afin que la soustraction puisse toujours être effectuée ;
— $\mathbb{Q}$ apparaît afin de rendre possible la division (sauf par 0) ;
— $\mathbb{R}$ apparaît afin de compléter les notions de limite et de convergence (par exemple les limites de suites) ;
— $\mathbb{C}$ apparaît afin de pouvoir décomposer complètement les polynômes en facteurs et de compléter la structure algébrique.

De courts exemples (par exemple $2 - 5$, qui nécessite $\mathbb{Z}$, l'équation $2x = 1$, qui nécessite $\mathbb{Q}$, ou encore la suite $1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$, qui conduit à $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$) rendent ces passages plus concrets pour les étudiants.

1.1.2 Opérations élémentaires sur les ensembles

À partir d'un ensemble donné M, on peut former de nombreux sous-ensembles en sélectionnant les éléments selon certaines propriétés. L'*ensemble des parties* $\mathcal{P}(M)$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de M.

Sous-ensemble défini par une propriété (notation en compréhension) : Si M est un ensemble et si $E(x)$

est une propriété de x, on définit

$$M' := \{\, x \in M \mid E(x) \,\},$$

ce qui se lit : « l'ensemble de tous les x de M pour lesquels $E(x)$ est vérifiée ». Exemple : $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est premier}\}$.

Réunion et intersection (formes finies et indexées) : Soient $M_1, \ldots, M_n$ des ensembles. On définit alors la réunion et l'intersection par

$$M_1 \cup \cdots \cup M_n := \{x \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\} :\ x \in M_i\},$$

$$M_1 \cap \cdots \cap M_n := \{x \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} :\ x \in M_i\}.$$

Pour des familles d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$, indexées par un ensemble d'indices I, on utilise les notations usuelles suivantes :

$$\bigcup_{i \in I} X_i := \{x \mid \exists i \in I :\ x \in X_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} X_i := \{x \mid \forall i \in I :\ x \in X_i\}.$$

Exemple avec des intervalles : Posons $I = \mathbb{N}$, avec la convention adoptée ici $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, et $X_i := [-i, i] \subset \mathbb{R}$. Alors

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [-i, i] = \mathbb{R},$$

car pour tout nombre réel x, il existe un i tel que $|x| \leq i$. D'autre part,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [-i, i] = [-0, 0] = \{0\},$$

car $X_0 = [0,0] = \{0\}$ intervient déjà dans l'intersection. (Si l'on faisait au contraire commencer $\mathbb{N}$ à 1, c'est-à-dire si $I = \{1, 2, \dots\}$, on aurait $\bigcap_{i\geq 1}[-i, i] = [-1, 1]$.)

Différence et complémentaire : Si $X' \subseteq X$, alors

$$X \setminus X' := \{\, x \in X \mid x \notin X' \,\}$$

est appelée la *différence* de X et de X'. Le *complémentaire* d'un ensemble A se rapporte toujours à un ensemble de référence (ou univers) U ; on écrit alors

$$A^{\complement} := U \setminus A = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\}.$$

Autres opérations utiles : La *différence symétrique* de A et B est

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

elle contient exactement les éléments qui appartiennent à l'un des deux ensembles, mais pas aux deux simultanément.

Règles de calcul fondamentales : Pour des ensembles A, B, C, les lois élémentaires suivantes sont valables ; elles sont utiles pour les transformations et les démonstrations :

- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, et de même pour $\cap$.
- *Idempotence :* $A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$
- *Distributivité :* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

— *Lois de De Morgan (également pour les familles indexées) :*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} X_i^{\complement}, \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} X_i^{\complement}.$$

— *Règles relatives à la différence :* $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$. De plus, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$.

1.2 Applications

Pour décrire des relations entre ensembles, on utilise des *applications*.

Definition 2. *Soient X et Y des ensembles. Une* application *(ou* fonction*) de X dans Y est une règle f qui associe à chaque $x \in X$ un unique élément $f(x) \in Y$. On écrit*

$$f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x).$$

Ici, $\to$ relie les ensembles (ensemble de départ et ensemble d'arrivée), tandis que $\mapsto$ décrit l'association d'un élément x à son image $f(x)$.

Definition 3. *Deux applications $f, g : X \to Y$ sont dites égales, ce que l'on note $f = g$, si et seulement si*

$$\forall x \in X : \ f(x) = g(x).$$

L'ensemble de toutes les applications de X dans Y est noté $\mathrm{App}(X, Y)$ *(on écrit aussi* $\mathrm{Fun}(X, Y)$*).*

1.2.1 Image et image réciproque

Les applications permettent d'associer non seulement des éléments individuels, mais aussi des sous-ensembles d'un ensemble.

Definition 4 (Image)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application et soit $M \subseteq X$ un sous-ensemble. L'*image *de M par f est*

$$f(M) := \{\, y \in Y \mid \exists x \in M :\ y = f(x) \,\}.$$

En particulier, $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ pour $x \in X$, et $f(X) \subseteq Y$ est également appelé ensemble des valeurs *ou* image *de f.*

Definition 5 (Image réciproque)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application et soit $N \subseteq Y$. L'*image réciproque *de N est*

$$f^{-1}(N) := \{\, x \in X \mid f(x) \in N \,\} \subseteq X.$$

Pour un élément isolé $y \in Y$, on écrit brièvement $f^{-1}(\{y\})$ ou $f^{-1}(y)$ pour l'ensemble de tous les $x \in X$ tels que $f(x) = y$.

Important : Ici, f^{-1} désigne une application sur les sous-ensembles, c'est-à-dire une opération $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, et non nécessairement une application au sens $Y \to X$. L'image réciproque d'un singleton peut contenir plusieurs éléments ou être vide.

Exemples :

— L'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$, définie par $\mathrm{id}_X(x) = x$, vérifie pour tout sous-ensemble $M \subseteq X$ les égalités $\mathrm{id}_X(M) = M$ et $\mathrm{id}_X^{-1}(M) = M$.

— L'application constante $f : X \to Y$, définie par $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$, a pour image $\{y_0\}$. L'image réciproque d'un élément $y \neq y_0$ est vide, tandis que $f^{-1}(\{y_0\}) = X$.

— Exemple d'inclusion stricte pour l'image d'une intersection : soient $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a\}$ et $f(1) = f(2) = a$. Posons $M_1 = \{1\}$ et $M_2 = \{2\}$. Alors $f(M_1) \cap f(M_2) = \{a\}$, mais $f(M_1 \cap M_2) = f(\varnothing) = \varnothing$. Ainsi, en général, on a seulement

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2),$$

et cette inclusion peut être stricte.

Règles de calcul importantes : Pour une application $f : X \to Y$, une famille $(M_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X et une famille $(N_j)_{j \in J}$ de sous-ensembles de Y, on a :

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i),$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(M_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} N_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(N_j),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} N_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(N_j),$$

$$f^{-1}(Y \setminus N) = X \setminus f^{-1}(N),$$

$$f(\varnothing) = \varnothing.$$

La première égalité montre que l'image commute avec les réunions ; pour les intersections, on ne dispose en général que de l'inclusion indiquée par $\subseteq$ (l'égalité vaut par exemple lorsque f est injective). En revanche, les images réciproques commutent aussi bien avec les réunions qu'avec les intersections. Elles se comportent donc particulièrement bien vis-à-vis des opérations ensemblistes : l'image réciproque d'une réunion est la réunion des images réciproques, et l'image réciproque d'une intersection est l'intersection des images réciproques. À l'opposé, pour les images directes, on n'obtient en général qu'une inclusion dans le cas des intersections.

1.2.2 Restriction et extension

Definition 6 (Restriction)**.** *Soient $f : X \to Y$ et $M \subseteq X$. La* restriction *de f à M est l'application*

$$f|_M : M \to Y, \qquad x \mapsto f(x).$$

Remarque sur l'extension du codomaine : Si $Y \subseteq Y'$ et $f : X \to Y$, alors f peut aussi être considérée comme une application $f : X \to Y'$ (mêmes valeurs, codomaine plus grand). On parle alors d'une extension du codomaine.

1.2.3 Propriétés

Definition 7. *Une application $f\colon X \to Y$ est dite*
— injective *(ou* un-à-un*), si*

$$\forall x, x' \in X : \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

— surjective *(ou* sur*), si*

$$f(X) = Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in Y \ \exists x \in X : \ y = f(x).$$

— bijective*, si f est à la fois injective et surjective.*

1.2.4 Application réciproque

Si $f\colon X \to Y$ est bijective, alors pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Dans ce cas, on définit l'*application réciproque*

$$f^{-1}\colon Y \to X, \qquad y \mapsto f^{-1}(y),$$

de sorte que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in Y$.

Important : Il ne faut pas confondre les deux significations de f^{-1} :

— Pour une application arbitraire f et une partie $N \subseteq Y$, l'écriture $f^{-1}(N)$ désigne l'*image réciproque* de N, c'est-à-dire

$$f^{-1}(N) = \{x \in X \mid f(x) \in N\} \subseteq X.$$

Il s'agit d'une opération $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

— Lorsque f est bijective, f^{-1} désigne en outre l'*application réciproque* $Y \to X$. Dans ce cas, l'image réciproque d'un singleton correspond à l'élément correspondant :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{\, f^{-1}(y) \,\} \qquad (y \in Y).$$

1.2.5 Théorème (injectivité ⇔ surjectivité sur les ensembles finis)

Théorème 8. *Soit X un ensemble fini et soit $f : X \to X$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Démonstration. Écrivons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, où les éléments x_i sont deux à deux distincts et où $n \in \mathbb{N}$.

$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$: Supposons que f soit injective. Alors les images $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ sont deux à deux distinctes ; par conséquent, l'ensemble $f(X) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ possède exactement n éléments. Comme $f(X) \subseteq X$ et que X possède lui aussi n éléments, on obtient $f(X) = X$. Ainsi, f est surjective.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$: Supposons que f soit surjective, c'est-à-dire $f(X) = X$. Si f n'était pas injective, il existerait deux éléments $x_i \neq x_j$ tels que $f(x_i) = f(x_j)$. L'image aurait alors au plus $n - 1$ éléments, donc $|f(X)| \leq n - 1$, ce qui contredit l'hypothèse $f(X) = X$ avec $|X| = n$. Par conséquent, f est nécessairement injective.

L'équivalence avec (3) est maintenant immédiate, car la bijectivité signifie précisément que l'application est à la fois injective et surjective. Les assertions (1), (2) et (3) sont donc équivalentes. □

Remarque 9. *Pour les ensembles infinis, cette assertion n'est en général plus vraie : sur* $\mathbb{N}$*, il existe des applications injectives mais non surjectives, par exemple* $n \mapsto n+1$*, et aussi des applications surjectives mais non injectives, selon la construction choisie. La finitude est donc l'hypothèse essentielle de ce théorème. En résumé :* sur un ensemble fini, injectivité et surjectivité sont équivalentes.

1.2.6 Composition

Definition 10. *Soient* X, Y, Z *des ensembles et* $f\colon X \to Y$*,* $g\colon Y \to Z$ *des applications. La* composition *de* f *et de* g *est l'application*

$$g \circ f\colon X \longrightarrow Z, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

On lit $g \circ f$ *comme « g composé avec f » : on applique d'abord* f*, puis* g*. En notation diagrammatique :*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad \textit{ou encore} \qquad Z \xleftarrow{g} Y \xleftarrow{f} X.$$

Théorème 11 (Associativité de la composition)**.** *Pour des applications* $f\colon X \to Y$*,* $g\colon Y \to Z$ *et* $h\colon Z \to W$*, on a*

$$(h \circ g) \circ f \;=\; h \circ (g \circ f).$$

Démonstration. Soit $x \in X$. On calcule alors

$$\begin{aligned} \big((h \circ g) \circ f\big)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h\big(g(f(x))\big) \\ &= h\big((g \circ f)(x)\big) \\ &= \big(h \circ (g \circ f)\big)(x). \end{aligned}$$

Comme les deux membres coïncident pour tout $x \in X$, les applications sont égales. □

Théorème 12 (Non-commutativité en général)**.** *La composition d'applications n'est en général* pas *commutative, c'est-à-dire qu'on a le plus souvent* $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple. Considérons $X = Y = Z = \mathbb{R}$ et les applications

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2,$$

tandis que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1.$$

Comme $2x + 2 \neq 2x + 1$ (par exemple pour $x = 0$), les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes, ce qui démontre l'assertion. □

Remarque :

- À retenir : $\circ$ est *associative*, mais n'est pas *commutative*. C'est pourquoi l'écriture $h \circ g \circ f$, sans parenthèses, est non ambiguë.
- L'ordre d'exécution est important : $g \circ f$ signifie que l'on applique d'abord f, puis g. Il est utile de s'exercer avec des exemples numériques simples jusqu'à ce que cet ordre devienne intuitif.
- Nous approfondirons plus loin le lien entre la composition et les applications identité et réciproques.

1.2.7 Identité et inverse

Definition 13. *Pour tout ensemble X, on appelle* application identité *l'application*

$$\mathrm{id}_X \colon X \longrightarrow X, \qquad \mathrm{id}_X(x) := x \quad (x \in X).$$

Théorème 14. *Soit $f \colon X \to Y$ une application, avec $X, Y \neq \varnothing$. Alors :*

1. *f est injective $\iff$ il existe $g \colon Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.*
2. *f est surjective $\iff$ il existe $g \colon Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*
3. *f est bijective $\iff$ il existe $g \colon Y \to X$ telle que*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Dans ce cas, g est unique et s'appelle application réciproque*, ou* inverse*, de f ; on écrit $g = f^{-1}$.*

Démonstration. **(1)** « $\Rightarrow$ » : Supposons que f soit injective. Choisissons un élément fixé $x_0 \in X$ (ce qui est possible puisque $X \neq \varnothing$). Définissons $g \colon Y \to X$ par

$$g(y) := \begin{cases} \text{l'unique } x \in X \text{ tel que } f(x) = y, & y \in f(X), \\ x_0, & y \notin f(X). \end{cases}$$

Cette définition est bien posée, car, pour $y \in f(X)$, l'injectivité assure l'existence d'un unique x tel que $f(x) = y$. Pour tout $x \in X$, on a alors

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x,$$

donc $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

« $\Leftarrow$ » : Soit $g\colon Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Si $f(x) = f(x')$, alors

$$x = \mathrm{id}_X(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = \mathrm{id}_X(x') = x',$$

donc $x = x'$. Ainsi, f est injective.

(2) « $\Rightarrow$ » : Supposons que f soit surjective. Pour chaque $y \in Y$, choisissons un élément fixé $x_y \in X$ tel que $f(x_y) = y$, puis posons $g(y) := x_y$. Alors $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in Y$, donc $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

« $\Leftarrow$ » : Soit $g\colon Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Alors, pour tout $y \in Y$, on a $y = f(g(y))$, donc $y \in f(X)$. Par conséquent, $f(X) = Y$ et f est surjective.

Remarque sur (2) : La construction d'une telle application g, à partir d'une application surjective f, consiste à choisir, pour chaque $y \in Y$, un antécédent $x_y \in f^{-1}(\{y\})$. Dans les situations finies ou constructives, cela ne pose pas de difficulté ; pour des ensembles arbitraires, l'énoncé général « toute surjection possède une inverse à droite » repose sur une fonction de choix et est donc lié à l'*axiome du choix*.

(3) Si f est bijective, alors l'application réciproque f^{-1} existe et l'on a immédiatement

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y.$$

Réciproquement, les deux identités, avec les parties (1) et (2), impliquent que f est injective et surjective, donc bijective.

Unicité de l'inverse : Si $g, h \colon Y \to X$ satisfont toutes deux aux deux identités, alors

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h,$$

donc $g = h$. Ainsi, l'inverse est unique. □

Remarques :

- Les notions d'« inverse à gauche » (pour g telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$) et d'« inverse à droite » (pour g telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$) sont utiles : injectivité $\iff$ existence d'une inverse à gauche, surjectivité $\iff$ existence d'une inverse à droite.
- L'existence d'une inverse à droite d'une surjection exige de choisir, pour chaque y, un antécédent ; dans le cas des ensembles infinis, c'est un point où l'axiome du choix peut intervenir.
- Attention à la notation : f^{-1} désigne en général l'image réciproque de sous-ensembles. Pour les bijections, f^{-1} est en outre utilisée comme fonction $Y \to X$ (l'inverse).

1.2.8 Autres notions

Definition 15 (n-uplets ordonnés / fonctions de choix)**.** *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles. Un* n-uplet ordonné *est une expression*

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

avec $x_i \in X_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On peut considérer x comme une fonction

$$x : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X_1 \cup \cdots \cup X_n, \qquad i \mapsto x(i) = x_i,$$

; en ce sens, x est parfois aussi appelée fonction de choix*, car, pour chaque indice i, un élément x_i de X_i est choisi. On écrit souvent aussi, plus brièvement, $x_i := x(i)$ ou $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (cette dernière notation étant seulement informelle).*

Remarque 16. *Deux n-uplets sont égaux si et seulement si toutes leurs composantes coïncident :*

$$(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x'_1, \ \ldots, \ x_n = x'_n.$$

L'ordre des composantes est donc pertinent, contrairement à ce qui se passe pour les ensembles.

Definition 17 (Produit cartésien / Produit direct)**.** *Le* produit cartésien*, ou* produit direct*, des ensembles $X_1, \ldots, X_n$ est*

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}.$$

Dans le cas particulier où $X_1 = \cdots = X_n = X$, on écrit $X^n := X \times \cdots \times X$.

Proposition 18. *Si n est fini, alors*

$$X_1 \times \cdots \times X_n \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad X_i \neq \varnothing \text{ pour tout } i.$$

Remarque 19. *Pour les familles infinies $(X_i)_{i\in I}$, l'implication réciproque $\left(\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing \Rightarrow X_i \neq \varnothing \ \forall i\right)$ est toujours vraie ; en revanche, l'implication directe $\left(X_i \neq \varnothing \ \forall i \Rightarrow \prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing\right)$ ne vaut en général qu'en utilisant l'*axiome du choix. *Il s'agit d'une distinction importante, bien que souvent technique : pour les produits finis, aucun axiome du choix n'est nécessaire, tandis que pour une famille arbitraire de facteurs il l'est en général.*

Definition 20 (Projections)**.** *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i-ième* projection *est définie par*

$$\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \qquad \pi_i(x_1, \dots, x_n) := x_i.$$

Remarque 21. *Si $X_1 \times \cdots \times X_n \neq \varnothing$, alors π_i est surjective sur X_i : pour tout $y \in X_i$, il existe un uplet de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dont la i-ième composante est y (pour les produits finis, on peut choisir arbitrairement les autres composantes ; pour les produits infinis, la construction de tels uplets peut nécessiter l'axiome du choix).*

Definition 22 (Familles et suites)**.** *Soit I un ensemble quelconque, appelé ensemble d'indices. Une application*

$$\varphi : I \longrightarrow X, \qquad i \mapsto x_i = \varphi(i),$$

est appelée une famille *d'éléments de X. On la note brièvement $(x_i)_{i\in I}$. Si $I = \mathbb{N}$, alors $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est appelée une* suite.

Remarque 23. *Contrairement à un sous-ensemble $X' \subseteq X$, une famille $(x_i)_{i\in I}$ contient en plus l'information relative à l'association des indices i aux éléments x_i :*

— *L'apparition multiple d'un même élément est autorisée (par exemple $x_i = x_j$ pour $i \neq j$).*
— *L'ordre, ou plus généralement les étiquettes i, est important.*
— *L'image $\varphi(I) = \{x_i \mid i \in I\}$ est un sous-ensemble de X, mais, en général, le passage à ce seul sous-ensemble fait perdre l'information d'indexation.*

Definition 24 (Fonction de choix)**.** *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble d'ensembles non vides (par exemple $\mathcal{C} = \{X_i\}_{i\in I}$). Une* fonction de choix *est une application*

$$c : \mathcal{C} \longrightarrow \bigcup \mathcal{C}, \qquad C \mapsto c(C) \in C,$$

qui associe à chaque ensemble $C \in \mathcal{C}$ un élément $c(C) \in C$.

Remarque 25. *La question de savoir si, pour toute famille d'ensembles non vides, il existe une fonction de choix est précisément le contenu de l'*axiome du choix*. Cet axiome a déjà été mentionné lors de la discussion des applications inverses et des produits, et il joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques ; pour beaucoup d'usages pratiques, notamment dans les constructions finies, il n'est toutefois pas nécessaire.*

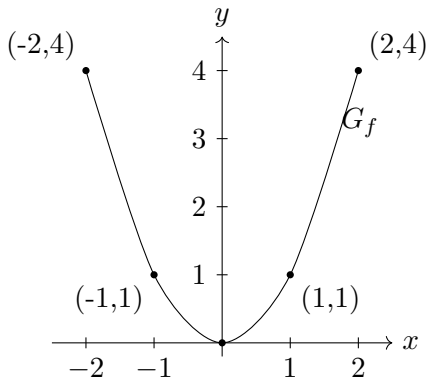
1.2.9 Graphes et relations

Definition 26 (Graphe d'une application)**.** *Soit $f\colon X \to Y$ une application. Le* graphe *de f est l'ensemble*

$$G_f := \{\, (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \,\} \subseteq X \times Y.$$

Le graphe G_f est donc exactement l'ensemble de tous les couples ordonnés qui indiquent quel élément $y \in Y$ est associé à quel élément $x \in X$. On peut décrire entièrement f par son graphe, et réciproquement.

Représentation graphique : On représente typiquement le graphe G_f dans un système de coordonnées, où chaque couple $(x, f(x))$ est marqué comme un point du plan (x, y). Un exemple simple, destiné à la visualisation intuitive, est donné par $f(x) = x^2$ pour un petit choix de valeurs de x. L'exemple suivant montre une telle représentation schématique :



Projection sur la première composante : Considérons la projection

$$\pi_X \colon X \times Y \longrightarrow X, \qquad \pi_X(x, y) := x.$$

La restriction $\pi_X|_{G_f} \colon G_f \to X$ est bijective :

— *Surjective :* Pour tout $x \in X$, on a $(x, f(x)) \in G_f$; ainsi, $\pi_X|_{G_f}$ atteint chaque élément x.
— *Injective :* Si $\pi_X(x, f(x)) = \pi_X(x', f(x'))$, alors $x = x'$. Comme les couples du graphe sont déterminés de manière unique par leur première composante, on obtient donc $(x, f(x)) = (x', f(x'))$.

Intuitivement, la projection sur X « ignore » la seconde composante ; mais, sur le graphe, elle établit ainsi une correspondance unique entre les points du graphe et les éléments de X.

Absence de surplomb / test de la droite verticale : Le graphe G_f d'une application ne présente jamais de « surplomb » au sens où plusieurs valeurs y différentes seraient associées, dans le graphe, à une même valeur x. Formellement : pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G_f$. Autrement dit, aucune droite verticale $x = \text{const}$ ne coupe le graphe en plus d'un point ; c'est le critère classique du *test de la droite verticale*.

Definition 27 (Relation)**.** *Une* relation *sur un ensemble X est une partie $R \subseteq X \times X$. Pour $(x, y) \in R$, on écrit souvent $x \sim_R y$, ou simplement $x \sim y$, et l'on dit que « x est en relation avec y ».*

Exemples de relations : (On choisit X de manière appropriée dans chaque cas.)

1. $\leq$ sur $\mathbb{R}$: $(x, y) \in R$ si et seulement si $x \leq y$.
2. La relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{N}$: $(a, b) \in R$ si et seulement si a divise b.

3. La relation « avoir la même longueur » sur l'ensemble des mots formés sur un alphabet : $(u, v) \in R$ si et seulement si $|u| = |v|$.

1.2.10 Relations d'équivalence

Definition 28 (Relation d'équivalence)**.** *Une relation $\sim$ sur X est appelée* relation d'équivalence *si, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *(Réflexivité) $x \sim x$.*
2. *(Symétrie) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.*
3. *(Transitivité) $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.*

Exemples de relations d'équivalence :

1. L'égalité $=$ sur n'importe quel ensemble X.
2. La congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$: $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si n divise $(a - b)$.
3. « Appartenir à la même classe relativement à une partition » : si X est partitionné en blocs disjoints (sous-ensembles), alors deux éléments sont équivalents lorsqu'ils appartiennent au même bloc.

1.2.11 Exercice

Exercice 29. *Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour chacune des relations suivantes sur X, déterminer s'il s'agit d'une relation d'équivalence. Justifier la réponse.*

1. $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3)\}$.
3. $R_3 = \{(a,b) \in X \times X \mid a \equiv b \pmod 2\}$ *(« même parité »).*

Solution 30. *1.* Vérification de la réflexivité, de la symétrie et de la transitivité : *Réflexivité : tous les couples* (x,x)*, pour* $x \in X$*, sont présents* $\Rightarrow$ *la relation est réflexive. Symétrie :* $(1,2)$ *appartient à* R_1 *et* $(2,1)$ *appartient également à* R_1 *; pour tous les autres couples non diagonaux, la symétrie est satisfaite, car le seul couple concerné est* $1 \leftrightarrow 2$*. Donc* R_1 *est symétrique. Transitivité : on vérifie les chaînes critiques :* $1 \sim 2$ *et* $2 \sim 1$ *impliquent* $1 \sim 1$*, ce qui est bien présent. Il n'existe pas de chaîne du type* $1 \sim 2$ *et* $2 \sim 3$ *qui imposerait un couple manquant. Ainsi,* R_1 *est transitive.* $\Rightarrow$ R_1 *est une relation d'équivalence ; ses classes d'équivalence sont* $\{1,2\}$*,* $\{3\}$ *et* $\{4\}$*.*

2. *Réflexivité : oui, tous les couples* (x,x) *sont présents. Symétrie :* $(1,2) \in R_2$*, mais* $(2,1) \notin R_2$*. La relation n'est donc pas symétrique* $\Rightarrow$ *ce n'est pas une relation d'équivalence. Il est alors inutile de poursuivre la vérification.*

3. Même parité (pair/impair) : *Réflexivité :* $a \equiv a \pmod 2$ *pour tout* a *— oui. Symétrie :* $a \equiv b \pmod 2 \Rightarrow b \equiv a \pmod 2$ *— oui. Transitivité :*

$a \equiv b \pmod 2$ et $b \equiv c \pmod 2 \Rightarrow a \equiv c \pmod 2$ — oui. $\Rightarrow R_3$ est une relation d'équivalence. Les deux classes d'équivalence sont $\{1, 3\}$ (nombres impairs) et $\{2, 4\}$ (nombres pairs).

1.2.12 Classes d'équivalence

Lorsqu'une relation d'équivalence $\sim$ est définie sur un ensemble X, elle permet de regrouper les éléments « équivalents » et de les représenter par un seul nouvel objet. On fait ainsi abstraction des différences qui ne sont pas pertinentes pour la structure étudiée.

Definition 31 (Classe d'équivalence)**.** *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Pour $a \in X$, on définit la* classe d'équivalence *de a par*

$$[a] := \{\, x \in X \mid x \sim a \,\}.$$

Un sous-ensemble $A \subseteq X$ est appelé classe d'équivalence *relativement à $\sim$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$A \neq \varnothing$,*
2. *pour tous $x, y \in A$, on a $x \sim y$,*
3. *si $x \in A$ et si $y \in X$ vérifie $y \sim x$, alors $y \in A$.*

Théorème 32. *Les classes d'équivalence forment une partition de X : chaque élément $a \in X$ appartient à une et une seule classe d'équivalence. En particulier, pour deux classes d'équivalence A, A', on a soit $A = A'$, soit $A \cap A' = \varnothing$.*

Démonstration. Fixons $a \in X$ et posons $A := [a] = \{x \in X \mid x \sim a\}$. Comme $\sim$ est réflexive, on a $a \in A$, donc $A \neq \varnothing$. Si $x, y \in A$, alors $x \sim a$ et $y \sim a$; par symétrie et transitivité, il vient $x \sim y$. Ainsi, A satisfait les conditions (2) et (3) de la définition.

Soient maintenant A et A' deux classes d'équivalence telles que $A \cap A' \neq \varnothing$. Choisissons $z \in A \cap A'$. Pour $x \in A$, on a $x \sim z$, car $z \in A$. Comme $z \in A'$, on a aussi $z \sim y$ pour tout $y \in A'$. Par transitivité, il en résulte $x \sim y$ pour tout $y \in A'$, donc $x \in A'$ et par conséquent $A \subseteq A'$. En échangeant les rôles de A et de A', on obtient $A' = A$. Ainsi, deux classes d'équivalence distinctes sont disjointes, et chaque $a \in X$ appartient à la classe $[a]$, donc à une unique classe. □

Definition 33 (Ensemble quotient et projection canonique)**.** *L'ensemble des classes d'équivalence est appelé* ensemble quotient *et se note*

$$X/\sim \quad \textit{ou} \quad X/R.$$

L'application

$$\pi \colon X \longrightarrow X/\sim, \qquad \pi(a) := [a]$$

est appelée projection canonique *(ou application quotient). Elle est surjective, et les images réciproques de ses valeurs sont exactement les classes d'équivalence :*

$$\pi^{-1}([a]) = [a].$$

Tout élément $a \in [a]$ est appelé un représentant *de la classe $[a]$.*

Exemple 34 (Congruence modulo n)**.** *Sur $\mathbb{Z}$, pour un entier fixé $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on définit la relation*

$$a \equiv b \pmod{n} \quad :\Longleftrightarrow \quad n \mid (a-b).$$

C'est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est constitué des n classes

$$[0], [1], \ldots, [n-1],$$

par exemple $[1] = \{\ldots, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ pour $n = 3$. Ces classes fournissent des exemples typiques de représentants et d'ensembles quotients.

1.3 Exercices avec solutions types

Les exercices suivants couvrent les notions introduites jusqu'ici : ensembles et opérations sur les ensembles, applications (injectivité, surjectivité, bijectivité), composition, graphes, relations, relations d'équivalence, classes d'équivalence et ensembles quotients. Les solutions types sont volontairement concises ; à titre d'exercice, les étudiantes et étudiants devraient rédiger eux-mêmes les preuves de manière complète.

Exercice 1 (opérations fondamentales) : Soient

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 3, 4\}, \qquad C = \{3, 4, 5\}.$$

Déterminer :

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad (A \cup B) \cap C, \quad A \setminus C.$$

Solution type 1 : $A \cup B = \{1,2,3,4\}$. $A \cap B = \{2,3\}$. $(A \cup B) \cap C = \{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5\} = \{3,4\}$. $A \setminus C = \{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$.

Exercice 2 (Ensembles indexés) : Pour $I = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ et $X_i = [-i,i] \subset \mathbb{R}$ pour $i \in I$, calculez

$$\bigcup_{i\in I} X_i, \qquad \bigcap_{i\in I} X_i.$$

Solution type 2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un i tel que $|x| \leq i$; ainsi $\bigcup_{i\in I} X_i = \mathbb{R}$. Comme $X_0 = [0,0] = \{0\}$ et $X_0 \subseteq X_i$ pour tout i, on a $\bigcap_{i\in I} X_i = \{0\}$.

Exercice 3 (Propriétés d'une application) : Considérez $f\colon \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ définie par $f(1) = a,\ f(2) = a,\ f(3) = b$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Solution type 3 : f n'est *pas* injective, car $f(1) = f(2) = a$ avec $1 \neq 2$. f est *surjective*, puisque $f(\{1,2,3\}) = \{a,b\}$, c'est-à-dire l'ensemble d'arrivée. Comme elle n'est pas injective, f n'est pas bijective.

Exercice 4 (Composition et identité) : Donnez un exemple concret d'ensembles X, Y et d'applications $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ telles que $g \circ f = \mathrm{id}_X$, mais $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$. Que déduit-on de $g \circ f = \mathrm{id}_X$ au sujet de f (injective/surjective) ?

Solution type 4 : Posons $X = \{1,2\},\ Y = \{a,b,c\}$. Définissons $f(1) = a,\ f(2) = b$. Choisissons $g(a) = 1,\ g(b) = 2,\ g(c) = 1$. Alors $g \circ f = \mathrm{id}_X$, car $g(f(1)) =$

$g(a) = 1$, etc. Mais $f \circ g$ envoie c sur $f(1) = a$, donc $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$. De $g \circ f = \mathrm{id}_X$, il découle que f est injective (elle admet un inverse à gauche) et que g est surjective (elle admet un inverse à droite).

Exercice 5 (Images, intersections et réunions) : Démontrez :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(M_i), \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(M_i).$$

Solution type 5 : Première égalité : soit $y \in f(\bigcup_i M_i)$. Alors il existe $x \in \bigcup_i M_i$ tel que $y = f(x)$. Il existe donc un i tel que $x \in M_i$, d'où $y \in f(M_i) \subseteq \bigcup_i f(M_i)$. Réciproquement, si $y \in \bigcup_i f(M_i)$, alors il existe un i et un $x \in M_i$ tels que $y = f(x)$; ainsi $x \in \bigcup_i M_i$ et $y \in f(\bigcup_i M_i)$. Deuxième inclusion : soit $y \in f(\bigcap_i M_i)$. Alors il existe $x \in \bigcap_i M_i$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in M_i$ pour tout i, on a $y \in f(M_i)$ pour tout i, donc $y \in \bigcap_i f(M_i)$. (La réciproque peut être fausse en général, par exemple si f n'est pas injective.)

Exercice 6 (Images réciproques et opérations sur les ensembles) : Montrer que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} N_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(N_j),$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} N_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(N_j).$$

Solution type 6 : Dans les deux égalités, les deux inclusions découlent directement de la définition $f^{-1}(N) = \{x \mid f(x) \in N\}$ et du lien logique entre $\exists$, $\forall$ et $\vee, \wedge$. Formellement : $f(x) \in \bigcup_j N_j \Leftrightarrow \exists j : f(x) \in N_j \Leftrightarrow \exists j : x \in f^{-1}(N_j)$. De même, on utilise $\forall$ pour l'intersection.

Exercice 7 (Graphe d'une application) : Soit $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que, pour tout $x \in X$, il existe exactement un couple $(x, y) \in G_f$. En déduire le critère de la droite verticale.

Solution type 7. Par définition, $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Pour un x donné, le couple $(x, f(x))$ existe ; de plus, par l'unicité de $f(x)$, il ne peut exister dans le graphe aucun autre couple (x, y') avec $y' \neq f(x)$. Intuitivement, cela signifie qu'à chaque x correspond au plus un y (et, par définition, exactement un). Ainsi, aucune droite verticale ne coupe le graphe plus d'une fois.

Exercice 8 (Relations et relations d'équivalence) : Pour $X = \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer si les relations suivantes sont des relations d'équivalence :

1. $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3)\}$.

Solution type 8 : R_1 : la réflexivité est satisfaite. Pour la symétrie, $(1,2)$ et $(2,1)$ appartiennent bien à la relation. La transitivité se vérifie dans les cas non triviaux (par exemple, $1 \sim 2$ et $2 \sim 1$ donnent $1 \sim 1$, qui est présent). Ainsi, R_1 est une relation d'équivalence

(classes : $\{1,2\},\{3\},\{4\}$). R_2 : la réflexivité est satisfaite, mais la symétrie est violée, car $(1,2) \in R_2$ tandis que $(2,1) \notin R_2$. Ce n'est donc pas une relation d'équivalence.

Exercice 9 (Classes d'équivalence et ensemble quotient) : Sur $\mathbb{Z}$, on définit $a \sim b$ si et seulement si $a \equiv b \pmod 4$. Déterminer les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Donner trois systèmes de représentants différents.

Solution type 9. Les classes d'équivalence sont $[0] = \{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$, $[1]$, $[2]$, $[3]$. Ainsi, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0],[1],[2],[3]\}$. Trois systèmes de représentants possibles sont par exemple $\{0,1,2,3\}$, $\{4,5,6,7\}$, $\{0,-3,-2,-1\}$.

Exercice 10 (Ensembles finis et principe des tiroirs) : Soit X un ensemble fini tel que $|X| = n$, et soit $f\colon X \to X$. Montrer que : f injective $\Longrightarrow$ f surjective. (Indication : principe des tiroirs / principe de Dirichlet.)

Solution type 10 : Si f est injective, alors les n images $f(x)$, pour $x \in X$, sont deux à deux distinctes ; ainsi, $f(X)$ contient au moins n éléments. Comme $f(X) \subseteq X$ et que X ne possède que n éléments, on obtient $f(X) = X$. Donc f est surjective. (Argument du principe des tiroirs : si n objets sont placés dans n tiroirs sans regroupement, alors chaque tiroir est occupé.)

Exercice 11 (axiome du choix) : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides. Formulez en mots la question à laquelle répond l'axiome du choix et indiquez si ce problème se pose lorsque I est fini.

Solution type 11 : Question : *Existe-t-il toujours une application* $c\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ *telle que* $c(i) \in X_i$ *pour tout* $i \in I$ *?* — Il s'agit précisément de l'existence d'une fonction de choix. Lorsque l'ensemble d'indices I est fini, on peut toujours construire une telle fonction en choisissant un élément dans chaque X_i. Le problème apparaît seulement pour les familles infinies et, dans toute sa généralité, il est résolu par l'axiome du choix ; dans des modèles où cet axiome n'est pas admis, une telle fonction n'existe pas nécessairement.

Remarque pour les enseignants : Cette collection peut être utilisée comme série d'exercices pour un cours magistral ou une séance de travaux dirigés. Les exercices 1–4 sont plutôt directs et de nature calculatoire ou conceptuelle ; les exercices 5–7 portent davantage sur les techniques de démonstration ; les exercices 8–11 combinent compréhension conceptuelle et observations plus approfondies (quotients, axiome du choix). Pour les devoirs, il est recommandé de proposer un mélange de problèmes simples et de difficulté moyenne ; pour les examens, des variantes des exercices 3, 4, 5 et 10 peuvent être particulièrement adaptées.